

〈논 문〉

# 비선형성을 고려한 탄성 다공성 재질의 음향학적 모델링

## Nonlinear Acoustical Modeling of Poroelastic Materials.

김진섭\* · 이수일\*\* · 강연준\*\*\*

Jin-seop Kim, Soo-il Lee and Yeon June Kang

(1999년 9월 3일 접수 : 1999년 11월 16일 심사완료)

**Key Words** : Poroelastic Materials(탄성 다공성 물질), Extended Biot's Semilinear Model(확장된 Biot의 선형 모델), Nonlinear Wave Equation(비선형 파동 방정식), Nonlinear Wave Numbers(비선형 파수)

### ABSTRACT

In this paper, the extended Biot's semilinear model was developed. Combining the extended Biot model with the dynamic equation yields the nonlinear wave equation in poroelastic sound absorbing materials. Both perturbation and matching techniques are used to find solutions for nonlinear wave equations. By comparing results between linear and nonlinear wave solutions, characteristics of nonlinear waves in poroelastic sound absorbing materials have been studied. Nonlinear waves were found to be attenuated faster than the linear ones. A maximum amplitude of the nonlinear wave occurred near its surface boundaries and decay quickly with distance from the surface. It has also been found that, if the amplitudes of linear waves are known at the surface boundaries, those of nonlinear ones can be determined. This will be the basis of finding effects of nonlinearity on the absorption coefficient and the transmission loss.

### 1. 서 론

최근에 소음에 대한 관심과 소음 저감에 대한 욕구가 커지면서 소음 제어에 대한 관심 또한 증대되어 왔다. 일반적인 소음 제어 방법으로는 차음, 흡음 처리와 같은 수동 소음 제어와 1차 발생 소음에 반대 위상의 2차 제어 소음으로 전체 소음을 제거하는 능동 소음 제어 방법이 있다. 능동 소음 제어의 경우는 보통 복잡한 추가의 장치 등이 필요하여 제어 비용이 상승하고, 불규칙 소음과 같이 광대역 주파

수의 소음의 제어에는 적용이 어렵기 때문에, 실제로 자동차, 항공기 및 가전 제품 등에는 차음, 흡음재 처리와 같은 수동 소음 제어 방법이 널리 사용된다.

이 중 수동 소음 제어에 사용되는 대표적인 흡음재로는 폴리우레탄(polyurethane)이나 폴리이미드(polyimide) 같은 탄성 다공성 물질(elastic porous material)이 있으며 이러한 다공성 흡음재 폼(foam)에 대한 연구는 제품의 저소음화에 대한 공학적 요구에 따라 최근에 다시 활발해지고 있다. 그러나 이에 대한 해석적인 연구는 대부분 다공성 물질이 선형적 거동을 보이는 범위에서의 이론적, 실험적 연구로 다공성 물질의 음향학적 비선형 거동과 관련된 부분에는 큰 진전이 없었다. 토양이나 암석 같은 자연계의 다공성 물질의 경우 비선형적인 특성을 보인다는 것이 실험적으로 관찰되어 왔으며, 어떤 경우

\* 정회원, 서울대학교 대학원 기계공학부

\*\* 정회원, 삼성전자 정보가전총괄

\*\*\* 정회원, 서울대학교 공과대학 기계항공공학부

에는 비선형 탄성 특성이 비다공성 물질(non-porous material)보다 수십 배 또는 수천 배나 더 큰 것으로 알려져 있다<sup>(1)</sup>. 또한 기계 발생 소음 중 자동차 머플러의 경우 내부에서는 음압 레벨이 170 dB정도 까지 이르는데, 이러한 높은 음압 하에서는 다공성 물질의 비선형성이 흡음 성능에 지대한 영향을 미친다고 알려져 있다<sup>(2)</sup>.

실제로 탄성 다공성 물질의 역학적 모델로서 공학적 타당성을 갖는 모델은 M. A. Biot<sup>(3-5)</sup>에 의해서 발표된 Biot의 탄성 다공성 물질 모델로 다공성 물질의 정적, 동적 거동을 가장 정확하게 기술함이 입증되었다. 원래의 Biot의 다공성 물질 모델은 비선형(nonlinear) 혹은 준선형(semi-linear) 모델로 Bolton 등<sup>(6)</sup>의 기존의 접근에서는 Biot의 선형화된 모델을 바탕으로 탄성 다공 물질 흡음재를 포함하는 패널 구조물의 투과 손실에 대한 해석을 수행하고 그 결과를 실험적으로 검증하였다.

한편 Donskoy 등<sup>(7)</sup>은 Biot의 모델을 기본으로 하여 실제 현상에 더욱 가까운 비선형 파동 방정식을 유도하고 측정 가능한 변수와 다공성 물질의 물리적 특성들과의 관계를 밝히려고 시도하였다.

Norris 등<sup>(8)</sup>은 비선형 구성 방정식을 유도하였으며 선형에서의 파동 방정식의 해를 구하였다. 그러나 위의 연구들은 대체로 일반적인 다공성 물질에 대한 연구로 토양이나 암석과 같은 지질학적 모델의 탐사와 관련해 연구가 진행되었고<sup>(1,9)</sup>, 흡음재와 같이 소음 제어용 재질에 대한 비선형 음향 특성 연구는 아직 미비한 상태이다.

