

〈논 문〉

두께가 얇은 단면을 갖는 곡선보의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Curved Beams with Thin-Walled Cross-Section

이 병 구* · 박 광 규** · 오 상 진***

Byoung Koo Lee, Kwang Kyou Park and Sang Jin Oh

(1999년 7월 27일 접수 ; 1999년 9월 20일 심사완료)

Key Words : Free Vibration(자유진동), Curved Beam(곡선보), Thin-Walled Cross-Section(두께가 얇은 단면), Warping(워핑), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

This paper deals with the free vibrations of circular curved beams with thin-walled cross-section. The differential equation for the coupled flexural-torsional vibrations of such beams with warping is solved numerically to obtain natural frequencies and mode shapes. The Runge-Kutta and determinant search methods, respectively, are used to solve the governing differential equation and to compute the eigenvalues. The lowest three natural frequencies and corresponding mode shapes are calculated for the thin-walled horizontally curved beams with hinged-hinged, hinged-clamped, and clamped-clamped end constraints. A wide range of opening angle of beam, warping parameter, and two different values of slenderness ratios are considered. Numerical results are compared with existing exact and numerical solutions by other methods.

1. 서 론

교량의 상부구조를 두께가 얇은 강재 I형 단면을 이용하여 격자형 구조로 만드는 경우 상부구조의 높이를 낮게 할 수 있으며 구조물의 자중을 줄일 수 있는 장점을 가지고 있다. 그러나 이러한 구조로 곡선 구간을 만드는 경우 두께가 얇은 강재 I형 단면을 갖는 곡선부재는 직선부재와는 달리 곡률의 영향으로 휨과 비틀림의 연계작용이 발생하여 복잡한 거동 특성을 보이며, 특히 워핑(warping)의 영향이 상당히 큰 것으로 알려져 있어 이와 관련한 많은 연구가 이루어지고 있다.

Culver⁽¹⁾는 단순지지 수평 곡선보의 자유진동에 대한 정확해(exact solution)를 구하였으며, Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 회전-고정 및 고정-고정 보에 대한 근사해를 산출하였다. Shore와 Chaudhuri⁽²⁾는 단순 지지된 수평 곡선보의 자유진동에 대한 엄밀해(closed-form solution)를 구하고, 회전관성 및 전단 변형이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였다. Heins와 Sahin⁽³⁾은 이산화된 집중질량 보모형과 유한차분법을 이용하여 상자형 곡선보의 제 1고유진동수를 구하였으며, Chaudhuri와 Shore^(4,5), Yoo와 Fehrenbach⁽⁶⁾, Choi 등⁽⁷⁾은 유한요소법을 이용하여 수평 곡선보의 고유진동수를 산출하였다. 또한 강과 철⁽⁸⁾은 두께가 얇은 강재 I형 단면을 갖는 단순지지된 수평 곡선보의 최저차 제1고유진동수에 대한 해석해(analytical solution)를 산출하고, 유한요소법에 의한 결과와 비교하였다. 최근 Kang 등⁽⁹⁾은 미분구적법(differential quadrature method, DQM)을 이용

* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과

** 정회원, 대전대학교 토목공학과

*** 정회원, 담양대학 토목과

하여 다양한 제원을 갖는 보의 제 1고유진동수를 산출하였다.

본 연구에서는 수치적분기법과 시행착오적 행렬값 탐사법이 결합된 수치해석기법으로 워핑을 고려한 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 해석하여 대상보의 고유진동수 및 진동형을 산출하고자 한다. 본 연구결과를 타문헌의 다른 해석방법에 의한 결과들과 비교하여 본 연구에서 채택한 해석방법의 타당성과 정확성을 보이고, 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 수평 곡선보의 다양한 제변수 변화에 따른 고유진동수 및 진동형을 제시하고자 한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 opq 로 이루어지는 평면에 중심축 \widehat{pq} 가 놓인 곡률반경이 a 이고 중심각이 α 인 원호형 수평 곡선보를 나타낸 것이다. 대상 곡선보의 단면은 일정하며, 전단중심과 단면도심은 일치한다. 이 그림에서 곡선보축상 임의점의 위치는 \overline{op} 와 곡률중심방향이 이루는 각도 θ 로 정의되어 있으며, w 및 ϕ 는 각각 수직방향변위 및 비틀림각을 나타낸다.

