

<논 문>

매개변수 가진력을 받아 비행하는 구조물의 동적 모델링 및 안정성 해석

Dynamic Modeling and Stability Analysis of a Flying Structure undertaking Parametric Excitation Forces

현 상 학* · 유 흥 희**

Sang Hak Hyun and Hong Hee Yoo

(1999년 6월 10일 접수 : 1999년 11월 26일 심사완료)

Key Words : Parametric excitation(매개변수 가진), Dynamic stability(동적 안정성), Floquet's theory(Floquet 이론), Transition matrix(전이 행렬), Missile structure(미사일 구조물)

ABSTRACT

Dynamic stability of a flying structure undertaking constant and pulsating thrust force is investigated in this paper. The equations of motion of the structure, which is idealized as a free-free beam, are derived by using the hybrid variable method and the assumed mode method. The structural system includes a directional control unit to obtain the directional stability. Unstable regions due to periodically pulsating thrust forces are obtained by using the Floquet's theory. Stability diagrams are presented to illustrate the influence of the constant force, the location of gimbal, and the frequency of pulsating force. The validity of the diagrams are confirmed by direct numerical simulations of the dynamic system.

1. 서 론

미사일 구조물처럼 추진력을 받아 비행하는 구조물에서의 동적 안정성 해석은 추진력에 의한 좌굴, 제어 안정성 그리고 맥동 추진력으로 인한 매개변수 안정성 등을 분석하는 일이다. 이러한 시스템에서는 추진력이 압축력으로 작용하여 좌굴이 발생할 수 있으며, 미사일처럼 비행 방향이 제어된다면 방향 제어에 의해 시스템이 불안정할 수 있다. 또한 추진력은 연료 분사의 반작용이므로 연료 분사시 연료 공급이 항상 일정하지 않으므로 주기성을 갖게 되고,

이러한 맥동 추진력은 시스템을 매개변수 가진하므로 맥동 추진력의 진동수와 크기의 조합에 따라 매개변수 공진(parametric resonance)을 일으킬 수 있다.

안정성 해석을 위한 운동방정식은 구조물을 보로 이상화하고 보의 실제 인장길이를 변형변수로 하는 모델링 방법에 의해 유도하였고, 매개변수 안정성은 Floquet 이론에 근거한 시스템의 전이행렬(transition matrix)를 이용하여 판정하였다. 인장길이를 변형변수로 하는 모델링 방법은^(1,2) 강제 운동을 하는 보의 강성 변화를 효과적으로 고려할 수 있는 선형 모델링 방법이며, 이 방법에 의해 회전운동, 축방향 왕복운동 그리고 자유 비행 등 강제 운동하는 보에 대해 동적 해석, 진동 해석 그리고 안정성 해석 등 많은 연구가 진행되어 왔다^(3~6). 매개변수 진동시스템은 서로 직교하는 진동 성분이 연성될 때 나타나는 시

* 한양대학교 대학원

** 정희원, 한양대학교 기계설계학과

시스템으로^(7~10), 경우에 따라 진동 성분이 발산하여 시스템이 불안정하게 된다^(11~14). 매개변수 안정성을 판정하는 여러 가지 방법 중에서 시스템의 전이행렬을 이용하는 방법을 사용하였다⁽¹⁵⁾. 이 때 시스템의 전이행렬은 가진의 주기만큼 직접 수치 적분하여 얻는 방법을 사용하였다.

본 논문에서는 매개변수 가진력을 받아 비행하는 구조물에 대한 선형 운동방정식을 유도하고 안정성 해석 모델을 제시하였다. 안정성 해석 결과로서 추진력의 크기, 제어 상수, 김발의 위치 및 추진력의 진동수 등이 시스템의 동적 안정성에 미치는 영향을 도식적으로 제시하였다. 또한 안정성 해석 결과로부터 안정 또는 불안정 영역에서의 동적 거동을 직접 수치 적분을 통하여 살펴보았다. 본 논문에서 제시한 선형 안정성 해석 모델과 해석 결과들은 비선형 안정성 해석 모델의 연구와 해석의 기초자료는 물론 미사일 구조물의 설계시 참고자료로 사용될 수 있을 것이다.

2. 운동 방정식과 안정성 해석모델

본 절에서는 Fig. 1의 미사일 구조물처럼 추진력을 받아 비행하는 구조물의 운동방정식을 유도하고 이로부터 안정성 해석을 위한 해석 모델을 제시하고자 한다. 구조물은 양단 자유 보로 이상화하고 2차원 평면 운동을 한다고 가정하였으며, 중력의 영향은 무시하였다. 미사일 구조물의 비행 방향 제어와 관련하여 김발 장치와 연료 분사실의 분사각을 고려하였다. Fig. 2는 비행 보의 변형된 모습과 비행 방향이 기준선과 일치하도록 하기 위해 Q점에 작용하는 추진력 T가 θ_T 만큼 어긋나고 있음을 보여준다. 분사각은 식 (1)과 같다.

$$\theta_T = K_\theta \theta_C \quad (1)$$

여기서 K_θ 는 제어상수 (Control factor) 이고, θ_C 는 김발각으로 김발에 의해 제공되는 보의 진행 방향과 기준선과의 각도를 의미한다. 추진력의 크기는 주기성을 고려하여 식 (2)와 같이 표현한다.

$$T = T_0 + T_1 \cos \Omega t \quad (2)$$

여기서 T_0 와 T_1 는 상수이고, Ω 는 추진력의 진동수를 의미한다. 가상 강체 A는 자유 비행 보의 강체 운동 성분을 나타내고, 이 강체 A의 운동은 관성좌표계의 고정점 O로부터 무게중심점 C_0 의 위치(r_x