따라서, 본 논문에서는 Biot의 준선형(semilinear) 모델을 바탕으로 기존의 선형 모델과의 비교를 위하여 음향학적으로 접근하기 용이한 형태로 확장, 변형시켜 비선형 파동 방정식을 유도하였다. 즉 비선형 파동 방정식을 가장 간단한 1차원 음파 전파 과정에 대하여 유도하고, 선형 해의 2차 결합으로 비선형 해를 가정하여 각 차수별로 계수를 비교하여 해를 구하고 흡음재 내부에서 비선형 특성에 의한 고차 음파의 발생 및 전달 특성을 파악하였다.

## 2. 확장된 Biot 모델

보통의 탄성 다공성 물질에서 나타나는 비선형적 특성은 다음과 같은 세 가지 종류로 구분할 수 있다. 첫째, 응력과 유한 변형률과의 관계에 기인한 구성 방정식에서의 물리적 비선형, 둘째, 연속 방정식 또는 운동량 방정식 등에 나타나는 비선형, 셋째, 변

위와 유한 변형률과의 관계에 의한 기하학적 비선형이 그것이다. 본 연구에서는 다공성 물질에서 가장 많은 비중을 차지한다고 알려진 물리적 비선형성만을 고려하였다<sup>(8)</sup>.

Biot의 비선형 응력-변형률 관계식은 다음과 같다<sup>(5)</sup>.

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(\lambda \varepsilon - \alpha p) + \frac{\partial H}{\partial \bar{\varepsilon}_{ij}}, \quad (1)$$

$$\zeta = \alpha \varepsilon + \frac{1}{M} p - \beta \delta_{ij} \frac{\partial H}{\partial \bar{\varepsilon}_{ij}}. \quad (2)$$

여기에서  $\tau_{ij}$ 는 탄성 다공성 재료의 전체 응력을 의미하며,  $p$ 는 유체상의 압력을,  $\delta_{ij}$ 는 크로네커의 델타(Kronecker delta),  $\mu$ 는 고체상의 전단 계수,  $\lambda$ 는 라메 상수(Lame constant),  $\alpha$ ,  $M$ 은 Biot상수,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{ij}$ 는 각각 유체의 압력을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 고체상의 변형률을 의미하며,  $\beta$ 는 유체상의 유연성 상수,  $\zeta$ 는 고체상에 대한 유체상의 상대적인 체적 변형률을 뜻한다. 그리고 식 (1), (2)에서  $\varepsilon$ 은 고체상의 체적 변형률을 의미하는데, 식 (3) 이하에서는 다른 의미로 사용됨에 주목할 필요가 있다. 각 상수들과 변수들의 자세한 표현은 부록에 설명되어 있다. 그리고  $H$ 는 탄성 에너지 불변량으로 부록과 아래에 자세히 설명되어 있다.

한편, Bolton 등<sup>(6)</sup>은 탄성 다공성 재질에 대한 선형 구성 방정식을 아래와 같은 표현식으로 사용하였다.

$$\sigma_{ij} = 2N e_{ij} + A \delta_{ij} e + Q \delta_{ij} \varepsilon, \quad (3)$$

$$s = Q e + R \varepsilon. \quad (4)$$

여기에서  $\sigma_{ij}$ ,  $s$ 는 각각 고체상과 유체상에 작용하는 응력,  $N$ ,  $A$ 는 각각  $\mu$ ,  $\lambda$ 와 같은 의미를 가지며,  $e_{ij}$ 는 고체상의 변형률,  $e$ ,  $\varepsilon$ 는 각각 고체상과 유체상의 체적 변형률을 의미한다. 여기에서의  $\varepsilon$ 은 식 (1), (2)에서의 그것과 의미가 다르며, 이하에서는 식 (3), (4)에서 사용된 것과 같은 의미를 가진다. 그리고  $Q$ 는 고체상과 유체상의 체적의 연성과 관계되는 체적 연성 계수,  $R$ 은 유체상의 응력과 변형률의 연결하는 상수를 의미한다. 각 상수들과 변수들의 자세한 표현 역시 부록에 설명되어 있다.

흡음재의 음향학적 특성을 연구함에 있어서 우선은 기존의 선형 모델과의 비교를 위하여 선형 모델을 바탕으로 비선형 전개를 하는 것이 일반적이다.

따라서 본 연구에서는 식 (1)과 (2)를 식 (3)과 (4)와 같이 변경한 식을 사용하여 Bolton 등<sup>(6)</sup>의 선형 모델과의 비교를 용이하게 하였다. 또한 Biot는 이미 선형 식에서  $\alpha$ ,  $M$ 과  $Q$ ,  $R$ 과 같은 계수를 사용하여 각각의 모델을 제안하고, 이 두 모델의 등가성과 각각의 상수들의 관계를 보인 바 있다<sup>(4)</sup>. 이러한 사실로부터 본 논문에서는 확장된 Biot 모델로 다음과 같은 식을 제안하였다.

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}(Ae + Q\varepsilon) + \frac{\partial H}{\partial \bar{e}_{ij}}(1 - \delta_{ij}\beta \frac{Q}{f}), \quad (5)$$

$$s = Qe + R\varepsilon - \delta_{ij}\beta \frac{R}{f} \frac{\partial H}{\partial \bar{e}_{ij}}. \quad (6)$$

여기서  $\bar{e}_{ij}$ ,  $e_{ij}$ 는 각각 유체의 압력을 고려하지 않은 경우와 유체의 압력을 고려한 경우의 고체상의 변형률을 의미하고, 이들은 유체상의 유연성 상수 (compliance constant)  $\beta$ 와 공극률  $f$ 로 표현할 수 있다<sup>(5,7)</sup>.

$$e_{ij} = \bar{e}_{ij} - \delta_{ij}\beta p = \bar{e}_{ij} + \delta_{ij} \frac{\beta}{f} s. \quad (7)$$