진동시 부재 미소요소에 발생하는 휨모멘트 M , 비틀림 모멘트 T 및 전단력 Q 의 합응력과 단위길이당 수직방향관성력 F_v 및 비틀림관성우력 C_ϕ 의 동적평형방정식을 세우면 식 (1)~(3)과 같다⁽¹⁰⁾.

$$a^{-1}Q' - F_v = 0 \tag{1}$$

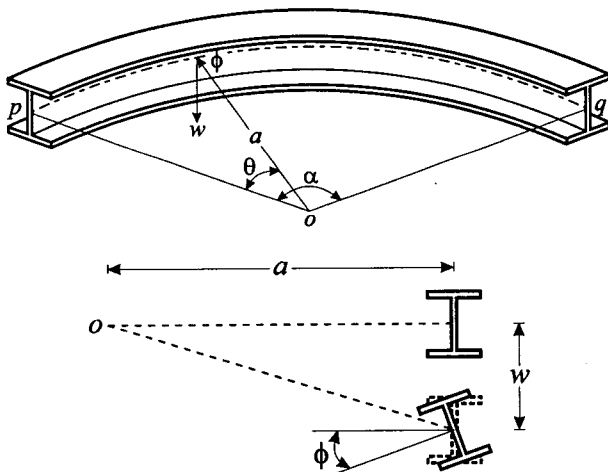


Fig. 1 Geometry and displacements of horizontally circular curved beam

$$a^{-1}M' - Q + a^{-1}T = 0 \tag{2}$$

$$a^{-1}M - a^{-1}T' + C_\phi = 0 \tag{3}$$

여기서 $(\cdot) = d/d\theta$ 를 의미한다.

부재단면에 발생하는 휨모멘트 및 순수비틀림에 의한 비틀림모멘트 T_s 는 각각 식 (4), (5)와 같다⁽¹⁰⁾.

$$M = EIa^{-1}(\phi - a^{-1}w') \tag{4}$$

$$T_s = GJa^{-1}(\phi' + a^{-1}w') \tag{5}$$

여기서 I 와 J 는 각각 곡선보 단면의 단면2차모멘트 및 Saint-Venant비틀림상수이고, E 와 G 는 각각 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수이다.

부재단면에 발생하는 워핑 τ 및 bimoment B 는 각각 식 (6), (7)과 같다⁽¹¹⁾.

$$\tau = -a^{-1}(\phi' + a^{-1}w') \tag{6}$$

$$B = -EI_w a^{-2}(\phi'' + a^{-1}w'') \tag{7}$$

여기서 I_w 는 워핑상수이다.

Bimoment의 변화에 의하여 발생하는 비틀림모멘트 즉 워핑 비틀림모멘트 T_w 는 식 (8)과 같다⁽¹¹⁾.

$$T_w = -EI_w a^{-3}(\phi''' + a^{-1}w''') \tag{8}$$

따라서 비틀림모멘트 T 는 식 (9)에 보인 바와 같이 T_s 와 T_w 의 합으로 표현된다.

$$T = T_s + T_w = GJa^{-1}(\phi' + a^{-1}w') - EI_w a^{-3}(\phi''' + a^{-1}w''') \tag{9}$$

곡선보가 조화진동을 한다고 가정하면 F_v 와 C_ϕ 는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_v = -\gamma A \omega_i^2 w, \quad C_\phi = -\gamma I_\phi \omega_i^2 \phi \tag{10,11}$$

여기서 γ 는 부재재료의 밀도, A 와 I_ϕ 는 각각 부재단면의 단면적 및 단면극관성모멘트이며, ω_i 는 고유각진동수(rad/sec), i 는 모드번호이다.

식 (2)를 전단력 Q 에 대하여 정리하고 식 (4), (9)를 대입하면 식 (12)와 같다.

$$Q = -(a^{-3}EI + a^{-5}EI_w)w''' + a^{-3}GJw' - a^{-4}EI_w\phi''' + a^{-2}(EI + GJ)\phi' \tag{12}$$

식 (1)에 식 (10)과 (12), 식 (3)에 식 (4), (9)와 (11)을 대입하고 정리하면 각각 식 (13)과 (14)를 얻을 수 있다.

$$(a^{-4}EI + a^{-6}EI_w)w^{iv} - a^{-4}GJw'' + a^{-5}EI_w\phi^{iv} - a^{-3}(EI + GJ)\phi'' - \gamma A\omega_i^2 w = 0 \quad (13)$$

$$a^{-5}EI_w w^{iv} - a^{-3}(EI + GJ)w'' + a^{-4}EI_w\phi^{iv} - a^{-2}GJ\phi'' + (a^{-2}EI - \gamma I_p\omega_i^2)\phi = 0 \quad (14)$$

식 (14)에 a^{-1} 을 곱하여 얻어진 결과와 식 (13)을 각각 θ 에 대하여 두 번 미분하여 얻어진 두 식을 빼면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$a^{-4}EIw^{iv} + a^{-4}EIw^{iv} - \gamma A\omega_i^2 w'' - a^{-3}EI\phi^{iv} + (a^{-1}\gamma I_p\omega_i^2 - a^{-3}EI)\phi'' = 0 \quad (15)$$