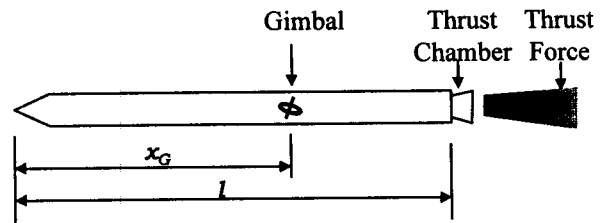


Fig. 1 Schematic diagram of a missile structure

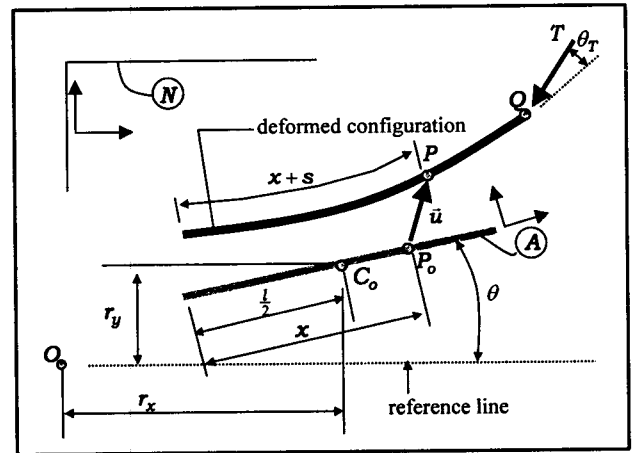


Fig. 2 Deformed configuration of the neutral axis of the free-free beam.

와 r_y)와 각변위 θ 에 의해 표현된다. 보의 변형량은 강체 A를 기준으로 표현할 수 있다. 따라서 보의 탄성 축 상의 임의의 질점 P의 위치는 다음과 같다.

$$\vec{p}^{OP} = r_x \hat{n}_1 + r_y \hat{n}_2 + \left(x - \frac{l}{2}\right) \hat{a}_1 + u_1 \hat{a}_1 + u_2 \hat{a}_2 \quad (3)$$

여기서 x 는 보의 끝단에서 변형 전 임의의 점 P_0 까지의 거리를 나타내고, u_1 과 u_2 는 P_0 로부터 P까지의 탄성 변위를 나타낸다. 또한 \hat{n}_1 과 \hat{n}_2 는 관성좌표계이며, \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 는 강체 A에 부착된 좌표계이다.

추진력에 의해 강체 운동을 하는 보의 운동방정식은 다음 과정에 의해 얻어진다. 우선, 일반 관성력을 구하기 위한 강체 P의 속도와 가속도는 다음과 같다.

$$\vec{v}^P = \dot{r}_x \hat{n}_1 + \dot{r}_y \hat{n}_2 + \left(x - \frac{l}{2}\right) \dot{\theta} \hat{a}_2 + (\dot{u}_1 - \theta \dot{u}_2) \hat{a}_1 + (\dot{u}_2 + \theta \dot{u}_1) \hat{a}_2 \quad (4)$$

$$\vec{a}^P = \ddot{r}_x \hat{n}_1 + \ddot{r}_y \hat{n}_2 + \left(x - \frac{l}{2}\right) \ddot{\theta} \hat{a}_2 + \ddot{u}_1 \hat{a}_1 + \ddot{u}_2 \hat{a}_2 \quad (5)$$

여기서 가속도는 방향 제어에 의해 강체 A의 각변위 θ 가 충분히 작게 유지된다는 가정하에 선형화되었다.

일반 작용력은 보에 가해지는 추진력과 보의 탄성 에너지에 의한 복원력에 의해 구해진다. 추진력은 식 (1)과 (2)에서 탄성 변형으로 인한 각변위를 고려하면 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{T} = -(T_0 + T_1 \cos \Omega t) (\hat{a}_1 + \theta_Q \hat{a}_2) \quad (6)$$

여기서

$$\theta_Q = K_\theta \theta_G + u_{2,x}(l, t) \quad (7)$$

$$\theta_G = \theta + u_{2,x}(x_G, t) \quad (8)$$

여기서 $(\cdot)_{,x}$ 는 x 에 대한 편미분을 의미하며, x_G 는 김발의 위치를 나타낸다. 다음은 본 논문에서 사용한 보의 탄성 에너지이다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l AE (s_{,x})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI (u_{2,xx})^2 dx \quad (9)$$

여기서 s 는 Fig. 2에서처럼 보의 탄성 축을 따라 실제 인장된 길이를 나타낸다. 그리고 E 는 영의 계수, l 은 보의 길이, A 는 단면적, I 는 2차 면적모멘트를 나타낸다.

본 논문에서는 s 와 u_2 를 가상모드법을 사용하여 다음과 같이 근사화한다.

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (10)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (11)$$

여기서 ϕ_{1i} 와 ϕ_{2i} 는 모드함수, q_{1i} 와 q_{2i} 는 일반좌표, 그리고 μ_1 와 μ_2 는 일반좌표 수를 의미한다. 실제 인장 길이 s 를 사용하여 운동방정식을 유도하는 과정은 참고문헌 (2)에서 자세히 다루고 있으므로 본 논문에서는 생략하기로 한다. 단 모드함수들은 자유 경계조건을 가진 보의 고유함수 중 강체 운동 모드들을 제외한 모드들이므로 강체 운동 모드들과 직교성을 갖는다.