또한,  $H$ 는 탄성 에너지 불변량으로서, Biot가 제시한 바와 같이 비선형 상수(nonlinear coefficients)인  $D$ ,  $F$ ,  $G$ 와 변형률 불변량(strain invariant)  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$ ,  $\bar{I}_3$ 을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다<sup>(5)</sup>.

$$H = D\bar{U} + F\bar{B} + G\bar{I}_3, \quad (8)$$

여기서  $\bar{U}$ ,  $\bar{B}$ 등은 변형률 불변량(strain invariant)  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$ ,  $\bar{I}_3$ 의 함수로, 역시 부록에 정의하였다. 그리고 구성 방정식에서 비선형성을 나타내는 미분항은 탄성 에너지 불변량  $H$ 의 변화율로서 아래와 같이 표현할 수 있다<sup>(7)</sup>.

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{e}_{ij}} = F\delta_{ij}\bar{I}_1^2 - (F-D)(\bar{I}_1\bar{e}_{ij} - \delta_{ij}\bar{I}_2) + (D-3F+G) \text{cof}(\bar{e}_{ij}). \quad (9)$$

식 (5), (6)에서 각각 선형 부분과 비선형 부분을 다음과 같이 분리한 후,

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma''_{ij}, \quad s = s' + s'' \quad (10)$$

유체상의 응력에서 선형 부분인  $s'$ 을 각각의 비선형 부분에 대입함으로써 아래와 같이 방정식 간의 연성

항의 처리가 가능하다.

$$\sigma'_{ij} = 2Ne_{ij} + \delta_{ij}(Ae + Q\varepsilon),$$

$$\sigma''_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \bar{e}_{ij}} \Big|_{s=s'} (1 - \delta_{ij}\beta \frac{Q}{f}),$$

$$s' = Qe + R\varepsilon,$$

$$s'' = -\delta_{ij}\beta \frac{R}{f} \frac{\partial H}{\partial \bar{e}_{ij}} \Big|_{s=s'}. \quad (11)$$

위에서 얻어진 식 (10)을 다음의 운동 지배 방정식 (12)에 대입하면 탄성 다공성 재질에 대한 비선형 파동 방정식이 얻어진다<sup>(6)</sup>.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho_1 \ddot{u}_i + \rho_a (\ddot{u}_i - \ddot{U}_i) + b(\dot{u}_i - \dot{U}_i),$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \rho_2 \dot{U}_i + \rho_a (\dot{U}_i - \dot{u}_i) + b(\dot{U}_i - \dot{u}_i) \quad (12)$$

### 3. 일차원 비선형 파동 방정식

위의 모델의 적용성을 검증하기 위하여 이 장에서는 일차원 파동으로 가정하고, 유체의 점성에 의한 영향은 무시하였다. 이제  $u$ 와  $U$ 를 각각 고체상과 유체상의 변위라고 할 때, 식 (10)은 2개의 연성된 2차 비선형 편미분 방정식이 된다. 식 (10), (11)을 식 (12)에 대입하면 다음과 같은 고체상, 유체상 각각에 대한 일차원 비선형 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$(2N+A)u_{xx} + QU_{xx} = \rho_1 u_{tt} + \rho_a (u_{tt} - U_{tt}) - N_1(u_x, u_{xx}, U_x, U_{xx}),$$

$$Qu_{xx} + RU_{xx} = \rho_2 U_{tt} + \rho_a (U_{tt} - u_{tt}) - N_2(u_x, u_{xx}, U_x, U_{xx}). \quad (13)$$

여기서, 하첨자  $x$ ,  $t$ 는 각각 변위와 시간에 대한 편미분을 의미하고,  $N_1$ ,  $N_2$ 는 비선형 함수로 앞에서 정의한 것과 같이 유체의 점성을 무시하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$N_1 = c_{11}u_x u_{xx} + c_{12}u_x U_{xx} + d_{11}U_x u_{xx} + d_{12}U_x U_{xx},$$

$$N_2 = c_{21}u_x u_{xx} + c_{22}u_x U_{xx} + d_{21}U_x u_{xx} + d_{22}U_x U_{xx}. \quad (14)$$

여기서  $c_{ij}$ ,  $d_{ij}$ 는 비선형 함수의 계수들로  $\beta/f \equiv c$ ,  $D+2F \equiv P$ ,  $D+6F+G \equiv K$ 라고 정의하면 다음과

같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2(1-cQ)(D-2cQP+c^2Q^2K), \\ c_{12} &= 2cR(1-cQ)(-P+cQK), \\ d_{11} &= c_{12}, d_{12} = 2c^2R^2K(1-cQ), \\ c_{21} &= -2cR(D-2cQP+c^2Q^2K), \\ c_{22} &= -2c^2R^2(-P+cQK), \\ d_{21} &= c_{22}, d_{22} = -2c^3R^3K. \end{aligned} \quad (15)$$

또한 다음과 같이 변위와 계수들에 대한 행렬을 정의하면,

$$v = [u \ U]^T, \quad C = [c_{ij}], \quad D = [d_{ij}],$$

편미분 방정식의 선형 및 비선형 부분은 다음과 같은 선형 및 비선형 연산자 (linear and nonlinear operator)를 이용하여 표현할 수 있다.