식 (13)을 ϕ^{iv} 에 대하여 정리하면 식 (16)과 같다.

$$\phi^{iv} = \frac{a^2(EI + GJ)}{EI_w} \phi'' - \left(\frac{aEI}{EI_w} + \frac{1}{a} \right) w^{iv} + \frac{aGI}{EI_w} w'' + \frac{a^5\gamma A\omega_i^2}{EI_w} w \quad (16)$$

식 (15)에 식 (16)을 대입하고 ϕ'' 에 대하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\phi'' = -\frac{1}{H} \frac{EI}{a^4} w^{iv} + \frac{1}{H} \frac{EI}{a^2} \frac{EI}{EI_w} w^{iv} + \frac{1}{H} \left(\gamma A\omega_i^2 + \frac{EI \cdot GI}{a^2 EI_w} \right) w'' + \frac{1}{H} \frac{a^2 EI}{EI_w} \gamma A\omega_i^2 w \quad (17a)$$

여기서,

$$H = \frac{1}{a} \left(\gamma I_p\omega_i^2 - \frac{EI}{a^2} \right) - \frac{EI}{a} \frac{EI + GI}{EI_w} \quad (17b)$$

지배 미분방정식을 무차원 형태로 표현하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\eta = w/a, \quad s_p = \sqrt{I_p/A}/a \quad (18,19)$$

$$\varepsilon = GJ/(EI), \quad D = EI_w/(a^2 EI) \quad (20,21)$$

$$C_i = \omega_i a^2 [\gamma A/(EI)]^{1/2} \quad (22)$$

식 (15)에 식 (17a)를 대입하고 무차원 변수를 이용하여 정리하면 식 (23)을 얻을 수 있다.

$$\eta^{vi} = \left(\frac{\varepsilon}{D} - 2 \right) \eta^{vi} + \left[\left(\frac{2\varepsilon}{D} - 1 \right) + C_i^2 \left(1 + s_p^2 + \frac{s_p^2}{D} \right) \right] \eta^{iv} + \frac{\varepsilon}{D} [1 - C_i^2(1 + s_p^2)] \eta'' + \frac{1}{D} (1 - s_p^2 C_i^2) C_i^2 \eta \quad (23)$$

워핑을 고려하지 않는 경우 식 (23)은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta^{vi} = -\frac{1}{\varepsilon} (2\varepsilon + C_i^2 s_p^2) \eta^{iv} + [C_i^2(1 + s_p^2) - 1] \eta'' + \frac{1}{\varepsilon} (s_p^2 C_i^2 - 1) C_i^2 \eta \quad (24)$$

회전단에서는 수직방향변위, 휨모멘트, 비틀림각 및 bimoment가 발생하지 않으므로 경계조건식은 식 (25)와 같으며, 고정단인 경우에는 수직방향변위, 단면회전각, 비틀림각 및 워핑이 "0"이므로 경계조건식은 식 (26)과 같다.

$$w=0, \quad w''=0, \quad \phi=0, \quad \phi''=0 \quad (25a-d)$$

$$w=0, \quad w'=0, \quad \phi=0, \quad \phi'=0 \quad (26a-d)$$

식 (13), (14) 및 (17)을 이용하면 식 (25c)와 (25d)를 수직방향변위 w 의 항으로 나타낼 수 있으며, 이들 결과와 식 (21a) 및 (21b)를 무차원 변수를 이용하여 나타내면 회전단에 대한 경계조건식은 식 (27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta=0, \quad \eta''=0, \quad \eta^{iv}=0, \quad \eta^{vi}=0 \quad (27a-d)$$

식 (14)와 (17)을 이용하면 식 (26c)와 (26d)를 수직방향변위 w 의 항으로 나타낼 수 있으며, 이들 결과와 식 (26a) 및 (26b)를 무차원 변수를 이용하여 나타내면 고정단에 대한 경계조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta=0, \quad \eta'=0 \quad (28a,b)$$

$$D\eta^{vi} + (DC_i^2 s_p^2 + D - \varepsilon) \eta^{iv} + (DC_i^2 s_p^2 - DC_i^2 - D - 2\varepsilon - 1) \eta'' = 0 \quad (28c)$$

$$D\eta^{vii} + (DC_i^2 s_p^2 + D - \varepsilon) \eta^{iv} + (DC_i^2 s_p^2 - DC_i^2 - D - 2\varepsilon - 1) \eta''' = 0 \quad (28d)$$

워핑을 고려하지 않는 경우 회전단에 대한 경계조건식은 식 (27)에서 식 (27d)를 제외시킨 것과 같다. 또한 고정단인 경우에는 식 (28)에서 식 (28d)를 제외시키고 식 (28c)를 다음 식으로 대체한 것과 같다.