최종적으로 운동방정식은 다음과 같이 P점에 작용하는 일반 관성력과 Q점에 작용하는 추진력과 탄성 복원력에 의한 일반 작용력으로 구성된다.

$$\int_0^l \frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_r} \cdot (-m \vec{a}^P) dx + \frac{\partial \vec{v}^Q}{\partial q_r} \cdot \vec{T} - \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 \quad (12)$$

여기서 \vec{q}_r 는 $\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{\theta}, \dot{q}_{1i}, \dot{q}_{2i}$ 를 대표하는 일반속력

이며, m 는 단위길이당 질량을 각각 나타낸다. 식 (12)에 의해 유도한 운동방정식은 다음과 같은 무차원 변수들을 이용하여 무차원화한다.

$$\tau \equiv \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}, \quad \xi \equiv \frac{x}{l}, \quad \eta_{1i} \equiv \frac{q_{1i}}{l} \quad (13)$$

$$\eta_{2i} \equiv \frac{q_{2i}}{l}, \quad r_x \equiv \frac{r_x}{l}, \quad r_y \equiv \frac{r_y}{l}$$

이상의 과정을 통해 얻어진 무차원 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\eta}_{1i} + a \omega_{1i}^2 \eta_{1i} + (\bar{T}_0 + \bar{T}_1 \cos \bar{\Omega} \tau) \phi_{1i}(1) = 0 \quad (14)$$

$$\ddot{\eta}_{2i} + \omega_{2i}^2 \eta_{2i} - \ddot{r}_x \int_0^1 \phi_{1i}^* d\xi - (\bar{T}_0 + \bar{T}_1 \cos \bar{\Omega} \tau) \times (\phi_{1i}^*(1) - \phi_{2i}(1) \ell_Q) = 0 \quad (15)$$

$$\ddot{\theta} - 6(\bar{T}_0 + \bar{T}_1 \cos \bar{\Omega} \tau) \left(2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(1) \eta_{2j} - \ell_Q \right) = 0 \quad (16)$$

$$\ddot{r}_x + (\bar{T}_0 + \bar{T}_1 \cos \bar{\Omega} \tau) = 0 \quad (17)$$

$$\ddot{r}_y - (\bar{T}_0 + \bar{T}_1 \cos \bar{\Omega} \tau) (\theta + \ell_Q) = 0 \quad (18)$$

여기서,

$$\ell_Q = K_\theta \left(\theta + \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j,\xi}(\xi_G) \eta_{2j} \right) + \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j,\xi}(1) \eta_{2j} \quad (19)$$

$$\phi_{1i}^*(\xi) = \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^\xi \phi_{2i} \phi_{2j} d\sigma \eta_{2j} \quad (20)$$

위 식에서 $\bar{T}_0 = \frac{T_0 l^2}{EI}$, $\bar{T}_1 = \frac{T_1 l^2}{EI}$, $\bar{\Omega} = \Omega \sqrt{\frac{m l^4}{EI}}$.

$a = \frac{A l^2}{I}$ 인 무차원 변수들이다. 그리고 ω_{1i} , ω_{2i} , ϕ_{1i} 및 ϕ_{2i} 는 각각 양단 자유 보의 인장 방향과 굽힘 방향에 대한 무차원 고유 진동수와 무차원 고유 함수를 나타낸다. 특히 식 (20)은 u_1 대신에 s 를 근사화함으로써 얻어지는 관계식으로 임의의 질점 P에서의 굽힘 변형으로 인한 인장 방향으로의 변위량을 나타낸다. 이때 σ 는 적분을 위한 변수이다.

위의 무차원 운동방정식로부터 안정성을 판정하기 위한 해석 모델은 다음 사항들을 고려하여 구한다. 첫 번째, 식 (14)에서 가진 진동수가 인장 방향 고유 진동수와 일치할 경우에 발산하지만 일반적으로 인장 방향 고유 진동수는 매우 크므로 이 경우는 제외한다. 두 번째, 식 (18)에서 r_y 는 발산할 수도 있으나 식 (15)과 (16)로부터 r_x 의 거동은 η_i 와 θ 에는 아무런 영향이 없기 때문에 이 경우 또한 제외한다. 세 번째는 식 (17)에서 \ddot{r}_x 는 $-\bar{T}$ 이므로 이를

식 (15)에 대입하고 부분적분을 이용하면 다음과 같이 정리된다.

$$-\int_0^1 \phi_{1i}^* d\xi \ddot{x} - \bar{T} \psi_{1i}^*(1) = -\bar{T} \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^1 \xi \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi \eta_{2j} \quad (21)$$

따라서, 안정성 해석 모델은 식들 (15, 16, 21)로부터 다음과 같이 행렬형으로 표현된다.

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K^B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{T}_0 + \bar{T}_1 \cos \bar{\Omega} \tau \\ \dots \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} F^B & F^1 \\ F^2 & F^\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \theta \end{pmatrix} = 0 \quad (22)$$

여기서

$$\eta = (\dots \eta_i \dots)^T \quad (23)$$

$$K^B = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \omega_i^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$F^B = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & -\int_0^1 \xi \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi & \dots \\ \dots & +\psi_{2i, \xi}(1)(K_\theta \psi_{2j, \xi}(\xi_C) + \psi_{2j, \xi}(1)) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$F^1 = \{\dots K_\theta \psi_{2i}(1) \dots\}^T \quad (26)$$

$$F^2 = \{\dots -12\psi_{2i}(1) + 6K_\theta \psi_{2i, \xi}(\xi_C) + 6\psi_{2i, \xi}(1) \dots\} \quad (27)$$

$$F^\theta = 6K_\theta \quad (28)$$

여기서 η_i 와 ω_i 는 각각 식 (15)의 η_{2i} 와 ω_{2i} 를 의미하고 $i, j=1, 2, \dots, \mu_2$ 이다.