$$L[v] = [A(\frac{\partial^2}{\partial x^2}) - R(\frac{\partial^2}{\partial t^2})]v, \quad (16)$$

$$N[v] = [Cu_x + DU_x]v_{xx}. \quad (17)$$

여기에서 행렬  $A, R$ 의 정의는 다음과 같고,

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & Q \\ Q & R \end{bmatrix},$$

$$R = [r_{ij}] = \begin{bmatrix} \rho_1 + \rho_a & -\rho_a \\ -\rho_a & \rho_2 + \rho_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{bmatrix},$$

위의 선형과 비선형 연산자를 사용하여 비선형 편미분 방정식을 간략하게 표현하면 다음과 같다.

$$L[v] + N[v] = 0. \quad (18)$$

#### 4. 파동 방정식의 해

앞 장에서 유도한 비선형 미분 방정식의 해를 구하는 과정은 Donskoy 등<sup>(7)</sup>의 방법과 같이 섭동 (perturbation)과 적합(matching)을 이용하였다. 먼저 방정식의 선형 부분의 해를 구하기 위해 해를  $v = v \exp[i(\omega t - kx)]$ 의 형태로 가정하면, 선형 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$L[v] = (\omega^2 R - k^2 A)v = 0. \quad (19)$$

위 방정식의 특성 방정식은 아래와 같고,

$$\begin{aligned} (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\omega^4 - (\rho_{22}\lambda_c + R\rho_{11} + 2Q\rho_{12})\omega^2 k^2 \\ + (\lambda_c R - Q^2)k^4 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $\lambda_c = 2\mu + \lambda$ 이다. 이 특성 방정식의 두 근을  $k_1, k_2$ 라고 하면 선형 방정식의 해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v_L(x, t) = a_1 v_1 + a_2 v_2. \quad (21)$$

여기서  $a_1 = [a_1, a_3]^T, a_2 = [a_2, a_4]^T$ 과  $v_1 = \exp[i(\omega t - k_1 x)], v_2 = \exp[i(\omega t - k_2 x)]$ 를 나타낸다. 다음으로, 비선형 해를 구하기 위해 섭동(perturbation) 방법과 적합(matching) 방법을 이용한다. 일반적으로 음향학에서는 상속도(phase speed)가 음압의 섭동량에 선형적으로 의존하도록 하기 위하여 2차 비선형성을 주로 다루는데<sup>(10)</sup>, 여기에서도 비선형 해를 다음과 같은 저변화 진폭(slowly varying amplitudes)의 2차 조화성분 파동해로 가정하였다<sup>(7)</sup>.

$$v_N(x, t) = b_1(x)v_1^2 + b_2(x)v_2^2 + b_3(x)v_1v_2. \quad (22)$$

여기서 각 계수들  $b_j(x) (j=1, 2, 3)$ 은  $x$ 의 함수로서 다음과 같이 표현되며, 이하의 해석 과정으로부터 결정될 수 있다.

$$b_j(x) = \begin{bmatrix} b_j(x) \\ b_{j+3}(x) \end{bmatrix} \quad (j=1, 2, 3) \quad (23)$$

그러면 전체 해는  $v = v_L + v_N$ 로 표현되고, 다음과 같이 일종의 선형-비선형 적합(matching) 방법을 통하여 효과적으로 비선형 해의 진폭 함수들을 결정할 수 있다.

$$L[v_N] + N[v_L] = 0. \quad (24)$$

위 식 (24)에서  $v_1^2, v_2^2$ 와  $v_1v_2$ 의 계수들을 비교하면  $b_j (j=1, 2, 3)$ 에 대한 2차 상미분 방정식을 얻을 수 있다. 그러나 앞에서와 같이 진폭 함수들의 저변화 진폭(slowly varying amplitudes)을 가정하면,  $b_j (j=1, 2, 3)$ 의 2차 미분항들은 무시할 수 있기 때문에 2차 미분 방정식들은 다음과 같이  $b_j (j=1, 2, 3)$ 에 대한 1차 상미분 방정식으로 변환된다.

$$\begin{aligned} b_1'(x) &= \frac{A^{-1}}{ik_1} (\omega^2 R - k_1^2 A) b_1(x) \\ &\quad + (k_1^2/4) A^{-1} (a_1 C + a_3 D) a_1. \end{aligned} \quad (25)$$

$$b_2'(x) = \frac{A^{-1}}{ik_2} (\omega^2 R - k_2^2 A) b_2(x) + (k_2^2/4) A^{-1} (a_2 C + a_4 D) a_2, \quad (26)$$

$$b_3'(x) = \frac{A^{-1}}{2i(k_1 + k_2)} \{ [4\omega^2 R - (k_1 + k_2)^2 A] b_3(x) + i[k_1^2 k_2 (a_2 C + a_4 D) a_1 + k_1 k_2^2 (a_1 C + a_3 D) a_2] \}. \quad (27)$$

즉, 위 식들을 간략한 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$y'(x) = B y(x) + f, \quad (28)$$

여기서  $B = (b_{ij})$ 는 방정식의 계수 행렬을,  $f = (f_1 \ f_2)^T$ 는 상수 벡터를 의미한다. 위의 식 (25), (26)에 대하여 계수 행렬이 특이(singular)해진다. 즉, 두 개의 고유치중 하나는 0이 되고, 다른 하나는 계수 행렬의 대각합(trace)이 된다. 위 방정식들의 해에서 임의의 상수는  $y(0) = 0$ 를 도입하여 정할 수 있으며, 방정식 (28)의 해는 다음과 같다.

$$y(x) = \frac{1}{\kappa} (b_{22} f_1 - b_{12} f_2) x \xi^{(1)} + \frac{1}{\kappa^2} (b_{11} f_1 + b_{12} f_2) (e^{\kappa x} - 1) \xi^{(2)}. \quad (29)$$