$$\varepsilon \eta^{iv} + (2\varepsilon + 1) \eta'' = 0 \quad (29)$$

3. 해석방법

본 연구에서는 수치적분기법과 시행착오적 행렬값 탐사법이 결합된 수치해석 알고리즘^(12~14)을 이용하여 대상보의 고유진동수 및 진동형을 산출하였으며,

이의 개략적인 내용은 다음과 같다. 식 (23)을 8개의 1계미분방정식으로 변환하고, 이들 식에 포함된 미지의 고유치 C_i 항을 가정하여 대입한다. 식 (23)을 변환하여 얻은 8개의 1계미분방정식을 수치적분하기 위해서는 8개의 초기치가 결정되어야만 한다. 그러나 식 (27) 및 (28)에 나타난 바와 같이 좌단에서 초기치는 4개씩만을 알고 있으므로, 기지의 초기치를 포함한 4조의 초기조건을 가정하여 좌단에서 우단까지 4회의 수치적분을 수행한다.

수치적분결과로서 곡선보측상 모든 점에서 η , η' , η'' , η''' , η^{iv} , η^v , η^{vi} 및 η^{vii} 이 각각 4쌍씩 결정된다. 앞서 4조의 초기조건을 가정하여 각각 초기치문제로 형성하였으므로 4회의 수치적분결과 얻어진 결과들 사이에는 선형결합의 관계가 성립되며, 앞서 가정한 C_i 값이 대상보에 대한 참고유치라면 우단에서 얻어진 선형결합의 결과들은 식 (27) 또는 (28)의 경계조건식을 만족해야만 한다. 이 과정에서 행렬값탐사법을 이용하였으며, 행렬값탐사법을 적용하는 과정에서 참고유치 C_i 를 찾기 위해서는 Regula-Falsi 법⁽¹⁵⁾을 이용하였다. 또한 미분방정식의 수치적분은 공학문제에서 많이 이용되고 있는 Runge-Kutta 법⁽¹⁵⁾을 이용하였다.

한편 위평을 고려하지 않는 경우 식 (24)의 지배 미분방정식은 6개의 1계미분방정식으로 변환된다. 따라서 이를 수치적분하기 위해서는 6개의 초기조건이 필요하다. 그러나 각 단부조건에 대한 경계조건은 3개씩만을 알고 있으므로 이들 기지의 초기치를 포함한 3조의 초기조건을 가정하여 위에서 설명한 바와 같은 방법으로 지배 미분방정식을 해석하였다. 본 연구에서는 이상의 수치해석과정을 컴퓨터 프로그램화하여 최저차 3개의 무차원 고유진동수를 산출하였다.

4. 결과검증 및 해석에

Table 1은 본 연구결과를 검증하기 위하여 단순지지 수평 곡선보에 대한 Culver⁽¹⁾의 정확해 및 강과 최⁽⁸⁾가 산출한 해석해(analytical solution)와 비교한 것이다. 여기서 곡선보의 구조적 특성값은 호장이 5.12 m, $A=92.9 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $\gamma=7864 \text{ N}\cdot\text{sec}^2/\text{m}^4$, $I_b=1.523 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $EI=2.269 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m}^2$, $GJ=1.137 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^2$, $EI_w=1.112 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^4$ 이며, 수평 곡선보의 중심각 α 를 $10^\circ \sim 90^\circ$ 까지 10° 씩 변화시킨 것이다. 따라서 각각의 중심각에 대응되는 곡

Table 1 Comparison of fundamental angular frequency of hinged-hinged beam between this study and references

α (deg)	a (m)	This study		Ref. (1)	Ref. (8)
		C_1	ω_1 (rad/sec)	ω_1 (rad/sec)	ω_1 (rad/sec)
10	29.34	9.498	202.4	202.5	201.3
20	14.67	8.579	184.3	184.3	183.2
30	9.779	7.454	162.2	162.2	160.9
40	7.334	6.343	140.5	140.0	139.5
50	5.867	5.335	120.9	120.9	120.1
60	4.889	4.452	103.8	103.8	103.0
70	4.191	3.688	88.94	88.94	88.3
80	3.667	3.031	76.01	76.00	75.4
90	3.260	2.466	64.67	64.67	64.1

Table 2 Comparison of lowest three frequency parameters of hinged-hinged beam between this study and references: $s_p=0.005$, $\epsilon=0.05$ and $D=0.1$

α (deg)	Reference	Frequency parameter, C_i		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
15	Ref. (1)	143.0	575.0	1295.
	Ref. (9)	143.0	574.0	1270.
	This study	143.0	575.0	1295.
60	Ref. (1)	7.569	34.87	79.94
	Ref. (9)	7.569	34.80	78.37
	This study	7.569	34.87	79.94