3. 안정성 해석

3.1 일정 가진력인 경우의 안정성 해석 ($\bar{T}_1=0$)

앞 절에서 구한 안정성 해석 모델로부터 시스템의 안정성을 고찰하고자 한다. 우선 추진력 성분이 일정할 때 방향 제어 상수 K_θ 와 김발 위치 ξ_C 의 변화에 따른 안정성을 고찰한다. 이 경우는 시스템에 대한 고유치 해석에 통해 안정성을 판단할 수 있다. 즉 $\bar{T}_1=0$ 인 경우 식 (22)의 정상 상태 해는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} e^{i\bar{\omega} \tau} \quad (29)$$

여기서 $\bar{\omega} = \omega/\omega_1$ 이고 이 때 ω 는 고유치 해석을 위한 변수이며 $\bar{\eta}$ 와 $\bar{\theta}$ 는 상수값이다. 식 (29)를 식

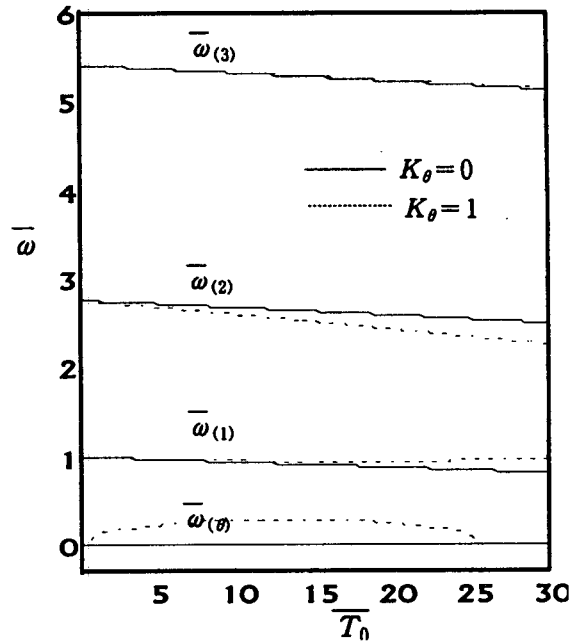


Fig. 3 Variation of non-dimensional natural frequencies ($\xi_C=0.5$).

(22)에 대입하여 다음과 같은 특성방정식을 얻는다.

$$\det \left(\begin{bmatrix} K^B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + T_0 \begin{bmatrix} F^B & F^1 \\ F^2 & F^\theta \end{bmatrix} - \bar{\omega}^2 I \right) = 0 \quad (30)$$

여기서 I 는 단위행렬이다. 식 (30)은 $\bar{\omega}$ 에 대한 $2(\mu_2+1)$ 차 방정식이므로 $2(\mu_2+1)$ 개의 근이 존재하며, 만약 복소근이 존재하면 그에 상응하는 켈레 복소근이 항상 존재한다. 따라서 적어도 한 개의 복소근이 존재하면 식 (29)는 발산하게 되어 시스템은 불안정하게 된다. 반면에 모든 근이 실근이면 식 (29)는 조화함수가 되어 시스템은 안정하다.

Fig. 3는 식 (30)로부터 굽힘 모드 5개를 사용하여 주어진 \bar{T}_0 에 대해 얻어진 고유치들을 도식적으로 표현한 그림이다. $\bar{\omega}_{(i)}$ 의 아래 첨자 괄호는 \bar{T}_0 에 의해 변화에 따른 변화된 (i)번째 굽힘 방향 무차원 고유 진동수임을 나타낸다. 실선은 방향 제어를 하지 않는 경우로 ($K_\theta=0$) 강체 각변위에 대한 고유 진동수 $\bar{\omega}_{(0)}$ 가 항상 0임을 보여준다. 점선은 방향 제어를 하는 경우로 추진력에 의해 시스템의 고유진동수가 변하고 있음을 보여주고, 특히 $\bar{\omega}_{(0)}$ 가 $0 < \bar{T}_0 < \text{약} 25.5$ 인 부분에서 양의 값을 가짐을 보여준다. \bar{T}_0 가 약 25.이상에서 $\bar{\omega}_\theta$ 에 해당되는 점선

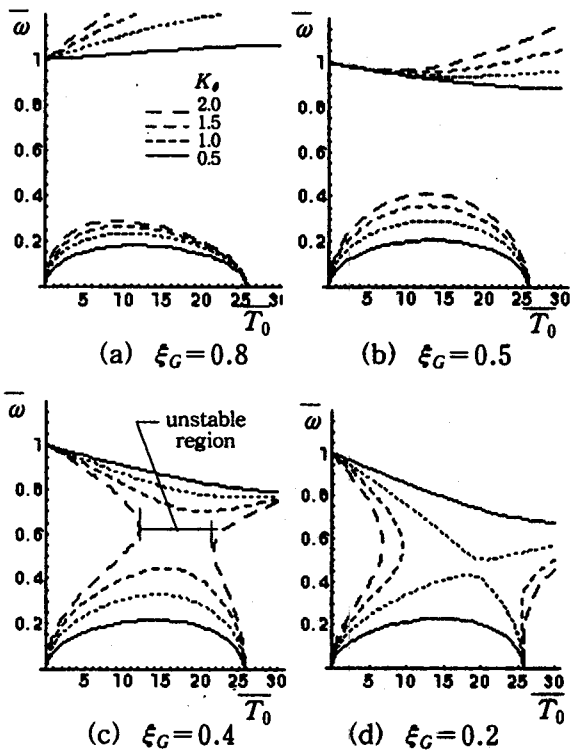


Fig. 4 Variation of frequencies for a range of values of K_θ and ξ_G .