$\xi^{(1)} = [1 - b_{11}/b_{12}]^T$ ,  $\xi^{(2)} = [1 - b_{22}/b_{12}]^T$ 는 각각 고유치 0과  $x = b_{11} + b_{22}$ 에 해당하는 고유 벡터를 의미한다. 그리고 식 (25), (26)에서 행렬  $B$ 의 원소는 아래와 같이 정의된다.

$$b_{11} = -\frac{i}{k} \left[ \frac{\omega^2}{\lambda_c R - Q^2} (\rho_{11} R - \rho_{12} Q) - k^2 \right],$$

$$b_{12} = -\frac{i}{k} \left[ \frac{\omega^2}{\lambda_c R - Q^2} (\rho_{12} R - \rho_{22} Q) \right],$$

$$b_{21} = -\frac{i}{k} \left[ \frac{\omega^2}{\lambda_c R - Q^2} (-\rho_{11} Q + \rho_{12} \lambda_c) \right],$$

$$b_{22} = -\frac{i}{k} \left[ \frac{\omega^2}{\lambda_c R - Q^2} (-\rho_{12} Q + \rho_{22} \lambda_c) - k^2 \right].$$

여기서  $b_1$ 의 경우에는  $k = k_1$ 을,  $b_2$ 의 경우에는  $k = k_2$ 를 대입하면 된다.

$b_1$ 의 경우에 대한 해를 적으면 다음과 같다.

$$b_1(x) = \frac{1}{\kappa} (b_{22} f_1 - b_{12} f_4) x + \frac{1}{\kappa^2} (b_{11} f_1 + b_{12} f_4) (e^{\kappa x} - 1), \quad (30)$$

$$b_4(x) = -\frac{b_{11}}{b_{12}} \frac{1}{\kappa} (b_{22} f_1 - b_{12} f_4) x + \frac{b_{22}}{b_{12}} \frac{1}{\kappa^2} (b_{11} f_1 + b_{12} f_4) (e^{\kappa x} - 1). \quad (31)$$

위의 해에서 상수 벡터는 아래와 같다.

$$f_1 = \frac{k_1^2 R}{2(\lambda_c R - Q^2)} [a_1^2 \{D + cQ(-2P + cKQ)\} + 2a_1 a_3 c(-P + cKQ)R + a_3^2 c^2 K R^2],$$

$$f_4 = \frac{k_1^2 (-Q + c(Q^2 - \lambda_c R))}{2(\lambda_c R - Q^2)} [a_1^2 \{D + cQ(-2P + cKQ)\} + 2a_1 a_3 c(-P + cKQ)R + a_3^2 c^2 K R^2].$$

또한,  $b_2$ 의 경우에 대한 해는 다음과 같다.

$$b_2(x) = \frac{1}{\kappa} (b_{22} f_2 - b_{12} f_5) x + \frac{1}{\kappa^2} (b_{11} f_2 + b_{12} f_5) (e^{\kappa x} - 1), \quad (32)$$

$$b_5(x) = -\frac{b_{11}}{b_{12}} \frac{1}{\kappa} (b_{22} f_2 - b_{12} f_5) x + \frac{b_{22}}{b_{12}} \frac{1}{\kappa^2} (b_{11} f_2 + b_{12} f_5) (e^{\kappa x} - 1). \quad (33)$$

식 (27)에 대한 해도 동일한 방법으로 구할 수 있다.

## 5. 결과 및 토론

위에서의 해석으로부터 흡음재 내부 전달 비선형 파의 진폭은 경계면에서 초기 선형파의 진폭에 따라 결정되는 양임을 알 수 있다. 본 논문에서는 초기 입력을 고체상에서의 선형파의 단위 진폭으로 간단히 가정하고, 실제 소음 제어용 흡음재질에 대한 수치를 적용하여 탄성 다공성 물질 내부의 비선형 파의 특성 해석에 대한 가능성을 제시하였다.

선형 이론에 의한 탄성 다공성 물질의 동적 특성은 밀도, 영(Young)의 계수, 손실 계수(loss factor), 포아송(Poisson)의 비, 공극률(porosity), 유동저항계수(flow resistivity), 그리고 꼬임률(tortuosity) 등의 7가지 파라미터로 기술할 수 있다. 그러나 비선형 이론으로 탄성 다공성 물질의 동적 특성을 나타내기 위해서는 위의 7가지 선형 파라미터 외에 2장에 설명한 바와 같이 추가로  $D, F, G$  등의 비선형 상수가 필요하며, 본 논문에서 적용한 선형/비선형 각 파라미터들의 해당 값은 Table 1에 나타난 것과 같다.

Table 1 Physical parameters in the numerical example

Physical parameter	Value
Density (kg/m <sup>3</sup> )	30
Bulk Young's modulus (Pa)	8 × 10 <sup>5</sup>
Loss factor	0.265
Poisson's ratio	0.3
Tortuosity	7.8
Porosity	0.9
Flow resistivity (mks Rayls/m)	25000
<i>D</i>	3 × 10 <sup>-7</sup>
<i>F</i>	1
<i>G</i>	1

이 중 선형 파라미터는 폴리우레탄 폼에 대하여 잘 알려진 값을 이용하였으며<sup>(6)</sup>, 비선형 상수는 Table 2 와 Fig. 1로부터 적당한 범위를 유추하여 사용하였다<sup>(7)</sup>. 특히 비선형 상수 중에서 *D*가 비선형 특성에 가장 민감한 것이 알려져 있다<sup>(7)</sup>.