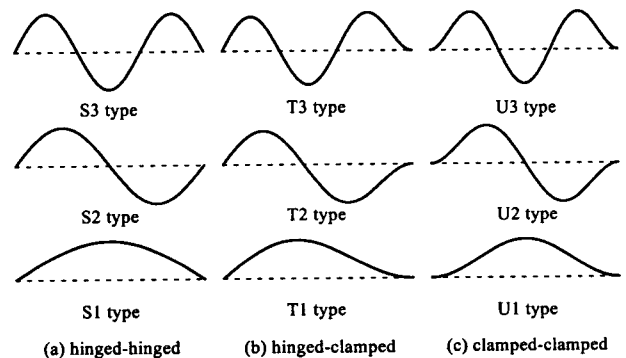


Fig. 2 Typical mode shapes for lowest three natural frequencies

률반경이 변화하게 되며, 이를 Table 1에 수록하였다. 본 연구에서는 이들 구조적 특성값에 따라 결정된 무차원 변수를 이용하여 단순지지된 수평 곡선보의 최저차 제 1무차원 고유진동수를 구하고, 식

(22)를 이용하여 제 1고유각진동수를 계산하였다. Table 1에서 본 연구와 문헌들의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다.

Table 2는 단순지지된 원호형 수평 곡선보에 대한 참고문헌 (1)과 (9)의 결과와 본 연구결과를 비교한

Table 3 Frequency parameter C_i for hinged-hinged beam

α (deg)	s_p	D	Frequency parameter, C_i				
			This study			Ref. (9)	
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	
15	0.02	0	114.3 (S1)	167.9 (S1)	266.4 (S2)	114.3	
		0.001	139.2 (S1)	271.5 (S1)	573.0 (S2)	139.2	
		0.01	142.6 (S1)	574.7 (S2)	734.5 (S1)	-	
		0.1	142.9 (S1)	574.9 (S2)	1295. (S3)	142.9	
	0.005	0	133.4 (S1)	561.4 (S2)	575.3 (S1)	133.4	
		0.001	140.4 (S1)	574.2 (S2)	1076. (S1)	140.4	
		0.01	142.7 (S1)	574.9 (S2)	1295. (S3)	-	
		0.1	143.0 (S1)	575.0 (S2)	1295. (S3)	143.0	
	30	0.02	0	26.99 (S1)	87.00 (S1)	114.3 (S2)	26.99
			0.001	29.84 (S1)	103.2 (S1)	139.2 (S2)	29.84
			0.01	33.80 (S1)	142.6 (S2)	198.9 (S1)	-
			0.1	34.86 (S1)	142.9 (S2)	322.9 (S3)	34.86
0.005		0	28.00 (S1)	133.4 (S2)	311.7 (S3)	28.00	
		0.001	30.39 (S1)	140.4 (S2)	321.6 (S3)	30.39	
		0.01	33.87 (S1)	142.7 (S2)	322.8 (S3)	-	
		0.1	34.87 (S1)	143.0 (S2)	323.0 (S3)	34.87	
45		0.02	0	9.827 (S1)	51.57 (S2)	68.27 (S1)	9.827
			0.001	10.60 (S1)	58.07 (S2)	72.70 (S1)	10.60
			0.01	13.12 (S1)	62.22 (S2)	104.8 (S1)	-
			0.1	14.72 (S1)	62.91 (S2)	142.9 (S3)	14.72
	0.005	0	9.989 (S1)	54.81 (S2)	133.4 (S3)	9.989	
		0.001	10.74 (S1)	59.03 (S2)	140.4 (S3)	10.74	
		0.01	13.16 (S1)	62.29 (S2)	142.7 (S3)	-	
		0.1	14.72 (S1)	62.92 (S2)	143.0 (S3)	14.72	
	60	0.02	0	4.419 (S1)	26.99 (S2)	60.72 (S1)	-
			0.001	4.675 (S1)	29.84 (S2)	62.35 (S1)	-
			0.01	5.949 (S1)	33.80 (S2)	75.48 (S1)	-
			0.1	7.564 (S1)	34.86 (S2)	79.92 (S3)	-
0.005		0	4.454 (S1)	28.00 (S2)	71.38 (S3)	-	
		0.001	4.709 (S1)	30.39 (S2)	76.42 (S3)	-	
		0.01	5.972 (S1)	33.87 (S2)	79.43 (S3)	-	
		0.1	7.569 (S1)	34.87 (S2)	79.94 (S3)	7.569	
90		0.02	0	1.222 (S1)	9.827 (S2)	26.99 (S3)	-
			0.001	1.261 (S1)	10.60 (S2)	29.84 (S3)	-
			0.01	1.540 (S1)	13.12 (S2)	33.80 (S3)	-
			0.1	2.403 (S1)	14.72 (S2)	34.86 (S3)	-
	0.005	0	1.225 (S1)	9.989 (S2)	28.00 (S3)	-	
		0.001	1.264 (S1)	10.74 (S2)	30.39 (S3)	-	
		0.01	1.543 (S1)	13.16 (S2)	33.87 (S3)	-	
		0.1	2.405 (S1)	14.72 (S2)	34.87 (S3)	-	

Capital letter in parentheses represent the mode shape(See Fig. 2).
 "-" indicates that no data is available.