이 사라지는 이유는 $\bar{\omega}_{(0)}$ 값이 복소수이기 때문이며 따라서 이 영역에서는 시스템이 불안정함을 의미한다.

Fig. 4는 제어 상수 K_θ 와 김발 위치 ξ_G 가 변화함에 따라 $\bar{\omega}_{(0)}$ 와 $\bar{\omega}_{(1)}$ 의 변화를 나타낸 그림이다. Fig. 4(a)와 (b)에서는 (김발의 위치가 분사실에서 가까울 때) K_θ 가 커짐에 따라 $\bar{\omega}_{(0)}$ 와 $\bar{\omega}_{(1)}$ 는 비례적으로 커진다. 반면에 Fig. 4(c)와 (d)에서는 (김발의 위치가 분사실에서 멀어질 때) K_θ 가 커짐에 따라 $\bar{\omega}_{(0)}$ 와 $\bar{\omega}_{(1)}$ 는 서로 가까워지며, 경우에 따라 일치하거나 선이 사라지는 (즉 복소수가 되는) 불안정 영역이 존재함을 알 수 있다. 이러한 불안정성은 보의 진행 방향을 제어할 때, 추진력의 방향을 결정하는 김발각에서 보의 변형을 고려하지 않기 때문에 발생한다. 김발이 분사실에서 멀어질수록 김발과 분사실 위치에서의 변형에 의한 처짐각의 차이는 크게 되어 불안정성이 나타나게 된다 ($\xi_G < 0.45$, $K_\theta > 1$). 강제 운동만을 고려한 (즉 $\eta_i = 0$) 제어 시스템에서는 이러한 현상은 나타나지 않는다.

Fig. 4에서 K_θ 와 ξ_G 에 관계없이 $\bar{\omega}_{(0)}$ 는 항상

$\bar{T}_0 \approx 25.5$ 에서 0이 되고 그 이상에서는 복소수가 됨을 알 수 있다. 즉 시스템에 좌굴이 발생하고 있음을 알 수 있다. 이러한 현상 또한 강제 운동만을 고려한 시스템에서는 나타나지 않으며, 본 논문에서처럼 보의 진행 방향을 제어하는 경우일 때 보의 굽힘 변형과 강제 각변위가 연성되어 시스템은 좌굴된다. 좌굴이 발생하는 임계 추진력은 $\bar{\omega} = 0$ 일 때의 \bar{T}_0 값이므로 식 (30)에서 그 값을 구해보면 다음과 같다.

$$\bar{T}_{cr} = 25.76 \quad (31)$$

따라서 $\bar{T}_0 \geq \bar{T}_{cr}$ 의 범위에서는 다른 시스템 변수와 관계없이 좌굴로 인한 불안정 시스템이 된다. 지금까지는 매개변수 가진력이 없는 시스템에 대한 안정성을 해석하였다. 다음은 본 절에서의 안정 영역에서 매개변수 가진력에 의해 발생하는 불안정 영역을 고찰하고자 한다.

3.2 매개변수 가진력인 경우의 안정성 해석 ($\bar{T}_1 \neq 0$)

식 (22)에서 $\bar{T}_1 \neq 0$ 이면 계수가 시간에 대하여 주기적인 선형 미분 방정식, 즉 매개변수 진동시스템임을 알 수 있다. 이러한 매개변수 진동시스템은 Floquet 이론에 근거한 시스템의 전이 행렬로부터 안정성을 판정할 수 있음이 잘 알려져있다. 간략히 소개하면, 전이 행렬의 고유치들 중 하나를 λ_i 라 할 때 (Floquet 승수라고 함), 시스템은 모든 λ_i 가 $|\lambda_i| \leq 1$ 이면 안정하고 어떤 λ_i 가 $|\lambda_i| > 1$ 이면 불안정하다. 특히 식 (22)처럼 감쇠가 없는 경우는 안정 시스템인 경우 모든 $|\lambda_i| = 1$ 이 된다. 또한 가진 진동수가 시스템 고유 진동수의 합과 차를 양의 정수로 나눈 값 $(\omega_i \pm \omega_j)/m$ 근처일 때에서 매개변수 공진이 발생한다.

본 논문에서는 가진의 주기만큼 직접 수치 적분하여 전이행렬을 구하는 방법을 사용하였고 구해진 전이 행렬의 고유치들로부터 안정성을 판정하였다. 굽힘 방향 모드는 5개를 사용하였으며, $|\lambda_i| > 1$ 일 때 불안정 시스템이지만 수치 적분과 고유치 해석에서의 수치적인 오차를 감안하여 $|\lambda_{i, \max}| > 1 + 1.0 \times 10^{-4}$ 이면 시스템은 불안정하다고 판단하였다. Fig. 5와 6은 안정성 해석결과를 도식적으로 나타낸 그림으로서 일정 추진력(\bar{T}_0)과 가진 진동수에 대하여 불안정 영역을 나타내었다. Fig. 5와 6에서 \bar{T}_0 에 따라 변화하는 고유진동수의 합과 차의 근처에서 불안정 영역

