

웨이블릿이란?

이 남 용* · 김 윤 영**

(*강원대학교 제어계측공학과 · **서울대학교 기계항공공학부)

1. 머리말

이 글의 목적은 현재 공학의 많은 분야에서 응용이 시도되고 있는 웨이블릿(wavelet) 변환을 소개하는 것이다. 날로 그 응용범위를 넓혀가고 있는 웨이블릿 변환에 관해서 이렇게 짧은 몇 쪽의 글에서 다 설명한다는 것은 불가능한 일일 것이다. 그러나, 웨이블릿 변환이 갖고 있는 우수한 특징을 생각해 보면 웨이블릿 변환은 소음·진동 신호를 효과적으로 분석할 수 있는 새로운 수학적 도구로 자리잡을 것이 확실시된다. 이 글은 웨이블릿 변환에 대한 기초적 개념과 특성을 정리하였으며, 공학에서의 응용은 별도의 글(이하 2부라 칭한다.)에서 다루고자 한다.

웨이블릿 변환은 수학의 Calderon-Zygmund 작용소 이론⁽¹⁾, 물리학의 재정규화 군(renormalization group) 이론⁽²⁾, 그리고 신호처리의 신호분석과 복원을 위한 QMF(Quadrature Mirror Filter) 이론⁽³⁾ 등에 그 근원을 두고 있다. 이와 같이 수학, 물리학, 신호처리분야 등에서 각기 독립적으로 발전되어 오던 이론들은 1980년 중반부에 이르러, Daubechies^(4,5), Mallat⁽⁶⁾, Meyer, Morlet, Donoho, Sweldens 등의 여러 학자들에 의해 그 이론이 체계화되었다. 현재는 Matlab 제품의 Toolbox로 만들어질 정도로 발달되었다.

웨이블릿 변환은 전통적으로 신호처리에 사용되어온 푸리에(Fourier) 변환에 비해 다음과 같은 장점을 갖고 있다.

첫째, 웨이블릿 변환은 그 계산속도가 푸

리에 변환에 비해 빠르다.

기존의 푸리에 변환은 N 개의 이산자료에 대해 $O(N \log_2 N)$ 연산이 필요한 반면에, 웨이블릿 변환은 $O(N)$ 연산을 필요로 한다.

둘째, 웨이블릿 변환은 주어진 신호에 대한 시간과 주파수 영역에서의 정보를 균형적으로 국소화 시킬 수 있다⁽⁵⁾.

Heisenberg의 불확정성의 원리에 의해 시간과 주파수 영역에서의 정보를 동시에 완벽하게 국소화시키는 변환은 존재할 수 없지만, 웨이블릿 변환은 창문 함수의 지지영역(함수가 0이 아닌 영역)을 변화시킴으로써, 저주파수 영역에서는 긴 시간의 정보를, 고주파수 영역에서는 짧은 시간의 정보를 사용할 수 있는 특징을 갖는다. 이와는 달리 단시간 푸리에변환(short-time Fourier transform)은 모든 주파수 영역에서 같은 크기의 창문 함수를 사용함으로써, 창문함수의 크기에 따라 분석 가능한 주파수의 범위가 미리 고정되는 단점을 갖게 된다.

셋째, 웨이블릿 변환의 특징으로 신호의 평탄성(smoothness) 분석을 들 수 있다.

여기서 평탄성이란 신호가 얼마나 부드럽게 변하는가를 나타내는 것이다. 신호의 평탄성은 그 신호를 대상으로 하는 여러 처리의 결과를 미리 예측하는데 중요한 정보를 제공한다. 푸리에 변환을 이용한 신호의 평탄성 분석은 그 결과가 제한적이라는 단점이 있다.

이 글은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 단시간 푸리에 변환과 연속 웨이블릿 변환에 대해서 설명하였다. 3절에서는 실용적 의미의 웨이블릿 변환을 기저(base)의 개

념을 이용하여 설명하였다. 4절에서는 웨이블릿 변환의 특성에 대해 설명하였다. 5절에서는 웨이블릿 변환을 잡음제거에 적용하는 방법에 대한 이론적 배경을 푸리에 변환을 이용한 전통적 방법의 이론적 배경과 비교하여 설명하였다. 마지막으로, 6절은 맺음말로 구성되었다. 웨이블릿 변환의 실제응용 예는 2부에서 다루었다.

2. 단시간 푸리에 변환과 연속 웨이블릿 변환

주어진 연속신호 $f(t)$ 에 대한 푸리에 변환은 \hat{f} 으로 표시하며 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt$$

여기서 $\hat{f}(\xi)$ 는 주파수 ξ 성분의 크기인데, 이러한 각 주파수 성분을 다음과 같이 합쳐서

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi t} d\xi \quad (1)$$

원신호 f 를 복원할 수 있다는 것이 푸리에 변환을 이용한 신호분석의 핵심적 이론이다. 이러한 주파수 정보를 통한 신호분석은 공학의 많은 분야에서 사용되고 있다. 예를 들면, 시불변 선형시스템의 상태를 추정하는 시스템 규명 문제와 입력신호를 검출하는 문제 등은 푸리에 변환이 시불변 선형시스템의 필터링과정을 분해하는 특성을 이용한 것이다⁽⁷⁾.

그러나, 푸리에 변환의 문제점은 신호를 분석할 때 그 신호의 대한 시간정보를 전혀 제공하지 않는다는 것이다. 즉, $\hat{f}(\xi)$ 에는 ξ 에서의 주파수정보를 제공하지만 신호가 시간에 따라 어떻게 변화하는지에 대한 정보는 전혀 없고, 단지 식 (1)에 의해 신호의 여러 시간대의 정보가 모여 $\hat{f}(\xi)$ 를 이루었다는 것을 알 수 있다. 비록 완벽하게 시간과 주파수 정보를 동시에 얻는 것은 불가능 (Heisenberg의 불확정성 원리)하지만, 어느 정도 시간과 주파수대역에서 균형적으로 국소화된 정보의 추출방법이 가능할 것이다. 이와 같이 신호의 국소화된 시간과 주파수 정보를 추출하기 위한 방법으로 소위 시간축

상에 창문 함수를 씌우는 단시간 푸리에 변환이 제시되었다. 여기서 창문 함수 ϕ 는 시간과 주파수대역 모두에서 0을 기준으로 집중되어 있어야 한다. 이러한 창문 함수 ϕ 에 대해 단시간 푸리에 변환은

$$Tf(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(\tau-t)e^{-i\xi t} dt$$

으로 정의한다. 여기서, $f(t)\phi(\tau-t)$ 는 신호 $f(t)$ 의 시간 τ 근방에서의 정보를 의미하며, $f(t)\phi(\tau-t)$ 의 푸리에 변환인 $Tf(\xi, \tau)$ 는 결국, 신호 $f(t)$ 에 대한 시간 x , 주파수 ξ 근방에서의 정보를 표현하고 있다. 이러한 시간과 주파수 대역에서 국소화된 정보를 다음과 같이 조합하면

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(\xi, u)\phi(x-u)e^{i\xi x} d\xi du$$

원신호 $f(x)$ 를 다시 복원할 수 있다. 그러나, 단시간 푸리에 변환은 창문 함수의 지지영역의 크기에 따라 분석 가능한 신호의 주파수 영역 범위가 미리 정해지는 단점이 있다. 이는 각각의 창문 영역들 사이에 신호의 불연속성을 일으키는 주요 원인이 되며, 또한 푸리에 변환을 통해서 전체 신호의 에너지를 특정 주파수에 집중시키기 힘들다는 단점이 있다^(8,9).

연속 웨이블릿 변환은 단시간 푸리에 변환의 여러 단점을 극복하기 위하여 제시되었는데^(5,8), 이는 소위 웨이블릿 함수라고 하는 ψ 에 의해 정의된다.

$$\begin{aligned} Wf(a, b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^{a,b}(t) dt \\ \psi^{a,b}(t) &= \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a>0 \end{aligned} \quad (2)$$

이 글에서는 웨이블릿 함수 ψ 에 대해 다음 세 조건을 가정한다:

첫째, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ 이다.

(이것이 만족되면 '1차의 소멸모멘트를 갖는다'라고 말한다.)

둘째, ψ 는 시간과 주파수 대역에서 정보량은 각각 0 근처에 집중되어 있다.

셋째, ψ 는 다음의 허용조건을 만족시킨다.

$$C_\phi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\phi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < +\infty$$

위에서 제시한 조건들은 최소한의 것으로 응용에 따라 웨이블릿 함수에 부가적인 조건을 추가하기도 한다⁽⁸⁾.

그림 1과 그림 2는 a 의 크기에 따른 $\psi^{a,b}$ 의 모습을 나타냈다. $\psi^{a,b}$ 가 큰 a 에 대해서 시간 b 근처의 넓은 영역을, 그리고 작은 a 에 대해서 시간 b 근처의 좁은 영역을 덮고 있음을 알 수 있다. 그러므로 $Wf(a, b)$ 에 있어서 큰 a 는 신호 $f(t)$ 에 대해 시간 b 근방에서의 저주파대역 정보를, 그리고 작은 a 는 신호 $f(t)$ 에 대해 시간 b 근방에서의 고주파대역 정보를 제공한다. 이러한 시간과 주파수 대역에서 국소화된 정보 $Wf(a, b)$ 를 모아서 원신호 $f(t)$ 는 다음과 같이 복원할 수 있다.

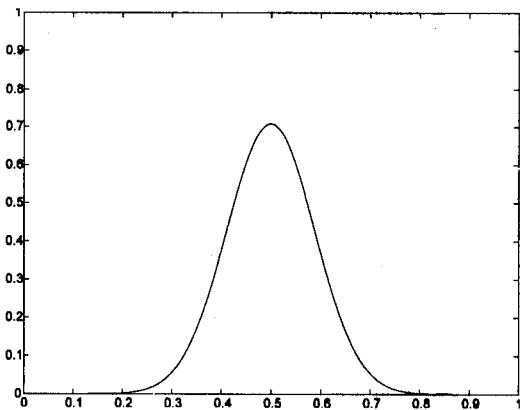


그림 1 큰 a 에 대한 $\psi^{a,b}$

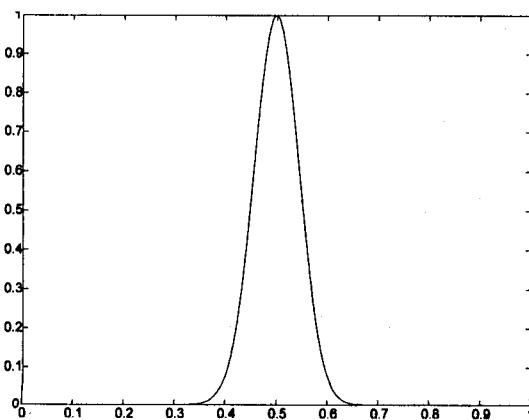


그림 2 작은 a 에 대한 $\psi^{a,b}$

$$f(t) = \frac{1}{C_\phi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(a, b) \psi^{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}$$

앞에서 살펴본 바와 같이 연속 웨이블릿 변환은 단시간 푸리에 변환과는 달리 크기 변수 a 의 변화에 따라 고주파와 저주파대역 정보를 동시에 제공한다. 이러한 특성은 아주 짧게 존재했다 사라지는 신호의 특이점 (singularity point)의 분석에 유용하다.

3. 웨이블릿 기저

앞에서 기술한 연속 웨이블릿 변환은 주파수 성분이 급격히 변화하는 신호의 분석에 유용하다. 그러나 일반 신호를 처리할 때에는 굳이 주파수의 변화보다는 신호가 시간에 따라 변화하는 특성을 효율적으로 표현하는 것이 더 중요하다. 이를 위해 식 (2)의 이산화가 필수적인데, 먼저 시간을 의미하는 b 를 정수 j 로, 그리고 영역크기를 의미하는 a 는 정수 k 에 대한 2의 멱급수 2^{-k} 로 교체하면 식 (2)은

$$\begin{aligned} Wf(2^k, j) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{k,j}(t) dt \\ &= \langle f, \psi_{k,j} \rangle \end{aligned}$$

이다. 여기서,

$$\psi_{k,j}(t) = 2^{k/2} \psi(2^k t - j)$$

로 정의된다. 이러한 이산화가 실용적이기 위해서는 연속신호 f 에서 $\langle f, \psi_{k,j} \rangle$ 의 계산이 효율적이어야 하며, 반대로 $\langle f, \psi_{k,j} \rangle$ 에서 원신호 f 를 복원하는 과정 또한 안정적이어야 한다. 이러한 조건을 만족하는 예로 $\psi_{k,j}$ 가 직교기저(orthonormal basis)를 이루는 경우를 들 수 있다. 즉, 유한에너지를 갖는 모든 연속신호 f 에 대해 다음의 식이 성립한다.

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{k,j} \rangle \psi_{k,j} \quad (3)$$

지지영역의 크기가 L 인 ψ 에 대해 $\langle f, \psi_{k,j} \rangle$ 은 $[j2^{-k} - L2^{-k}, j2^{-k} + L2^{-k}]$ 에 국한된 정보에만 의존하기 때문에 큰 k 에 대

해서 f 의 고주파정보, 그리고 작은 k 에 대해서 f 의 저주파정보를 갖고 있음을 알 수 있다. 그러므로 급격히 변하는 신호의 분석에는 좁은 지지영역을 갖는 웨이블릿 함수가 넓은 지지영역을 갖는 웨이블릿 함수에 비해 유리하다.

한편, 구성단위인 $\psi_{k,j}$ 는 신호 f 에 대해 빠른 접근(approximation)을 얻기 위해, 어느 정도의 평탄성을 가져야 한다. 이러한 이유로 1980년대 중반 웨이블릿 이론의 많은 부분은 어느 정도의 평탄성과 유한지지영역을 가지며, 그것으로부터 파생된 $\psi_{k,j}$ 가 직교기저를 이루는 함수 ψ 를 찾기 위한 노력이었다. 그러한 노력의 결실은 Daubechies⁽⁴⁾에 의해 이루어졌는데, 그 내용은 필요한 만큼의 평탄성을 갖는 웨이블릿 함수 ψ 는 구축할 수 있다는 것이다. 물론 웨이블릿 함수의 평탄성이 증가될수록 그것의 지지영역이 커지는 단점은 존재한다⁽⁴⁾.

Daubechies⁽⁴⁾의 웨이블릿 함수 ψ 는 소위 스케일링(scaling) 함수 ϕ 와 함께 구축되었는데, 그들은 다음 두 식을 만족한다:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x-n), \\ \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_n g_n \psi(2x-n). \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 h_n 은 유한수열로 다음의 조건을 만족시키며

$$\begin{aligned} \sum_n h_n h_{n+2k} &= \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases} \\ \sum_n h_n &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

계수 g_n 은 h_n 으로부터 구하게 된다.

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}$$

위의 식 (4)는 세밀화식(refinement equation) 또는 2-스케일 관계식(2-scale relation equation)이라 하는데, 이 식을 이용하면 다음의 결과를 증명할 수 있다^(4,8).

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_{k,j} \rangle &= \sum_n h_{n-2j} \langle f, \phi_{k+1,j} \rangle \\ \langle f, \psi_{k,j} \rangle &= \sum_n g_{n-2j} \langle f, \psi_{k+1,j} \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)의 중요성은 Daubechies의 직교 웨

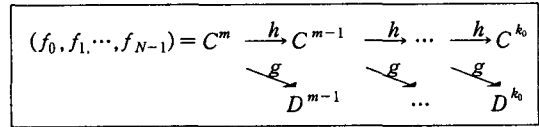


그림 3 웨이블릿 변환

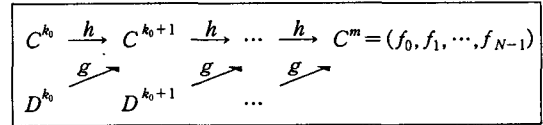


그림 4 웨이블릿 역변환

이블릿 변환을 이산신호 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 에 적용할 때 잘 보여진다. 이 글에서는 전개를 용이하게 하기 위하여 신호의 갯수 N 에 대해 어떤 양의 정수 m 이 존재하여 $N=2^m$ 이라고 가정한다. 먼저, 주어진 이산신호 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 에 대해

$$\langle f, \phi_{m,l} \rangle = f_l, \quad l=0,1,\dots,2^m-1$$

을 만족하는 연속신호 f 가 존재한다고 가정한다. 그러면, 식 (5)를 $\langle f, \phi_{k,l} \rangle$ 에 k 를 m 서부터 $k_0(\geq 0)$ 까지 순차적으로 낮추어 가며 적용하여 $\langle f, \psi_{k,j} \rangle, k=k_0, k_0+1, \dots, m-1,$ 와 $\langle f, \phi_{k_0,l} \rangle$ 를 구할 수 있다. 이 과정은

$$C^k(j) = \langle f, \phi_{k,j} \rangle$$

$$D^k(j) = \langle f, \psi_{k,j} \rangle$$

으로 정의하면 다음과 같이 그림 3으로 도식화 할 수 있다:

실용적 의미의 웨이블릿 변환은 이산신호 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 를 $(C^{k_0}, D^{k_0}, \dots, D^{m-1})$ 로 변환하는 것이며 역 웨이블릿 변환은 다음의 식으로 구현할 수 있는데,

$$C_j^k = \sum_n h_{j-2n} C_n^{k+1} + g_{j-2n} D_n^{k+1}$$

이 역변환 과정을 도식화하면 그림 4와 같다.

4. 웨이블릿 변환의 특성

웨이블릿 변환은 푸리에 변환에 비해 여러 장점을 갖고 있다. 신호처리에 전통적으로 사용되어온 푸리에 변환의 이산형태인 FFT

(Fast Fourier Transform)는

$$(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \rightarrow (F_0, F_1, \dots, F_{N/2}),$$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i k n / N},$$

로 정의된다. 위의 정의는 f_i 의 값들이 복소수가 아닌 실수인 것을 고려한 것으로, $F_k = F_{N-k}^*$ 이라는 사실을 이용하였다. 즉, N 개의 독립적인 실수자료 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 로부터 N 개의 실수자료로 표현 가능한 $(F_0, F_1, \dots, F_{N/2})$ (여기서 F_0 와 $F_{N/2}$ 는 실수이다.)로 변환하는 것이 FFT이다. 이러한 FFT에 대한 웨이블릿 변환의 장점의 하나는 적은 연산을 통해 구현 할 수 있다는 것이다. 즉, FFT의 계산을 위해 $O(N \log_2 N)$ 연산이 필요한 반면, 식 (3)에서 알 수 있듯이 웨이블릿 변환은 $O(N)$ 연산에 의해 구할 수 있다. 이러한 계산속도의 향상은 빠른 실시간 처리를 필요로 하는 응용분야에서 웨이블릿 변환이 유용하게 사용될 수 있다는 근거를 제시한다.

한편, 주어진 신호 f 에 대한 웨이블릿 변환 결과인 $\langle f, \psi_{k,j} \rangle$ 는 f 의 $j2^{-k}$ 근방에서의 시간 정보를 제공한다. 또한 $\langle f, \psi_{k,j} \rangle$ 는 큰 k 에 대해 f 의 고주파정보, 그리고 작은 k 에 대해 저주파정보를 제공한다. 이와 같이 웨이블릿 변환은 시간과 주파수 영역에서의 정보를 '균형적'으로 국소화시키는 장점을 갖고 있다. 여기서 '균형적'이라는 용어는 상당히 주관적 기준에 따른다. 시간 영역에서의 완벽히 국소화된 정보의 추출은 (시간영역에서) 좁은 유한지지영역을 갖는 ψ 를 $\langle f, \psi_{k,j} \rangle$ 에 사용함으로써 얻을 수 있다. 비슷한 논리로 주파수 영역에서의 완벽히 국소화된 정보의 추출은 주파수영역에서 유한지지영역을 갖는 ψ 를 $\langle f, \psi_{k,j} \rangle$ 에 사용함으로써 얻을 수 있을 것이다. 그러나, 시간영역과 주파수영역, 두 영역 모두에서 유한지지영역을 갖는 함수는, 모든 곳에서 0을 갖는 함수를 제외하고는 존재하지 않는다. 더 나아가, 만일 시간영역에서의 정보의 국소화를 강조하면 할수록 주파수영역에서의 정보의 국소화는 점점 더 힘들어진다. 이것의 반대 현상, 즉 주파수영역에서 국소화가 시간영역에서의 국소

화를 억제하는 현상도 성립한다. 이러한 원리는 단순히 웨이블릿 변환 뿐만 아니라 실제 물리 현상에도 적용되는데, 이것을 Heisenberg의 불확정성 원리라고 한다.

지금까지의 논의에서 알 수 있듯이 시간과 주파수영역에서 동시에 정보의 완벽한 국소화가 불가능하므로 균형적인 조화가 필요하다. 웨이블릿 변환의 경우, 시간 정보의 국소화가 주파수 영역의 국소화에 비해 선호된다. 그 이유는 시간 정보의 국소화는 좁은 유한지지영역을 갖는 웨이블릿 함수에 대응하는 짧은 유한필터 h_n 과 g_n 이 웨이블릿 변환(그림 3)과 역변환(그림 4)에 사용된 것을 의미한다. 따라서 이를 통해 웨이블릿 변환의 계산속도를 향상시킬 수 있다. 반면에 Heisenberg의 불확정성 원리에 의해 시간영역에서 좁은 유한지지영역을 갖는 함수는 주파수영역에서는 넓게 퍼져서 존재 할 수밖에 없으며, 또한 그러한 함수의 평탄성은 그리 좋지 않다는 것이다. 앞 절에서도 지적하였듯이 식 (3)에서 f 에 대한 빠른 접근을 얻기 위해서 구성단위인 $\psi_{k,j}$ (즉, ψ)가 어느 정도의 평탄성을 가져야 한다. 한편 식 (3)에서 f 에 대한 빠른 접근을 위해 무작정 많은 평탄성을 갖는 ψ 를 사용하는 것은 여러 가지 이유로 효율적이지 못하다. 접근대상인 f 가 갖고 있는 평탄성보다 더 많은 평탄성을 갖는 $\psi_{k,j}$ 는 모두 동일한 접근 속도를 가지므로 무작정 많은 평탄성을 갖는 ψ 를 사용함으로써 얻는 이익은 없다⁽¹⁰⁾. 또한, 많은 평탄성을 갖는 웨이블릿 함수는 넓은 지지영역을 가지므로 웨이블릿 변환의 계산을 느리게 한다. 이러한 사실들을 종합하여 다음과 같은 결론을 유도할 수 있다: 좁은 유한지지영역을 갖는 함수 ψ (즉, 짧은 유한필터 h_n 과 g_n)를 웨이블릿 변환에 사용하는 것은 시간영역에서의 국소화된 정보의 추출과 빠른 계산을 가능케 하지만 지나치게 좁은 유한지지영역을 갖는 함수 ψ 는 $\psi_{k,j}$ 가 너무 적은 평탄성을 갖게 함으로써 식 (5)에서 f 에 너무 느린 접근만을 허용할 위험이 있다. 그러므로 웨이블릿 함수의 선정은 웨이블릿 변환의 적용대상에 따라 결정되어야 한다. 일반적으로 신호의 처리속도와 국소화가 중

요한 경우에는 좁은 유한지지영역을 갖는 웨이블릿 함수를, 빠른 원신호에 대한 접근이 강조되는 응용문제에서는 넓은 유한지지영역을 갖는, 그래서 $\psi_{k,j}$ 가 필요한 만큼의 평탄성을 갖는 웨이블릿 함수를 권한다.

주어진 신호의 평탄성을 그 신호의 웨이블릿 변환결과를 분석함으로써 정확히 추정할 수 있다는 것은 웨이블릿 변환의 큰 장점이다. 비슷한 사실은 푸리에 변환에서도 존재한다. 주어진 신호 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 에 대한 FFT 결과를 $(F_0, F_1, \dots, F_{N/2})$ 라 하자. 푸리에 변환에서는 주파수 n 에 따라 $|F_n|$ 이 감소하는 속도를 보고 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 의 평탄성을 추정할 수 있다. 빨리 감소하면 할수록 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 가 많은 평탄성을 갖는다. 그런데, 이 결과는 뒤에 설명할 웨이블릿 변환에 비해 그 유용성이 제한적이다. 그 이유는 신호의 급격한 변화는 모든 주파수 대역으로 전파되므로 $(F_0, F_1, \dots, F_{N/2})$ 를 통해 분석하기 힘들며, 또한 국소적으로 고립된 불연속의 존재는 FFT를 통한 원신호의 접근속도를 심각하게 저하시킨다. 예를 들면, $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, $f_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ 인 이산신호는 간단한 계산에 의해

$$f_n = \frac{1}{N}(F_1 e^{2\pi i n/N} + F_1^* e^{-2\pi i n/N}),$$

즉, 원신호의 모든 정보는 F_1 에 집중되었음을 알 수 있다. 이렇게 빠른 접근 속도는 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 에 불연속점을 첨가한 경우, 가령,

$$g_n = \begin{cases} f_n, & n=0, 1, \dots, N/2-1, \\ f_{n+1}, & n=N/2, N/2+1, \dots, N-1, \end{cases}$$

로 정의된 이산신호 $(g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$ 의 FFT를 $(G_0, G_1, \dots, G_{N/2})$ 라 하면, 신호 중간에 존재하는 불연속점에 의해 $(g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$ 의 정보가 많은 G_n 으로 퍼져 나가기 때문에, 더 이상 만족스런 접근속도를 기대할 수 없다. 하지만 웨이블릿 변환은 이산신호 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 의 중간에 첨가된 불연속점은 오로지 $\psi_{k,j}$ 의 지지영역이 $t=1/2$ 을 포함하

는 경우에만 $\langle f, \psi_{k,j} \rangle$ 의 결과가 변화하게 한다. (여기서 f 는 이산신호 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 에 대해 식 (6)을 만족하는 연속신호이다.) 이는 역으로 웨이블릿 변환 결과 $\langle f, \psi_{k,j} \rangle$ 의 관찰을 통해 불연속점의 위치, 크기 등의 추정이 FFT를 이용한 경우에 비해 우수하다는 것을 의미한다.

5. 응용 : 신호에서의 잡음제거

잡음제거 문제의 일반적 형태는 잡음 z_i 에 오염된 관측값 y_i , 즉,

$$y_i = f_i + z_i, \quad i=0, 1, \dots, N-1$$

에서 f_i 를 추정하는 것이다. 푸리에 변환을 이용한 잡음제거의 핵심 이론은 잡음 $(z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ 는 모든 주파수 대역에 골고루 퍼지는 반면, 원신호 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 의 정보는 낮은 주파수 대역에 집중된다는 것이다. 따라서 푸리에 변환을 이용한 잡음제거의 방법은 자연스럽게 다음 3단계를 따른다: 첫째, 관측된 신호 $(y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ 의 FFT 적용결과 $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{N/2})$ 을 계산한다. 둘째, 각각의 Y_n 에 가중치 w_n 을 곱한다. 여기서 가중치 필터(weight filter) (w_n)은 $0 \leq w_n \leq 1$ 을 만족하며, $n \rightarrow \infty$ 에 따라 $w_n \rightarrow 0$ 이다. 셋째, 역 FFT를 적용하여 잡음이 현저히 제거된 신호 $(\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{N-1})$ 를 얻는다. 이를 그림 5로 도식화하였다. 여기서 WF는 가중치 필터링(weight filtering)을, IFFT는 FFT의 역변환(Inverse FFT)을 의미한다.

주파수대역에서의 가중치를 적용한 필터링의 문제점은 가중치 필터 $(w_0, w_1, \dots, w_{N/2})$ 자체를 미리 정해야 한다는데 있다. 즉, Y_n 의 값에는 상관없이 낮은 주파수 n 에 대해

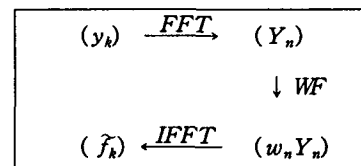


그림 5 가중치 필터링을 이용한 잡음제거 알고리즘

서는 1에 가까운 w_n 을 가중치로 취함으로써 이를 정보로 인정하고, 높은 주파수 n 에 대해서는 0에 가까운 w_n 을 가중치로 취함으로써 이를 잡음으로 여기는 방법이다. 이러한 잡음제거 방법은 짧은 시간내에 존재했다 사라지는 신호의 분석에 많은 문제를 일으킨다. 왜냐하면 그러한 급격히 변화하는 신호의 정보는 높은 주파수 대역에 많이 퍼져 있기 때문이다.

웨이블릿 변환을 이용한 잡음제거는 잡음은 각 웨이블릿 계수로 골고루 퍼진다는 사실과 추정하고자 하는 정보는 적은 숫자의 웨이블릿 계수로 집중된다는 것이다. 이러한 사실을 이용하여 Donoho와 Johnstone은 소위 웨이블릿 축소(Wavelet Shrinkage)를 잡음제거의 한 방법으로 제안하였는데, 이는 다음 3 단계를 따른다: 첫째, 관측된 신호 $(y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ 에 웨이블릿 변환을 적용하여 $(\langle y, \phi_{k,j} \rangle)$ 를 계산한다. 여기서 $y = \langle y, \phi_{m,l} \rangle = y_l$ 을 만족하는 연속신호이다. 둘째, 각각의 $\langle y, \phi_{k,j} \rangle$ 를 정해진 계수 $\mu > 0$ 에 따라 축소시킨다. 즉, 축소 작용소 S_μ 는

$$S_\mu(x) = \begin{cases} x - \mu, & x > \mu, \\ 0, & |x| < \mu, \\ x + \mu, & x < -\mu, \end{cases}$$

와 같이 정의되는데, 이를 이용하여 각각의 $\langle y, \phi_{k,j} \rangle$ 를 축소시킨다. 셋째, 역 웨이블릿 변환을 적용하여 잡음이 현저히 제거된 신호 $(\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{N-1})$ 를 얻는다. 이를 그림 6과 같이 도식화 하였다. 여기서 WT , IWT , WS 는 각각 웨이블릿 변환과 그 역변환을, 그리고 웨이블릿 축소를 의미한다.

얼마만큼의 양을 계수 μ 로 사용하여야 하는가에 대해 많은 논란이 있어왔다. Donoho와 Johnstone은 웨이블릿 shrinkage를 잡음제거의 방법을 처음으로 제시한 논문⁽¹¹⁾에서

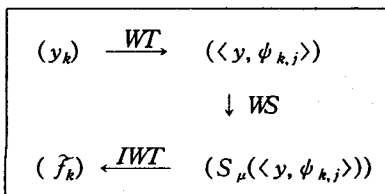


그림 6 웨이블릿 축소를 이용한 잡음제거 알고리즘

$\mu = \sqrt{2 \log N} \sigma$ 를 웨이블릿 축소 계수로 제안하였다. 여기서 σ 는 잡음이 평균이 0인 정규분포를 따른다고 가정할 때의 잡음강도이다. 하지만 Donoho와 Johnstone이 처음 제시한 계수는 실제 응용문제에 사용하기에는 너무 크다는 비판을 있어왔다^(12,13). 즉, 너무 큰 μ 를 사용하여 비록 잡음제거에서는 좋은 결과를 얻지만 웨이블릿 축소에서 발생하는 정보의 손실이 커서, 결과적으로 좋지 않은 결과에 얻는 경우가 많다. 반대로 작은 μ 를 사용한다면 웨이블릿 축소에서 발생하는 정보의 손실을 줄일 수 있지만 잡음제거의 효과가 줄어들 것이다. 따라서, 평탄성이 큰 신호일수록 같은 μ 를 이용한 웨이블릿 축소에 따른 정보의 손실이 적기 때문에, 최적의 잡음제거 결과를 얻기 위해서는 μ 의 값을 결정하는데 있어서 잡음강도 σ 외에도 잡음을 제거해 복원하고자 하는 원신호 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 의 평탄성도 고려하여야 한다⁽¹³⁾.

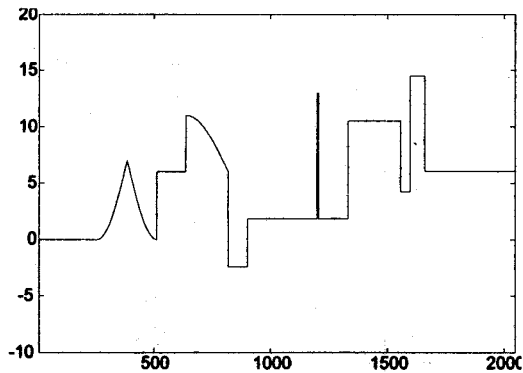


그림 7 원신호

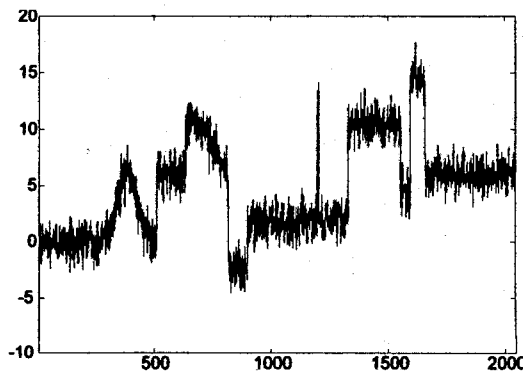


그림 8 잡음이 섞인 신호

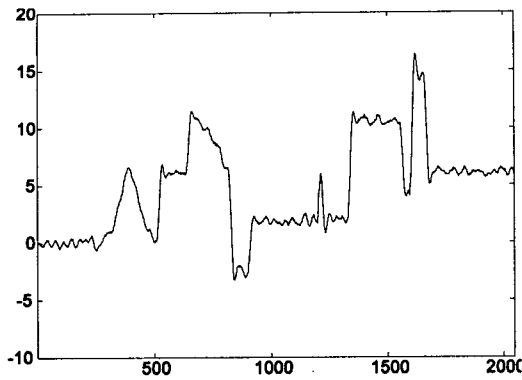


그림 9 푸리에 변환에 기초한 잡음제거

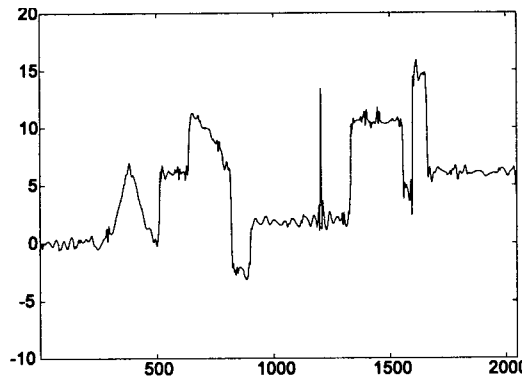


그림 10 웨이블릿 축소에 기초한 잡음제거

그림 7~19은 일차원 신호에서 잡음을 제거하는 실험의 결과이다. 그림 7은 원신호, 그림 8은 잡음이 섞인 신호로, 이것으로부터 그림 9와 그림 10의 잡음제거 실험을 하였다. 그림 9의 결과는 푸리에 변환을 기초로 가중치 필터링을 한 경우로 어느 정도의 잡음제거를 위해서는 빠르게 감소하는 가중치 필터 w_n , 즉, n 이 커감에 따라 빠르게 w_n 이 0으로 수렴하는 필터를 사용해야 했다. 그러므로 이로 인한 고주파 정보의 손상은 피할 수 없었다. 이에 비해 웨이블릿 축소를 사용한 그림 10의 경우에는 상당한 정도의 잡음제거를 원신호의 고주파 정보의 손실 없이 얻어냈다.

6. 맺음 말

이 글은 공학의 많은 분야에서 새로운 신호처리 도구로써 자리잡은 웨이블릿 변환에 대해 대략적인 소개를 하였다. 웨이블릿 변

환은 푸리에 변환에 비해 그 처리 속도가 빠르고, 원신호에 빠르게 접근하며, 또한 신호의 평탄성을 잘 분석하는 등 여러 우수한 특성을 가지고 있다. 그러나 웨이블릿 변환이 신호처리분야에서 푸리에 변환을 완전히 교체하지는 못할 것이다. 푸리에 변환은 여러 물리현상을 설명하는 중요한 도구이며, 특히 시불변 선형시스템의 분석을 위해서는 필수적이다. 푸리에 변환과 웨이블릿 변환의 서로의 장·단점을 잘 파악하고 주어진 신호처리 문제에 적합한 방법을 쓰는 것이 좋은 결과를 얻기 위한 첫걸음일 것이다.

참고 문헌

- (1) Calderon, A. P., 1964, "Intermediate Spaces and Interpolation, the Complex Method", Stud. Math., 24, pp. 113~190.
- (2) Aslaksen, E. and Klauder, J., 1968, "Unitary Representations of the Affine Group", J. Math. Phys., 9, pp. 206~211.
- (3) Esteban, D. and Galand, C., 1977, "Application of Quadrature Mirror Filters to Split-Band Voice Coding Schemes, Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Signal Speech Process., Hartford, Connecticut, pp. 191~195.
- (4) Daubechies, I., 1988, "Orthonormal Basis of Compactly Supported Wavelets", Comp. Pure Appl. Math., 46, pp. 909~996.
- (5) Daubechies, I., 1990, "The Wavelet Transform, Time - Frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Transactions on Information Theory, 36, pp. 961~1005.
- (6) Mallat, S., 1989, "Multiresolution Approximation and Wavelets", Trans. Amer. Math. Soc., 315, pp. 69~88.
- (7) Rosenfeld, A. and Kak, A., 1982, "Digital Picture Processing 1", Academic Press.
- (8) Daubechies, I., 1992, "Ten Lectures on Wavelets", CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 91, SIAM Philadelphia.
- (9) Mallat, S., 1998, "A Wavelet Tour of Signal Processing", Academic Press.

(10) DeVore, R., Jawerth, B. and Lucier, B., 1992, "Image Compression through Wavelet Transform Coding", IEEE Transactions on Information Theory, Special Issue on Wavelet Transforms and Multiresolution Analysis, 38-2, pp. 719~746.

(11) Donoho, D. and Johnstone, I., 1994, "Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage", Biometrika, 81, pp 425~455.

(12) Donoho, D. and Johnstone, I., 1995,

"Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage", J. Amer. Statist. Assoc., 90, pp. 1200~1224.

(13) Chambolle, A., DeVore, R., Lee, N.-Y. and Lucier, B., 1998, "Nonlinear Wavelet Image Processing: Variational Problems, Compression, and Noise Removal through Wavelet Shrinkage", IEEE Transactions on Image Processing, 7-3, pp. 319~335.

NOVEM 2000

Noise & Vibration Pre-Design
and Characterisation Using Energy Method

Lyon Congress Center
31 August ~ 2 September 2000

Call for Paper

E-Mail : novem@lva.insa-lyon.fr
<http://lva.insa-lyon.fr/novem2000>