것이다. 여기서 참고문헌 (9)의 결과는 미분구적법 (differential quadrature method, DQM)을 이용하여 산출한 근사해이다. 이 표에서 본 연구결과와 참고 문헌 (1)의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다. 그러나 참고문헌 (9)의 결과는 제 1고유진동

Table 4 Frequency parameter C_i for hinged-clamped beam

α (deg)	s_p	D	Frequency parameter, C_i				
			This study			Ref. (9)	
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	
15	0.02	0	136.9 (T1)	224.7 (T1)	272.7 (T2)	139.5	
		0.001	222.2 (T1)	388.8 (T1)	726.6 (T2)	222.2	
		0.01	224.0 (T1)	728.0 (T2)	1520. (T3)	-	
		0.1	224.1 (T1)	728.0 (T2)	1520. (T3)	224.1	
	0.005	0	216.4 (T1)	575.2 (T1)	713.9 (T2)	216.4	
		0.001	223.1 (T1)	727.6 (T2)	1519. (T3)	223.1	
		0.01	224.1 (T1)	728.1 (T2)	1520. (T3)	-	
		0.1	224.2 (T1)	728.1 (T2)	1520. (T3)	224.2	
	30	0.02	0	47.67 (T1)	87.73 (T1)	131.4 (T2)	47.67
			0.001	52.27 (T1)	126.5 (T1)	178.7 (T2)	52.27
			0.01	55.00 (T1)	181.1 (T2)	379.1 (T3)	-
			0.1	55.43 (T1)	181.3 (T2)	379.3 (T3)	55.43
0.005		0	50.11 (T1)	172.9 (T2)	368.6 (T3)	50.14	
		0.001	52.94 (T1)	179.7 (T2)	378.2 (T3)	52.94	
		0.01	55.05 (T1)	181.2 (T2)	379.2 (T3)	-	
		0.1	55.45 (T1)	181.4 (T2)	379.3 (T3)	55.45	
45		0.02	0	19.90 (T1)	66.59 (T2)	69.37 (T2)	19.97
			0.001	21.22 (T1)	76.09 (T2)	164.6 (T3)	21.22
			0.01	23.39 (T1)	79.61 (T2)	167.8 (T3)	-
			0.1	24.15 (T1)	80.07 (T2)	168.0 (T3)	24.15
	0.005	0	20.29 (T1)	73.00 (T2)	159.2 (T3)	20.37	
		0.001	21.48 (T1)	77.31 (T2)	166.1 (T3)	21.48	
		0.01	23.44 (T1)	79.68 (T2)	167.8 (T3)	-	
		0.1	24.15 (T1)	80.09 (T2)	168.1 (T3)	24.15	
	60	0.02	0	10.26 (T1)	37.05 (T2)	60.73 (T1)	-
			0.001	10.91 (T1)	40.59 (T2)	90.31 (T3)	-
			0.01	12.25 (T1)	43.90 (T2)	92.84 (T3)	-
			0.1	13.16 (T1)	44.61 (T2)	94.09 (T3)	-
0.005		0	10.36 (T1)	38.60 (T2)	86.30 (T3)	-	
		0.001	11.00 (T1)	41.24 (T2)	91.33 (T3)	-	
		0.01	12.28 (T1)	43.96 (T2)	93.73 (T3)	-	
		0.1	13.16 (T1)	44.62 (T2)	94.11 (T3)	-	
90		0.02	0	3.756 (T1)	14.67 (T2)	33.62 (T3)	-
			0.001	4.102 (T1)	15.75 (T2)	36.92 (T3)	-
			0.01	4.621 (T1)	18.10 (T2)	40.42 (T3)	-
			0.1	5.281 (T1)	19.21 (T2)	41.24 (T3)	-
	0.005	0	3.769 (T1)	14.93 (T2)	34.97 (T3)	-	
		0.001	4.115 (T1)	15.95 (T2)	37.54 (T3)	-	
		0.01	4.630 (T1)	18.15 (T2)	40.50 (T3)	-	
		0.1	5.284 (T1)	19.22 (T2)	41.25 (T3)	-	

Capital letter in parentheses represent the mode shape(See Fig. 2).
 "-" indicates that no data is available.

수에 비해 제 2, 3고유진동수에서 상대적으로 차이가 있음을 알 수 있는데, 이는 참고문헌 (9)에서 수립된 제 1고유진동수를 제시하기 위하여 grid point의 수를 "11"로 제한하였기 때문인 것으로 사료된다. 그러나 전반적으로 본 연구결과와 문헌들의 결

Table 5 Frequency parameter C_i for clamped-clamped beam

α (deg)	s_p	D	Frequency parameter, C_i				
			This study			Ref. (9)	
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	
15	0.02	0	140.9 (U1)	270.8 (U2)	324.0 (U1)	147.4	
		0.001	324.8 (U1)	540.8 (U1)	897.8 (U2)	324.8	
		0.01	325.7 (U1)	898.8 (U2)	1763. (U3)	-	
		0.1	325.8 (U1)	898.9 (U2)	1763. (U3)	325.8	
	0.005	0	319.0 (U1)	576.1 (U1)	879.3 (U2)	319.0	
		0.001	325.4 (U1)	898.7 (U2)	1763. (U3)	325.4	
		0.01	325.8 (U1)	899.0 (U2)	1763. (U3)	-	
		0.1	325.9 (U1)	899.1 (U2)	1763. (U3)	325.9	
	30	0.02	0	69.49 (U1)	92.67 (U1)	136.9 (U2)	69.84
			0.001	79.21 (U1)	158.4 (U1)	222.2 (U2)	79.21
			0.01	80.84 (U1)	224.0 (U2)	440.1 (U3)	-
			0.1	81.03 (U1)	224.1 (U2)	440.1 (U3)	81.03
0.005		0	76.99 (U1)	216.4 (U2)	429.7 (U3)	77.03	
		0.001	79.80 (U1)	223.1 (U2)	439.2 (U3)	79.80	
		0.01	80.88 (U1)	224.1 (U2)	440.1 (U3)	-	
		0.1	81.04 (U1)	224.2 (U2)	440.2 (U3)	81.04	
45		0.02	0	32.02 (U1)	68.52 (U1)	82.28 (U2)	-
			0.001	33.78 (U1)	96.41 (U2)	192.8 (U3)	-
			0.01	35.35 (U1)	98.91 (U2)	192.9 (U3)	-
			0.1	35.68 (U1)	99.18 (U2)	195.1 (U3)	-
	0.005	0	32.74 (U1)	92.89 (U2)	186.9 (U3)	32.88	
		0.001	34.10 (U1)	97.29 (U2)	193.6 (U3)	34.11	
		0.01	35.38 (U1)	98.97 (U2)	195.0 (U3)	-	
		0.1	35.69 (U1)	99.21 (U2)	195.2 (U3)	35.69	
	60	0.02	0	17.40 (U1)	47.67 (U2)	60.73 (U1)	-
			0.001	18.24 (U1)	52.27 (U2)	106.4 (U3)	-
			0.01	19.36 (U1)	55.00 (U2)	108.7 (U3)	-
			0.1	19.80 (U1)	55.43 (U2)	109.4 (U3)	-
0.005		0	17.58 (U1)	50.11 (U2)	102.2 (U3)	-	
		0.001	18.38 (U1)	52.94 (U2)	107.2 (U3)	-	
		0.01	19.38 (U1)	55.05 (U2)	109.1 (U3)	-	
		0.1	19.81 (U1)	55.45 (U2)	109.4 (U3)	-	
90		0.02	0	7.031 (U1)	19.90 (U2)	40.54 (U3)	-
			0.001	7.572 (U1)	21.22 (U2)	44.33 (U3)	-
			0.01	8.038 (U1)	23.39 (U2)	47.41 (U3)	-
			0.1	8.449 (U1)	24.15 (U2)	48.09 (U3)	-
	0.005	0	7.056 (U1)	20.29 (U2)	42.33 (U3)	-	
		0.001	7.595 (U1)	21.48 (U2)	45.02 (U3)	-	
		0.01	8.051 (U1)	23.44 (U2)	47.51 (U3)	-	
		0.1	8.453 (U1)	24.15 (U2)	48.10 (U3)	-	

Capital letter in parentheses represent the mode shape(See Fig. 2).
 "-" indicates that no data is available.

과는 우수하게 근접함을 알 수 있다.

Table 3~5는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 수평 곡선보의 최저차 3개의 무차원 고유진동수를 수록한 것이다. 여기서 곡선보의 중심각 α 는 15°, 30°, 45°, 60° 및 90°를 고려하였으며, s_p 는 0.005와 0.020, $D=0\sim 0.1$ 를 택하였다⁽¹⁶⁾. 그리고 ϵ 은 개략적으로 두께가 얇은 강재 I형 단면에 해당하는 0.05를 택하여 해석하였다. 이 표들에서 7번째 열에 수록된 값은 Kang 등⁽⁹⁾이 산출한 최저차 제1고유진동수를 나타낸 것이다.