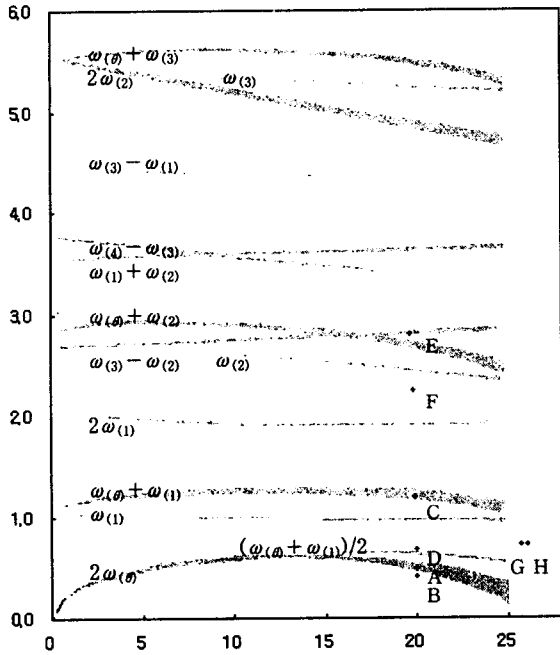


Fig. 5 Stability diagram (1) including points for direct numerical simulation
 ($T_1=0.1T_0$, $K_\theta=1.0$, $\xi_G=0.5$)

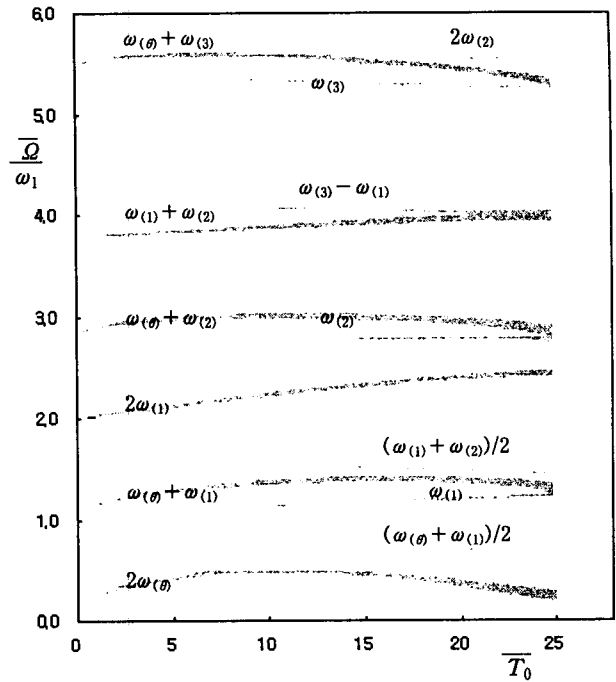


Fig. 6 Stability diagram (2)
 ($T_1=0.1T_0$, $K_\theta=1.0$, $\xi_G=0.8$)

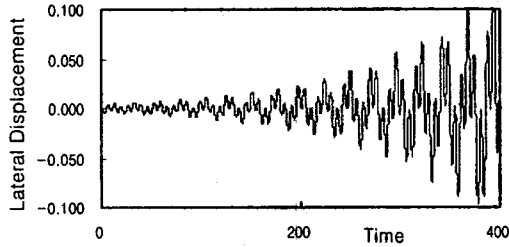
이 나타나고, 또한 $2\omega_{(\theta)}$ 인 경우의 불안정 영역의 중간 부분이 훨씬 얇은 것은 \bar{T}_0 가 커지더라도 실제 매개변수 가진의 크기는 작아지기 때문이다. Fig. 5와 6에서 $\bar{T}_0 > T_{cr}$ 범위에서는 가진 진동수에 관계 없이 모두 불안정 영역으로 판정되었으나 그림 상에는 도시하지 않았다. 그 이유는 앞 절에서 언급했듯이 이 영역은 시스템의 좌굴로 인한 불안정 영역이므로 매개변수 공진 영역과 구분하기 위해서이다. 매개변수 안정성 해석에서도 좌굴로 인한 불안정성을 판정할 수 있는데 그 이유는 다음과 같다. 좌굴된 시스템의 고유치는 0 또는 복소수이므로 매개변수 시스템에서는 $\omega_{(\theta)}^2 \leq 0$ 경우에 해당된다. 이 경우에 대한 매개변수 안정성은 $\omega_{(\theta)}^2 \approx 0$ 이고 가진 크기가 작은 협소한 범위를 제외한 거의 모든 영역이 불안정하기 때문에 좌굴에 의한 불안정 영역과 매개변수 가진에 의한 불안정 영역은 거의 일치한다[참고 문헌 (15) p. 286 참조]. Fig. 5와 Fig. 6에서 김발의 위치 ξ_G 에 따라 불안정 영역들은 다른 위치에서 나타나고 Fig. 6에서의 불안정 영역들이 전반적으로 작게 나타남을 알 수 있다. ξ_G 가 다르면 고유 진동수도 다르므로 불안정 영역들은 다른 위치에서 나타

난다. 그리고 불안정 영역들이 작게 나타나는 것으로 보아 김발의 위치가 분사실과 가까워지면 ($\xi_G=0.8$) 실제로 시스템을 매개변수 가진하는 크기가 작아지고 있음을 파악할 수 있다. 따라서 식들 (24~26)로부터 방향 제어로 인한 처짐각이 ($\psi_{2i,\xi}(\xi_G)$) 매개변수 가진의 크기를 작게 하는 원인을 알 수 있다.