또한 섭동 방법을 통하여 얻어진 비선형 파동 해에서 비선형 항이 선형 항의 크기에 비하여 작은 값을 가져야 하는데, 실제로 수치를 대입한 결과에 의하면, 고체상 선형 파의 단위 진폭을 가정하였을 때 두 선형 항의 곱으로 가정한  $v_1 v_2$  항의 진폭은 10<sup>8</sup> - 10<sup>12</sup>의 크기로 물리적으로 합당하지 않은 큰 수치임을 알 수 있다. 따라서 전체 파동 해는 이 항을 무시하고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u(x,t) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + b_1(x) v_1^2 + b_2(x) v_2^2, \quad (34)$$

$$U(x,t) = a_3 v_1 + a_4 v_2 + b_4(x) v_1^2 + b_5(x) v_2^2. \quad (35)$$

여기서 각각의 상수들과 변수들은 앞의 3장에서 정의된 것과 같다.

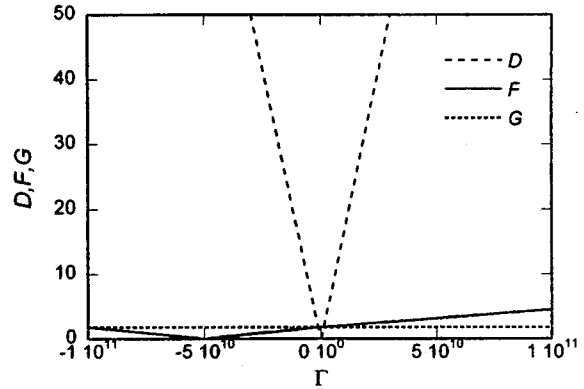


Fig. 1 Dependence of the  $\Gamma$  on the nonlinear parameters *D*, *F*, and *G*. (D.M. Donskoy, et al., JASA, 102(5), 1997)

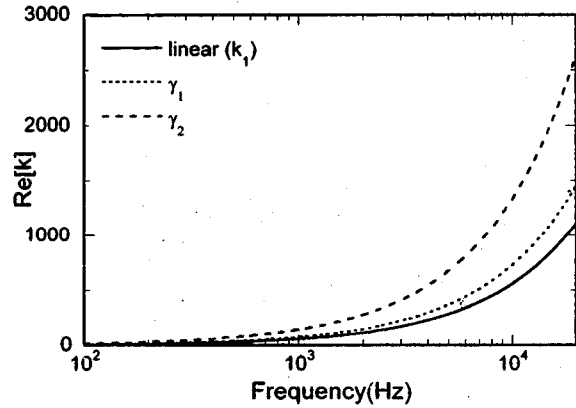


Fig. 2 Real part of wave number

이러한 비선형 파동 해의 특성을 파악하기 위하여 비선형 파의 파수(wave number)를 살펴보면, 선형 파수의 단순히 2배가 되는 것과는 다른, 다음과 같은 형태를 취하는 것이 있음을 알 수 있다.

$$\gamma_1 = 2k_1 + ik_1, \quad \gamma_2 = 2k_2 + ik_2. \quad (36)$$

여기서  $x_1, x_2$ 는 각각 식 (25)와 (26)에서 영이 아닌 값을 갖는 고유치를 의미한다.

Fig. 2와 3은 각각 선형 파수와 식 (36)의 비선형

Table 2 Dependence of  $\Gamma$  on the porosity. (D.M. Donskoy, et al., JASA, 102(5), 1997)

Porosity = 0	0 < Porosity < 1				Porosity = 1
Nonporous solid	Marble	Sandstone and soils	Marine sediments	Foam plastic	Fluids and gases
$\Gamma < 15$	$\Gamma = 800$	$\Gamma = 10^3 - 10^4$	$\Gamma = 10^2 - 10^3$	$\Gamma = 200$	$\Gamma < 10$

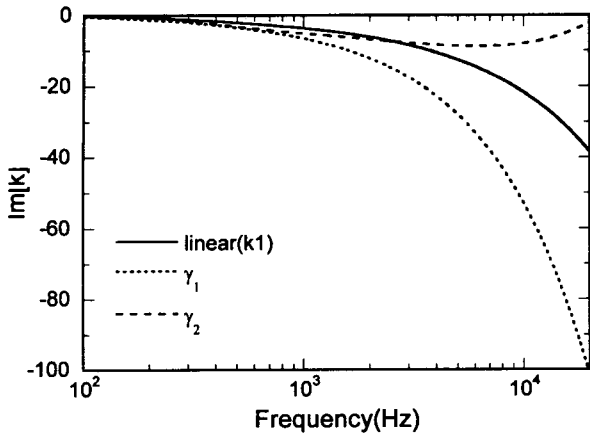


Fig. 3 Imaginary part of wave number

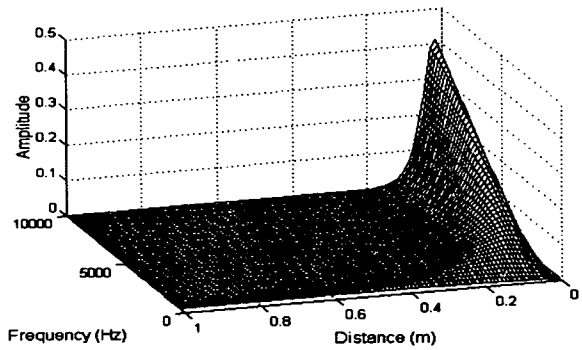


Fig. 4 Amplitude of the first nonlinear wave( 3-D plot)

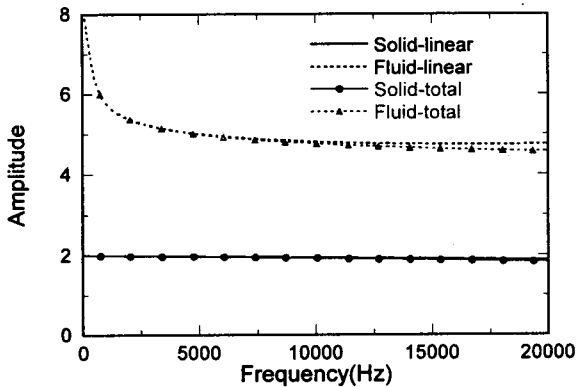


Fig. 5 Comparison of linear waves with the case when considering linear and nonlinear waves (frequency domain)

파수에 대한 실수부와 허수부를 비교한 것으로 파수에서 실수부는 진동(oscillation)을, 허수부는 감쇠(attenuation)를 나타내며, 그림에 의하면 비선형 파가 선형파에 비하여 감쇠가 큼을 알 수 있다. 또한

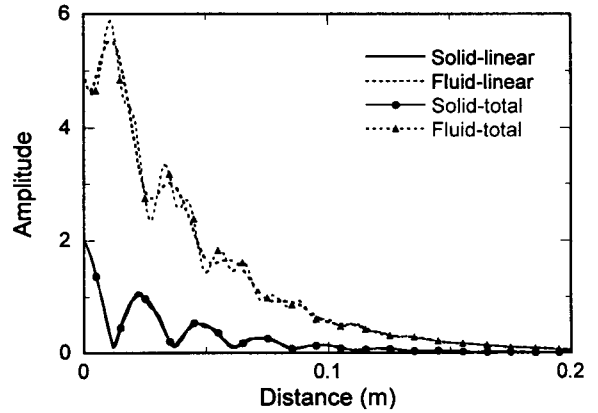


Fig. 6 Comparison of linear waves with the case when considering linear and nonlinear waves (distance domain)

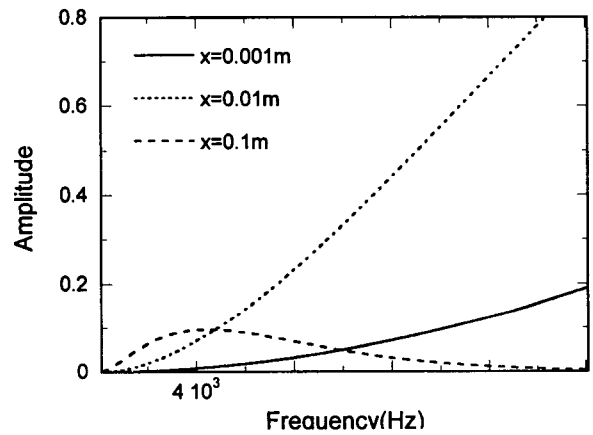


Fig. 7 Amplitude of the total nonlinear wave(2-D plot)

비선형 파수 중에서는 다음과 같이 선형 파수와는 전혀 다른 형태의 항들이 있고,

$$u_{N11} = (1/\kappa_1)(b_{22}f_1 - b_{12}f_4)xe^{-i2k_1x} \quad (37)$$

$$U_{N11} = -\frac{b_{11}}{b_{12}} \frac{1}{\kappa_1} (b_{22}f_1 - b_{12}f_4)xe^{-i2k_1x} \quad (38)$$

수치 해석의 결과인 Fig. 4~8로부터 식 (37), (38)의 형태로 표현되는 항이 비선형 항들 중에서 지배적인 역할을 함을 알 수 있다. 이는 Donskoy등<sup>(7)</sup>의 결과와도 일치한다. 식 (38)을 변위와 주파수에 대하여 진폭의 형태 그대로 표현하면 Fig. 4와 같이 나타낼 수 있다. Fig. 4에서 비선형 파는 경계조건에 의해 결정된 경계에서의 진폭에서 연속적으로 감쇠를 하는 선형 파와는 달리, 경계 조건과 관계없이

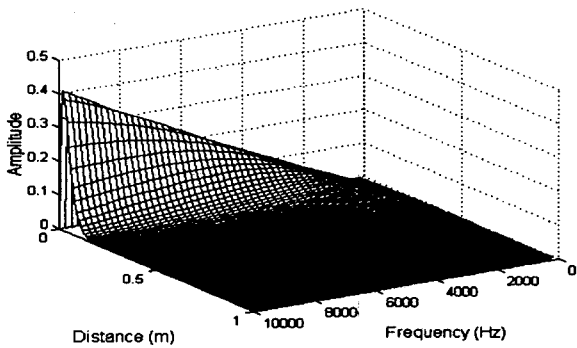


Fig. 8 Amplitude of the total nonlinear wave(3-D plot)

급격히 증가했다가 최고값에 도달한 후 감소하는 경향을 보인다. 이는 비선형 파의 또 다른 특징으로 생각할 수 있으며, 이러한 특징은 오히려 고주파수 대역에서 더 강하게 나타남을 알 수 있다. Fig. 5와 6에서 알 수 있듯이, 비선형 파의 영향은 고체상에서보다 유체상에서 더 강하게 나타나며, 경계와 가까울수록, 그리고 고주파수일수록 강함을 알 수 있다. 비선형 항들만을 모두 고려하여 주파수에 대하여 이동 거리 별로 나타내면 Fig. 7과 같다. Fig. 7에 의하면 경계에서 가까운 곳에서는 고주파수로 갈수록 진폭이 커지며, 경계에서 멀어질수록 진폭이 줄어드는 경향이 있다. Fig. 8에서는 이러한 경향을 3 차원으로 표시하였고, 역시 마찬가지로 비선형 파의 특징은 고주파수 대역으로 갈수록 강하게 나타남을 좀 더 직관적으로 확인할 수 있다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 탄성 다공성 물질에 대하여 널리 알려진 Biot의 준선형(semilinear)모델을 음향학적으로 접근하기 용이한 형태인 Bolton 등<sup>(6)</sup>의 선형 표현식을 바탕으로 한 확장된 Biot모델을 제시하고, 비선형 파동 방정식의 해를 구하였다. 또한 이를 바탕으로 흡음재 내부의 비선형 음파의 거리에 따른 전파 특성과 주파수 특성을 파악하였다.

비선형파는 선형파의 파수와 비교하여 빠르게 감소함을 알 수 있었고, 초기 경계 표면( $x=0$ )으로부터 단조 감소하는 선형파의 특징과는 달리, 비선형파는 초기 경계 조건과 무관하게 갑자기 진폭이 커졌다가 급격히 감소하는 경향을 보임을 알 수 있었다. 또한 이러한 비선형 파의 특성은 고주파수 대역에서 강하게 나타남을 알 수 있다. 현재 본 연구의 확장으로 비선형 음장에서 흡음재 경계면의 영향에

대한 연구를 진행 중이며, 본 연구의 결과와 결합하면 음장이 유한 진폭을 가진 비선형 음장이거나 충격파일 때의 흡음재의 비선형 영향을 파악할 수 있을 것으로 기대된다.

## 후 기

본 연구 내용은 한국학술진흥재단(과제 번호 98-3091)의 지원을 받아 수행된 연구 결과의 일부로 과제 지원 관계자에게 감사드린다.

## 참 고 문 헌

- (1) Meegan, Jr. G. D., Johnson, P. A., Guyer, R. A. and McCall, K. R., 1993, Observations of Nonlinear Elastic Wave Behavior in Sandstone, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 94 (6), pp. 3387~3391.
- (2) Khirnykh, K., Cummings, A. and Shield, B. M., 1995, A Non-Linear Model for Flexible Porous Materials, *Proceedings of Inter-Noise 95 (Vol. I)* pp. 449~452.
- (3) Biot, M. A., 1956, Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid I. Low-Frequency Range. II. Higher Frequency Range, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 28, pp. 168~191.
- (4) Biot, M. A., 1962, Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media, *Journal of Applied Physics*, Vol. 33, pp. 1482~1498.
- (5) Biot, M. A., 1973, Nonlinear and Semilinear Rheology of Porous Solids, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 8, pp. 4924~4937.
- (6) Bolton, J. S., Shiau, N.-M. and Kang, Y. J., 1996, Sound Transmission Through Multi-Panel Structures Lined with Elastic Porous Materials, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 191(3), pp. 317~347.
- (7) Donskoy, D. M., Khashanah, K. and McKee, Jr. T. G., 1997, Nonlinear Acoustical Waves in Porous Media in the Context of Biot's Theory, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 102(5), pp. 2521~2528.
- (8) Norris, A. N. and Grinfeld, M. A., 1995, Nonlinear Poroelasticity for a Layered Medium,



Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 98(2), pp. 1138~1146.

(9) Grinfeld, M. A. and Norris, A. N., 1996, Acoustoelasticity Theory and Application for Fluid-Saturated Porous Media, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 100(3), 1368~1374.

(10) Ostrovsky, L. A., 1991, Wave Processes in Media with Strong Acoustic Nonlinearity, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 90(6), pp. 3332~3337.

### 부록 (Nomenclatures)

- $\tau_{ij}$  : Total stress components of bulk material.  
 $\varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}$  : The solid strain considering and not considering the fluid pressure, respectively.  
 $\lambda$  : Lamé coefficient of frame.  
 $\mu$  : Shear modulus of frame.  
 $\alpha, M$  : Biot's elastic coefficients.  
 $\beta$  : Fluid compliance coefficient.  
 $f$  : Porosity.  
 $\mathbf{u}$  : Solid displacement vector.

- $\mathbf{U}$  : Fluid displacement vector.  
 $\zeta$  :  $\nabla \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{u})$ , the volumetric fluid content.  
 $e$  :  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ , solid volumetric strain.  
 $\varepsilon$  :  $\nabla \cdot \mathbf{U}$ , Fluid volumetric strain.  
 $e_{ij}$  :  $= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$   
 $i, j = 1, 2, 3$  : Solid strain.  
 $\sigma_{ij}$  : Stress acting on the solid phase.  
 $s$  : Stress acting on the fluid phase.  
 $E_2$  : The bulk modulus of elasticity of fluid.  
 $Q$  :  $= (1 - f)E_2$ , volumetric coupling factor.  
 $R$  :  $= fE_2$ , the constant relating fluid stress and strain.  
 $H$  : The strain energy invariant.  
 $D, F, G$  : Nonlinear coefficient.  
 $\bar{U} = (1/3)\bar{I}_1^3 - \bar{I}_1\bar{I}_2 + \bar{I}_3$   
 $\bar{B} = \bar{I}_1\bar{I}_2 - 3\bar{I}_3$   
 $\bar{I}_1 = \delta_{ij}\bar{e}_{ij}$   
 $\bar{I}_2 = -(1/2)(\bar{e}_{ij}\bar{e}_{ij} - \bar{I}_1^2)$   
 $\bar{I}_3 = \det(\bar{e}_{ij})$ .