Table 3~5에서 무차원 고유진동수의 우측에 기록된 기호는 Fig. 2에 나타낸 수직방향 변위의 전형적인 진동형을 나타낸 것이다. 여기서, (S1, S2, S3)는 회전-회전, (T1, T2, T3)는 회전-고정, (U1, U2, U3)는 고정-고정 보의 진동형을 나타낸다.

Table 3~5에서 수평 곡선보의 중심각 α 가 작을수록, 그리고 세장비 s_p 가 작을수록 무차원 고유진동수가 큼을 알 수 있다. 또한 D 가 증가하는 경우 무차원 고유진동수 C_i 는 항상 증가하며, 세장비 s_p 가 클수록 D 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화율이 큼을 알 수 있다. 한편 곡선보의 중심각 α 가 동일한 경우 D 가 충분히 크면 ($D=0.1$) s_p 에 관계없이 거의 일정한 C_i 값을 나타냄을 알 수 있다. 그리고 다른 조건이 동일한 경우 고정-고정, 회전-고정 및 회전-회전의 순으로 무차원 고유진동수가 큼을 알 수 있다.

5. 요약 및 결론

이 논문에서는 워핑을 고려한 원호형 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 수치적분기법과 시행착오적 행렬값탐사법이 결합된 수치해석기법을 이용하여 해석하였다. 본 연구결과를 타문헌의 다른 해석방법에 의한 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다. 수치해석결과로서 두께가 얇은 강재 I형 단면 ($\epsilon=0.05$)을 갖는 수평 곡선보의 중심각 (α), 워핑계수 (D), 세장비 (s_p)에 따른 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 해석결과로부터 곡선보의 중심각 및 세장비가 작을수록 무차원 고유진동수가 크며, 워핑계수가 증가하는 경우 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있었다. 또한 동일한 중심각을 갖는 경우 워핑계수가 0.1정도이면 세장비에 관계없이 거의 일정한 무차원 고유진동수를 나타냄을 알 수 있었다.

후 기

이 논문은 1998년 한국과학재단의 핵심전문연구과제 연구비지원(과제번호:981-1201-001-1)에 의하여 이루어진 연구결과의 일부이며, 재단당국의 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Culver, C. G., 1967, "Natural Frequencies of Horizontally Curved Beams," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 93, No. ST2, pp. 189~203.

(2) Shore, S. and Chaudhuri, S., 1972, "Free Vibration of Horizontally Curved Beams," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 98, No. ST3, pp. 793~796.

(3) Heins, C. P. and Sahin, M. A., 1979, "Natural Frequency of Curved Box Girder Bridges," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 105, No. ST12, pp. 2591~2600.

(4) Chaudhuri, S. K. and Shore, S., 1977, "Thin-Walled Curved Beam Finite Element," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 103, No. EM5, pp. 921~937.

(5) Chaudhuri, S. K. and Shore, S., 1977, "Dynamic Analysis of Horizontally Curved I-Girder Bridges," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 103, No. ST8, pp. 1589~1604.

(6) Yoo, C. H. and Fehrenbach, J. P., 1981, "Natural Frequencies of Curved Girders," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 107, No. EM2, pp. 339~354.

(7) Choi, Y. J., Kim, J. H., Park, J. S., Kang, Y. S. and Kang, Y. J., 1996, "Free Vibration of

Horizontally Curved I-Girders," *Proceedings of the 4th Japan-Korea Joint Seminar on Steel Bridges, Osaka*, pp. 155~165.

(8) 강영중, 최영준, 1995, "박판수평곡선보의 자유진동", *한국강구조학회 논문집*, 제 7 권, 제 4 호, pp. 243~252.

(9) Kang, K., Bert, C. W. and Striz, A. G., 1996, "Vibration Analysis of Horizontally Curved Beams with Warping using DQM," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 122, No. 6, pp. 657~662.

(10) Volterra, E. and Gaines, 1971, *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall.

(11) Heins, C. P., 1975, *Bending and Torsional Design in Structural Members*, D.C. Heath and Company.

(12) Veletsos, A. S., Austin, W. J., Pereira, C.A.L. and Wung, S. J., 1972, "Natural Frequencies of Circular Arches," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 98, No. EM2, pp. 311~329.

(13) Lee, B. K. and Wilson, J. F., 1989, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 1, pp. 75~89.

(14) Oh, S. J., Lee, B. K. and Lee, I. W., 1999, "Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, No. 1, pp. 23~33.

(15) Mathews, J. H., 1987, *Numerical Methods*, Prentice-Hall.

(16) Wilson, J. F., Birnstial, C., Dolan, C. W., Potter, P. E. and Spencer, P. R., 1985, "Dynamics of Elevated Steel Guideways," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 111, No. 9, pp. 1873~1898.