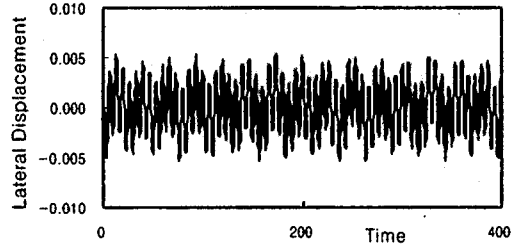
Fig. 5에서 발생하고 있는 매개변수 공진을 살펴보면, 먼저 주 매개변수 공진 (principal parametric resonance, $\bar{\Omega} \approx 2\omega_{(j)}/m$)으로 인한 불안정 영역은 $2\omega_{(\theta)}$ 인 경우에 비교적 넓게 나타나지만 다른 경우들은 가늘게 나타나거나 혹은 그림 상에 나타나지 않는다. 복합 매개변수 공진(combination parametric resonance, $\bar{\Omega} \approx (\omega_{(i)} \pm \omega_{(j)})/m$)으로 인한 불안정 영역은 $\omega_{(\theta)} + \omega_{(1)}$, $\omega_{(\theta)} + \omega_{(2)}$ 와 $\omega_{(\theta)} + \omega_{(2)}$ 인 경우에서 비교적 넓게 나타나지만 $(\omega_{(\theta)} + \omega_{(1)})/2$ 와 $\omega_{(1)} + \omega_{(2)}$ 인 경우에는 가늘게 나타나고, $\omega_{(3)} - \omega_{(2)}$, $\omega_{(4)} - \omega_{(3)}$ 와 $\omega_{(3)} - \omega_{(1)}$ 인 경우들에서도 모두 가늘게 나타나고 있다. Fig. 6에서는 Fig. 5의 경향과는 다르게 $2\omega_{(1)}$ 와 $\omega_{(1)} + \omega_{(2)}$ 인 경우가 상대적으로 넓어지고, 나머지 경우들은 더욱 더 가늘어지고 있다.

Fig. 7은 Fig. 5의 안정성 해석 결과에서 관심있는 지점에서의 동적 거동을 살펴보기 위해, 직접 수치 적분법에 의해 각 점들에 대한 동적 거동을 구한 후, 보의 굽힘 변위를 시간에 대하여 나타낸 결과 그림들이다. 이 때 초기치는 $\theta=0.01$, $\eta_1=0.001$ 로 하였고 굽힘 모드수는 5개를 사용하였다. Fig. 7 점 A는 주 매개변수 공진의 대표점, 점 C와 점 E는 합

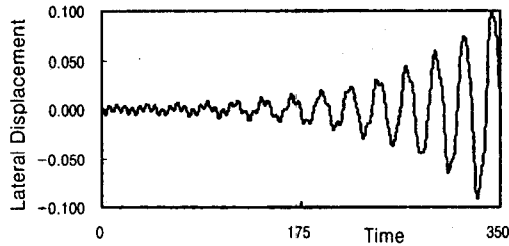
형과 차형 복합 매개변수 공진의 대표점, 점 H는 좌 굴 발생시의 대표점들이다. 이 수치 해석 결과들로부터 굽힘 변위가 발산하는 경향은 좌굴(점 H), 주 공진(점 A), 합형 복합 공진(점 C) 그리고 차형 복합 공진(점 E) 순으로 빠르다. 즉 전이행렬의 최대 고유치가 좌굴 발생시에 가장 크다는 것을 의미하고 동적 거동의 형태는 지수 적으로 발산하는 거동에



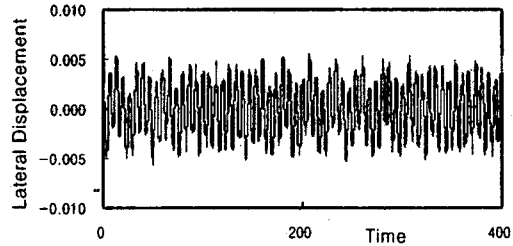
(a) Point A (20.0, 0.50)



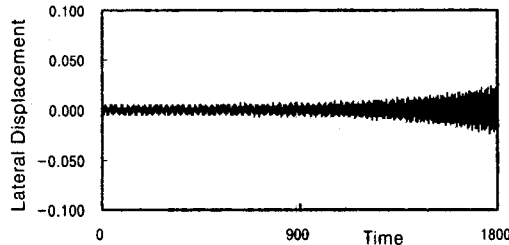
(b) Point B (20.0, 0.40)



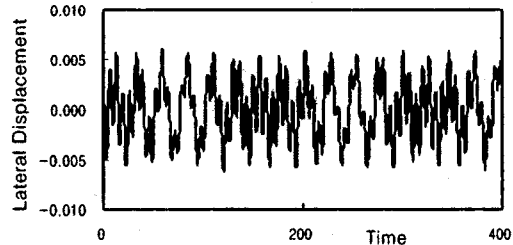
(c) Point C (20.0, 1.20)



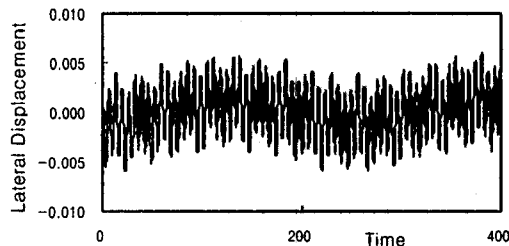
(d) Point D (20.0, 0.7)



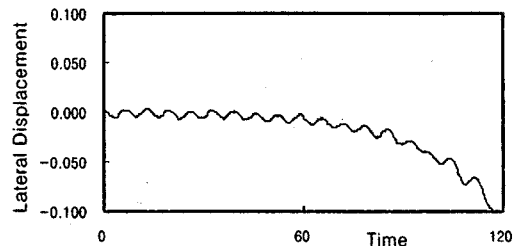
(e) Point E (20.0, 2.80)



(f) Point F (20.0, 2.18)



(g) Point G (25.6, 0.70)



(h) Point H (25.8, 0.80)

Fig. 7 Numerical result of points in stability diagram(1)

진동 성분이 합쳐진 모양이다. 나머지 동적 거동들은 진동 성분이 지수적으로 발산하는 다른 형태임을 알 수 있다. 또한 차형 복합 공진 때의 점 E의 동적 거동에서는 굽힘 변위가 0.1까지 증가하는데 많은 시간이 소요됨을 알 수 있다. 점 E가 속해있는 영역은 협소한 불안정 영역이므로 점 E는 안정 영역에 근접하여 시스템의 고유치가 1보다 약간 큰 값을 알 수 있고, 이런 경우의 동적 거동은 느리게 발산하는 형태를 보여준다. Fig. 7의 오른쪽 결과들은 안정된 동적 거동을 보여주는데 진동수가 다른 주기 함수들의 굽, 즉 준 주기적 (quasi periodic) 형태임을 알 수 있다. 점 B는 점 A와 비교하기 위하여 선택된 점으로서 동적 거동이 안정됨을 확인하였다. 점 D와 점 F는 각각 $\bar{\Omega} = \omega_{(1)} - \omega_{(0)}$ 와 $\bar{\Omega} = \omega_{(2)} - \omega_{(0)}$ 인 차형 복합 공진이 예상되는 영역이었으나 안정성 해석에서 안정 판정을 받은 점들이다. 마찬가지로 안정된 동적 거동을 보였고 이 경우의 차형 복합 공진은 발생하지 않음을 확인하였다. 점 G는 추진력이 25.60으로써 임계 추진력 ($\bar{T}_0 = 25.76$)보다는 작지만 좌굴 발생시의 대표점 H와 근접해 있으나, H의 동적 거동과는 전혀 다른 안정된 동적 거동을 보여주고 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 미사일 구조물과 같이 매개변수가 진력을 받고 방향 제어를 하는 양단 자유보형 구조물의 동적 안정성을 규명하기 위한 연구가 수행되었다. 유도한 운동방정식에서 매개변수 가진력에 따른 시스템의 강성 변화가 규명되었으며 이를 근거로 매개변수 가진력이 일정 상수항인 경우와 주기항까지 고려한 경우에 대해 각각 안정성 해석이 수행되었다. 방향 제어를 하는 양단 자유 보의 안정성 해석 결과로서, 추진력의 크기가 임계 추진력 이상이면 다른 시스템변수에 관계없이 불안정시스템이 되고, 임계 추진력 이하에서는 추진력의 크기, 자세 제어 상수, 김발 위치와 추진력의 진동수 등 시스템 변수들의 조합에 따라 동적안정성이 결정됨을 알았다. 특히 추진력의 진동수가 강체 각변위를 포함한 굽힘 고유진동수들의 2배 또는 합의 근처에서 매개변수 공진으로 인한 비교적 넓은 불안정 영역이 존재함을 알았다. 안정성 해석과 함께 공진 발생시 혹은 안정한 시스템에서의 동적 거동을 직접 수치적분을 통해 살펴보았으며, 이러한 수치 해석 결과들로부터 안정

성 해석 결과의 신뢰성을 확인하였다.

참 고 문 헌

- (1) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 10, pp. 139~151.
- (2) Yoo, H. H., Ryan, R. R. and Scott, R. A., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.
- (3) 유홍희, 1995, "유연 구조물의 동적해석시 고전적 선형 모델링의 신뢰성," *대한기계학회지논문집*, 제 19 권, 제 7 호, pp. 1657~1664.
- (4) 현상학, 유홍희, 1996 "축방향 왕복운동하는 외팔보의 동적 안정성 해석", *한국소음진동공학회지*, 제 6 권, 제 4 호, pp. 469~474.
- (5) 서 석, 유홍희, 1999, "자유 비행 보의 동적 해석", *대한기계학회지논문집*, 제 23 권, 제 4 호, pp. 697~717
- (6) Yoo, H. H. and Shin, S. W., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *J. of Sound and Vibration*, 212(5), pp. 807~828
- (7) Faraday, M., 1831, "On a Peculiar Class of Acoustical Figures and on Certain Forms Assumed by a Group of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces," *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, pp. 299~318.
- (8) Mathieu, E., 1868, "Memoire sur le mouvement Vibratoire d'une Membrane de Forme Elliptique," *J. Math.*, 13, pp. 137~203.
- (9) Hill, G., 1886, "On the Part of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon," *Acta Math.*, 8, pp. 1~36.
- (10) Floquet, G., 1883, "Sur les Equation Differentielles Lineaires a Coefficients Periodique," *Annales de Ecole Normal Superior, Paris*, Vol. 2, No. 12, pp. 47~89.
- (11) Kane, T. R. and Sobala, D., 1963, "A New Method for Attitude Stabilization," *AIAA J.*, Vol. 1, No. 6, June, pp. 1365~1367.
- (12) Beal, T., 1965, "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts," *AIAA J.*, 3, pp. 486~494.

(13) Iwatsubo, T., Saigo, M. and Sugiyama, Y., 1973, "Parametric Instability of Clamped- Clamped and Clamped-Simply Supported Columns Under Periodic Axial Loads," J. of Sound and Vibration, 30, pp. 65~77.

(14) Nayfeh, A. and Mook, D., 1977, "Parametric

Excitations of Linear Systems Having Many Degrees of Freedom," J. Acoust. Soc. Am., 62, pp. 375~381.

(15) Leonard Meirovitch, 1970, Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill.