

# 단순지지 변단면 보의 기하학적 비선형 거동

## Geometrical Non-Linear Behavior of Simply Supported Tapered Beams

이 병 구\* · 백 호 유\*\* · 오 상 진\*\*\* · 서 종 원\*  
Lee, Byoung Koo · Baek, Hoh Yoo · Oh, Sang Jin · Ser, Jong Won

### Abstract

This paper explores the geometrical non-linear behavior of the simply supported tapered beams subjected to the trapezoidal distributed load and end moments. In order to apply the Bernoulli-Euler beam theory to this tapered beam, the bending moment equation on any point of the elastica is obtained by the redistribution of trapezoidal distributed load. On the basis of the bending moment equation and the Bernoulli-Euler beam theory, the differential equations governing the elastica of such beams are derived and solved numerically by using the Runge-Kutta method and the trial and error method. The three kinds of tapered beams (i.e. width, depth and square tapers) are analyzed in this study. The numerical results of non-linear behavior obtained in this study from the simply supported tapered beams are appeared to be quite well according to the results from the reference. As the numerical results, the elastica, the stress resultants and the load-displacement curves are given in the figures.

### I. 서 론

최근에 재료공학이 매우 발달하여 농공학을 비롯한 각종 구조공학 분야에서 탄성이 매우 큰 재료로 이루어진 구조물의 시공이 가능하게 되었다. 이러한 구조물에서는 아주 큰 처짐에 대해서도 안정성을 확보할 수 있으므로 구조물의 기하학적 비선형거동 해석이 필수적이다. 구조물의 비선형거동은 구조물이 하중을 받아서 최종적으로 평형상태가 이루어진 후의 처짐곡선, 즉 정확탄성곡선을

산출하므로써 해석할 수 있다.

1774년에 Euler<sup>1)</sup>가 정확탄성곡선(elastica)에 관한 연구를 시작한 이래로 구조물의 기하학적 비선형거동에 관한 많은 연구가 이루어졌다. 그러나 구조물의 기하학적 비선형 해석은 그 해석과정이 매우 어렵기 때문에 해석에 여러 가지 제약들이 많이 있다. 따라서 이미 발표된 논문들을 고찰해 보면 해석대상의 구조물이 간단한 경계조건을 갖는 캔틸레버 보이거나 또는 집중하중을 받는 단순지지 보 등과 같이 아주 간단한 형태의 구조물

\*원광대학교 공과대학

\*\*원광대학교 자연과학대학

\*\*\*도립 담양대학

키워드 : 무차원합응력, 비선형거동, 선형변단면, 정확탄성곡선, Bernoulli-Euler보

해석에 제한되어 왔다. Gospodnetic<sup>2)</sup>은 단순지지 보를 대상으로, Rojahan<sup>3)</sup>은 단순지지 보와 캔틸레버보를 대상으로 타원적분(elliptic integration)을 이용하여 정확탄성곡선의 엄밀해(exact solution)를 구하였다. 엄밀해는 그 해석이 매우 난해해서 위의 논문들도 대상하중이 집중하중과 등분포하중으로 국한되어 있다. Lau<sup>4)</sup>는 캔틸레버 보에 단부집중하중과 등분포하중이 작용할 때에 급수해법(power series solution)을 이용하여 정확탄성곡선을 구하였다. 급수해는 정확탄성곡선식의 급수항을 적게 가정하면 미지계수를 용이하게 산출할 수 있지만, 소요의 정도의 해를 얻기 위해서는 급수항을 많이 도입하여야 하며 이 때는 미지계수를 얻기가 매우 어렵다. 따라서 최근의 연구동향을 살펴 보면 이 해석방법에 의한 구조물의 비선형 해석은 찾아 보기 힘든 실정이다. Wang<sup>5)</sup>, 이<sup>6)</sup>, Lee 등<sup>7)</sup>과 Chucheepeakul<sup>8)</sup>은 수치해석법(numerical solution)을 이용하여 구조물의 정확탄성곡선을 구하였다. 수치해석해는 정확탄성곡선상의 임의점에서 휨 모멘트식을 평행방정식으로 구하고 이 식을 기하학적 비선형 미분방정식에 적용하여 정확탄성곡선을 구하는 방법이다. 발표된 대부분의 논문들이 이 해석방법에 의한 연구들이다. Lee 등<sup>7)</sup>, 이 등<sup>9)</sup>, Wilson과 Strong<sup>10)</sup>은 실험적 방법으로 캔틸레버 보 또는 캔틸레버 기둥의 정확탄성곡선을 구하고 이 논문들에서 이론적으로 구한 정확탄성곡선과 비교하였다.

이 논문은 선형분포하중과 단부모멘트하중이 재하되는 단순지지 보의 기하학적 비선형거동을 수치해석하는 데에 연구목적이 있다. 변단면을 구조물에 사용하는 경우에 경제적인 잇점이 있을 뿐만 아니라 미적 감각 또는 시공상의 문제점 등으로 인하여 변단면 부재의 사용은 해석상의 어려움에도 불구하고 구조설계에서 그 사용이 필수적이다. 이 논문은 앞에서도 고찰한 바있는 수치해석해법에 의한 연구방법이다. 이 경우에 정확탄성곡선상에서 휨모멘트의 정확한 산정이 필요하며 이러한 휨모멘트식의 합리적 산정방법들이 이미 발표된 논문들의 주안점이 되어 왔다. 집중하중이 작용하

는 경우에는 휨모멘트식을 비교적 용이하게 산정할 수 있지만 분포하중이 작용하는 경우에는 그 산정이 매우 어렵다. 더욱이 변단면 구조인 경우에는 변단면이 부정정력에 영향을 미치므로 비선형 해석이 더욱 어려워진다. 또한 선형 분포하중이 재하되는 경우에 정확탄성곡선상에서 휨모멘트식을 유도하기가 매우 어려워서 정확한 비선형 거동해석은 아직 이루어지지 못하고 있는 실정이다.

이러한 관점에서 구조물의 정확탄성곡선상에서 휨모멘트식을 구하는 방법이 이 연구의 주안점이 되고 있다. 이 연구에서는 정확탄성곡선상에서 선형분포하중의 강도가 재하전과 비교하여 그 강도가 균일하게 증가한다는 가정하에서 휨모멘트식을 구하였다. 이러한 가정은 구조물의 정확탄성곡선상에서 선형분포하중의 강도를 정확하게 표현하지는 못하지만 이렇게 가정하므로서 기하학적 비선형 거동해석을 가능하게 한다.

이 연구에서는 다음과 같은 가정하에서 이론을 전개시켰다.

- 1) 보 재료는 선형탄성체이다.
- 2) 보의 축은 비압축성이다.
- 3) 보의 비선형 거동은 Bernoulli-Euler 보 이론을 따른다.
- 4) 앞에서 설명한 바와 같이 선형분포하중의 강도는 처짐이 발생한 후에 균일하게 증가한다.

## II. 변단면 보의 제변수

Fig. 1은 이 논문에서 해석대상으로 하고 있는 단순지지 변단면 보의 변수들을 나타내고 있다. 지점 A는 회전지점, 지점 B는 이동지점이며, 하중을 받기 전에 보의 지간길이는  $l$ 이다. 보에 재하되는 하중은 A, B지점의 단부모멘트 하중  $M_A$ ,  $M_B$  및 A, B지점의 하중강도가 각각  $W_A$ ,  $W_B$ 인 선형분포하중으로 각각의 하중이 독립적으로 또는 2개 이상의 하중조합으로 재하될 수 있다.

하중이 작용하게 되면 이동지점 B가 B'점으로 수평이동하게 되어 점선으로 표시된 보의 직선

축이 실선과 같이 처짐이 발생하여 정확탄성곡선 (elastica)을 이루게 된다. 이때 이동지점 B의 수평처짐을  $\Delta$ 라 하면 보의 축은 비압축성이므로 정확탄성곡선 보의 지간길이는  $l-\Delta$ 로 된다.

이 그림에서  $(x, y)$ 는 정확탄성곡선을 나타내기 위한 직교좌표계이며, 임의점  $(x, y)$ 에서  $s$ 는 A로부터 보의 축을 따라서 측정한 곡선길이,  $\theta$ 는 접선각,  $I$ 는 단면이차모멘트,  $A, V, M$ 은 각각 축방향력, 전단력, 휨모멘트의 합응력이다. 또한  $\alpha$ 는 A지점에서의 접선각이고,  $R_A$ 는 A지점의 수직반력이다.

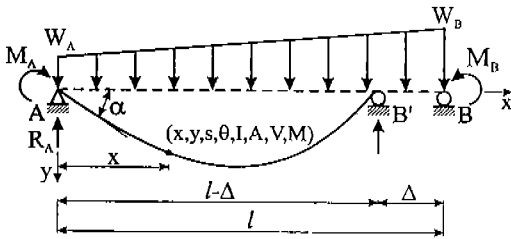


Fig. 1. Definition of beam geometry and loading

이제 변단면 보의 단면이차모멘트  $I$ 를 정의하면 다음과 같다. Fig. 2에서 A, B지점의 단면이차모멘트는 각각  $I_A, I_B$ 이고 하중을 받기 전(접선)과 받은 후(실선)에 축방향을 따라서 측정한 길이  $s$ 에서 변단면의 단면이차모멘트는  $I$ 이다. 보의 축은 전술한 바와 같이 비압축성이고 정확탄성곡선상  $(x, y)$ 에서 곡선길이는  $s$ 이므로 임의점  $(x, y)$ 에서 단면이차모멘트는  $I$ 이다. 또한 B'점에서  $s=l$ 이므로 이 곳에서 단면이차모멘트는  $I_B$ 이다.

변단면은 많은 방법으로 정의할 수 있지만 이 논문에서는 Gupta<sup>11)</sup>가 제안한 선형변단면을 채택하였으며 선형변단면의 단면이차모멘트  $I$ 는 다음 (1a)식과 같이 표시된다.

$$I = I_A [1 + (n^{l/e} - 1)s/l]^e \dots\dots\dots(1a)$$

$$n = I_B/I_A \dots\dots\dots(1b)$$

위의 (1a)식에서  $n$ 은 (1b)식과 같이  $I_A$ 에 대한  $I_B$ 의 단면비이며, Gupta의 논문에서는  $s$ 변수 대신에  $x$ 변수를 사용하였으나 이 논문에서는 처짐후에 부재축을 따라서 측정한 변수를  $s$ 라 정의 하였으므로  $x$ 대신에  $s$ 로 대치하였다. 또한  $e$ 값은 보의 변단면 형상에 따라서 정해지는 형상계수이며 이 연구에서는 다음과 같이 직사각형 단면을 갖는 3종류의 변단면에 대한  $e$ 값을 택하였다.

$$e=1, \text{ 폭 변단면(width taper) } \dots\dots\dots(2a)$$

$$e=3, \text{ 높이 변단면(depth taper) } \dots\dots\dots(2b)$$

$$e=4, \text{ 정방형 변단면(square taper) } \dots\dots\dots(2c)$$

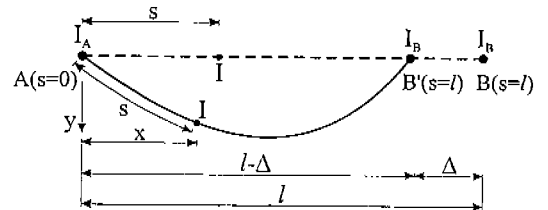


Fig. 2. Symbols and variables of tapered beam

### III. 기하학적 비선형해석

Fig. 1에 표시한 보의 정확탄성곡선은 Bernoulli-Euler 보 이론의 지배를 받는다. 이 이론을 적용하기 위해서는 임의점  $(x, y)$ 에서 휨모멘트  $M$ 식을 구하여야 하나  $\Delta$ 를 포함하여  $R_A$ 가 미지수이므로  $M$ 식을 구할 수 없다. 그러므로 분포하중을 받은 보의 비선형거동에 대한 정확해는 아직 알려져 있지 않다. 그러나 매우 적은 양의 논문들에서 특정한 가정하에서  $M$ 식을 구하고 이에 대한 Bernoulli-Euler의 미분방정식을 풀어서 정확탄성곡선의 좌표  $(x, y)$ 를 해석한 논문들이 발표되고 있다. 이러한  $M$ 식을 구하는 방법에 대한 이론은 문헌<sup>12)</sup>에 비교적 자세히 수록되어 있다.

본 연구에서는 휨모멘트  $M$ 을 다음 (3d)식과

같은 방법으로 구하였다. Fig. 3은 단순지지 보에 재하되어 있는 선형분포하중을 정확탄성곡선을 이론 후에 재배치한 하중분포 그림이다. 보의 지간 길이가  $l$ 에서  $l-\Delta$ 로 감소하였으므로 하중강도가 균등하게  $l/(l-\Delta)$ 배로 증가한다고 가정한다. 이와 같은 가정은 서론에서 언급한 바와 같이 임의점  $(x, y)$ 에서 분포하중의 하중강도를 정확하게 표현하지는 못하지만 이러한 가정으로 비선형해석을 가능하게 한다.

Fig. 3에서 반력  $R_A$ 와 임의점  $x$ 에서  $A, V, M$  식을 산출하면 다음 (3a)~(3d)식과 같다.

$$R_A = (M_B - M_A)/(l - \Delta) + (W_A/3 + W_B/6)l \dots\dots\dots(3a)$$

$$A = (R_A - P) \sin \theta \dots\dots\dots(3b)$$

$$V = (R_A - P) \cos \theta \dots\dots\dots(3c)$$

$$M = M_A + R_A x - (W_A/2)lx^2/(l - \Delta) - (W_B - W_A)lx^3/[6(l - \Delta)^2] \dots\dots\dots(3d)$$

위의 식들에서  $\Delta$ 는 비선형 거동해석에서 결정되어야 할 미지수이며, (3b), (3c)식에서  $P$ 는 (3b), (3c)식을 간단하게 표시하기 위한 변수로서 다음과 같다.

$$P = W_A lx/(l - \Delta) + (1/2)(W_B - W_A)lx^2/(l - \Delta)^2 \dots\dots\dots(3e)$$

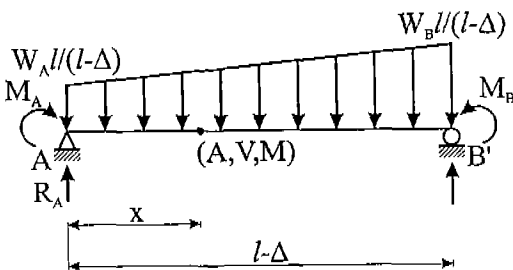


Fig. 3. Rearrangement of loading for large deformation

이상에서 (3a)~(3d)식들은 전술한 바와 같이 비선형 거동해석에서 정확한 값들은 아니지만 선형분포하중이 작용하지 않는 경우 즉, 단부모멘트 하중  $M_A, M_B$ 만 작용하는 때에는 (3a)~(3d)식들은 모두 정확한 거동값들이다

Bernoulli-Euler 보 이론에서 정확탄성곡선의 미분방정식은 (4a)식과 같고 Fig. 1에서  $x, y, s$ 에 대한 미분관계식  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ 으로부터 (4b)식의 미분방정식을 얻는다.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2}, \quad 0 \leq x \leq l - \Delta \dots\dots\dots(4a)$$

$$\frac{ds}{dx} = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq l - \Delta \dots\dots\dots(4b)$$

위의 (4a)식에서  $E$ 는 보재료의 탄성계수이고,  $I$  및  $M$ 은 각각 (1a), (3d)식에 이미 정의되어 있다.

Fig. 1의 정확탄성곡선에서 (4a), (4b)식에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$x = 0 \text{에서 } y = 0 \dots\dots\dots(5a)$$

$$x = 0 \text{에서 } s = 0 \dots\dots\dots(5b)$$

$$x = l - \Delta \text{에서 } y = 0 \dots\dots\dots(5c)$$

$$x = l - \Delta \text{에서 } s = l \dots\dots\dots(5d)$$

경계조건 (5c), (5d)식은 다음과 같이 하나의 식으로 정리하여 미분방정식 (4a), (4b)식을 푸는 과정에서 미지수인  $\Delta$ 를 찾는 데 이용한다.

$$x = l - \Delta \text{에서 } |y| + |s - l| = 0 \dots\dots\dots(5e)$$

미분방정식들을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l, \eta = y/l, \lambda = s/l, \delta = \Delta/l \dots\dots\dots(6a-d)$$

$$\xi = 0 \text{에서 } \eta = 0 \dots\dots\dots(8a)$$

$$w_A = W_A l^3/EI_A, w_B = W_B l^3/EI_A \dots\dots\dots(6e,f)$$

$$\xi = 0 \text{에서 } \lambda = 0 \dots\dots\dots(8b)$$

$$m_A = M_A l/EI_A, m_B = M_B l/EI_A \dots\dots\dots(6g,h)$$

$$\xi = 1 - \delta \text{에서 } |\eta| + |\lambda - 1| = 0 \dots\dots\dots(8c)$$

$$i = I/I_A = [1 + (n^{1/e} - 1)\lambda]^e \dots\dots\dots(6i)$$

$$r_A = R_A l^2/EI_A = (m_B - m_A)/(1 - \delta) \dots\dots\dots(6j) \\ + (w_A/3 + w_B/6)$$

$$a = Al^2/EI_A = (r_A - p) \sin \theta \dots\dots\dots(6k)$$

$$v = Vl^2/EI_A = (r_A - p) \cos \theta \dots\dots\dots(6l)$$

$$m = Ml/EI_A = m_A + r_A \xi - (w_A/2)\xi^2/(1 - \delta) \\ - (w_B - w_A)\xi^3/[6(1 - \delta)^2] \dots\dots\dots(6m)$$

(6k), (6l)식에서  $p$ 는 다음 식과 같다.

$$p = Pl^2/EI_A = w_A/(1 - \delta) + (1/2)(w_B - w_A)\xi^2 \\ / (1 - \delta)^2 \dots\dots\dots(6n)$$

위의 식들에서  $\xi, \eta, \lambda, \delta$ 는  $x, y, s, \Delta$ 를  $l$ 에 대하여 정규화한 것이며,  $w_A, w_B, m_A, m_B$ 는 무차원 하중,  $i$ 는 무차원 단면이차모멘트,  $r_A$ 는 무차원 반력,  $a, v, m$ 은 무차원 합응력들이다.

미분방정식 (4a), (4b)식을 (6a)~(6m)식의 무차원 변수들을 이용하면 다음 식들과 같이 무차원 미분방정식들로 유도된다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = -m \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{-3/2} i^{-1}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 - \delta \dots\dots\dots(7a)$$

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 - \delta \dots\dots\dots(7b)$$

또한 경계조건 (5a), (5b) 및 (5e)식을 무차원화하면 다음 식들과 같다.

이상에서 유도한 미분방정식 (7a), (7b)식의 수치해석은 초기치문제이므로 경계조건 (8a), (8b)식 이외에  $\xi = 0$  ( $A$ 지점)에서  $d\eta/d\xi = \tan \alpha$ 를 알아야 한다. 따라서 이 미분방정식을 해석하는 문제는 결국 주어진 하중조건  $w_A, w_B, m_A, m_B$  및 단면조건  $n, e$ 에 대하여 경계조건 (8c)식을 만족하는 지점  $B$ 의 무차원 수평치점  $\delta$ 와 지점  $A$ 의 접선각  $\alpha$ 를 찾는 문제로 귀착된다.

#### IV. 수치해석방법 및 검증

주어진 하중조건  $w_A, w_B, m_A, m_B$  및 단면조건  $n, e$ 에 대한 비선형거동을 해석하기 위하여 미분방정식 (7a), (7b)식을 수치해석하여 정확탄성곡선을 구하였다. 이 연구에서 개발한 수치해석방법을 간단히 설명하면 다음과 같다.

미분방정식의 수치적분문제는 전술한 바와 같이 초기치문제이므로 알려져 있지 않은 초기치  $d\eta/d\xi = \tan \alpha$  즉  $\xi = 0$ 에서의 접선각  $\alpha$ 와 정확탄성곡선에서 미지수인  $B'$ 점의 무차원 수평치점  $\delta$ 를 가정한다.

$\alpha$ 와  $\delta$ 값이 정의되면 (7a), (7b)식의 미분방정식을 상미분방정식의 수치해석법 중의 하나인 Runge-Kutta법<sup>13)</sup>을 이용하여  $\xi = 0$ 에서  $\xi = 1 - \delta$ 까지 수치적분한다. 가정한  $\alpha, \delta$ 값이 정확탄성곡선의 참 거동값이면 경계조건 (8c)식 즉  $\xi = 1 - \delta$ 에서  $|\eta| + |\lambda - 1| = 0$ 을 만족하여야 한다.

Fig. 1에서  $\alpha$ 값은  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $\delta$ 값은  $0 < \delta < 1$ 에 존재하므로 이 범위내에서 시행착오적 방법으로 미지수인  $\alpha, \delta$ 값을 찾는다.

첫번째 반복시행에서는  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $0 < \delta < 1$ 에 대하여  $D = |\eta| + |\lambda - 1|$  값을 산출하여 ( $\alpha, \delta$ ,

$D$ ) 좌표계에서  $(\alpha, \delta, D)$  곡면을 그린 후에  $(\alpha, \delta)$  평면상에  $D$  값의 등고선을 그린다. Fig. 4(a)는 첫번째 반복시행에서 얻어진  $(\alpha, \delta, D)$ 의 곡면 예를, Fig. 4(b)는  $D$  값의 등고선 예를 보여주고 있다. 이 예에 대한 하중조건 및 단면조건을 그림 상단에 표기하였다.

첫번째 반복시행의 결과로부터  $\alpha, \delta$  값은 Fig. 4(b)에 굵은 실선으로 표시된 범위내 즉,  $0.54 < \alpha < 1.19, 0.12 < \delta < 0.51$ 에 존재함을 알 수 있다. 2번째 반복시행에서는 더 축소된  $\alpha, \delta$ 의 범위가 계산되고 이러한 과정을 반복시행하여

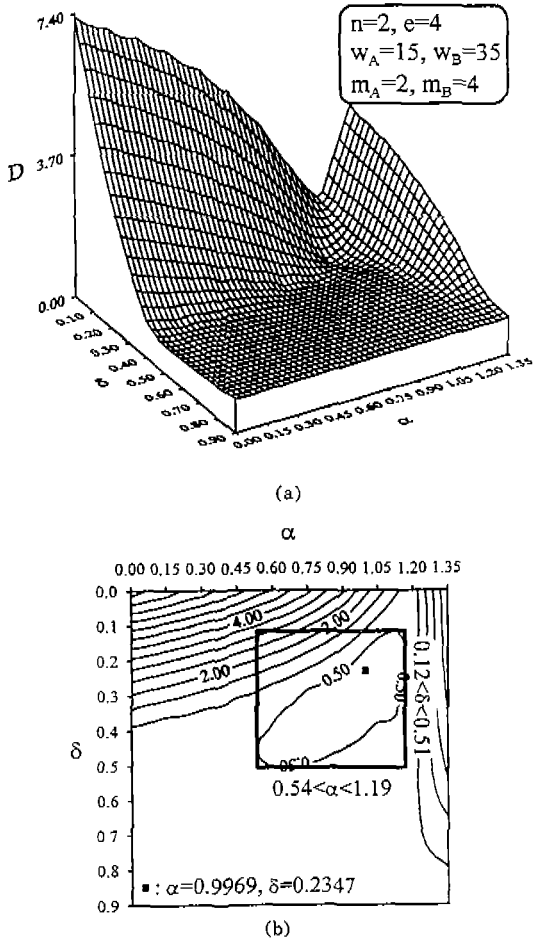


Fig. 4. (a) Example of  $(\alpha, \delta, D)$  surface and (b) contour

$D \leq 1 \times 10^{-15}$ 이 되는  $\alpha, \delta$  값을 찾으면 이 값들을 비선형거동의 참값으로 본다. 이 예에서  $\alpha, \delta$  값은 Fig. 4(b)에서  $\blacksquare$ 로 표시된  $\alpha=0.9969, \delta=0.2347$ 로 계산되었다.

이와 같이  $\alpha, \delta$  값을 찾으면 Runge-Kutta법에 의하여  $\xi=0$ 에서  $\xi=1-\delta$ 사이의  $\eta, d\eta/d\xi, \lambda, a, v, m$  값들이 계산되어 정확탄성곡선과 합응력도를 얻을 수 있다. 이때 본 연구에서 미분방정식은 비선형이므로  $\theta = \tan^{-1}(d\eta/d\xi)$ 로 계산된다.

이상의 수치해석과정을 C언어로 프로그램하였으며, 수치해석결과를 검증하기 위하여 본 연구와 문헌<sup>12)</sup>의 결과를 Table 1에서 비교하였다. 문헌<sup>12)</sup>에서는  $M$ 식을 구하기 위하여 적분식을 사용하였으므로 본 연구방법과 비교하여 정확한  $M$ 식이지만 그 수치적 과정이 매우 복잡하다. 이 표에서 보는 바와 같이 본 연구와 문헌의 비선형 거동 값은 그 차이가 약 2.5% 이내로 매우 잘 일치하여 본 연구에서 가정한  $M$ 식을 비롯하여 유도된 미분방정식 및 수치해석방법 등이 모두 타당함을 알 수 있다.

Table 1. Comparisons of results of this study with reference<sup>12)</sup> ( $e=3, m_A=m_B=0$ )

$w_A = w_B$	$n$	Data Source	$\delta$	$\alpha$	$\eta_{max}^*$	% error**
26.67	1.0	This study	0.1438	0.7371	0.2342	
		Ref. [12]	0.1436	0.7724	0.2307	0.1
66.67	1.0	This study	0.3146	1.041	0.3350	
		Ref. [12]	0.3114	1.136	0.3212	1.0
26.67	3.375	This study	0.06202	0.5513	0.1555	
		Ref. [12]	0.06299	0.5768	0.1555	1.5
66.67	3.375	This study	0.1897	0.9028	0.2660	
		Ref. [12]	0.1942	1.008	0.2620	2.3

\*  $\eta_{max}$ 는 최대수직처짐임. \*\*  $\delta$ 에 대한 % error임.

### V. 수치적용 예 및 고찰

본 연구에서 유도한 미분방정식과 수치해석방법을 이용하여 대상보의 하중변수  $w_A, w_B, m_A,$

Table 2. Effects of taper type on responses

Load and Section ratio	$e$	$\delta$	$\alpha$	$\eta_{max}$	ratio*
$w_A = w_B = 10$ , $m_A = m_B = 2$ , $n = 15$	1	0.1444	0.8576	0.2298	1.000
	3	0.1466	0.8620	0.2315	1.007
	4	0.1469	0.8626	0.2317	1.008
$w_A = 10$ , $w_B = 20$ , $m_A = 2$ , $m_B = 4$ , $n = 20$	1	0.1880	0.9229	0.2603	1.000
	3	0.1952	0.9355	0.2651	1.018
	4	0.1961	0.9370	0.2658	1.021
$w_A = 10$ , $w_B = 30$ , $m_A = 5$ , $m_B = 10$ , $n = 40$	1	0.2536	1.112	0.2969	1.000
	3	0.2858	1.153	0.3141	1.058
	4	0.2902	1.158	0.3164	1.066

\*  $e=1$ 에 대한  $e=1, 3, 4$ 의  $\eta_{max}$ 의 비율임.

$m_B$  및 단면조건  $n$ ,  $e$ 값을 변화시키면서 이들이 비선형거동에 미치는 영향을 분석하였다.

먼저 Table 2에서 단면형상계수  $e$ 가 비선형거동에 미치는 영향을 분석하였다. 이 표에서 보는 바와 같이  $e=1, 3, 4$ 에 대하여 거동값 ( $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\eta_{max}$ )들은  $e=4$ (정방향 변단면), 3(높이 변단면), 1(폭 변단면)의 순서로 큰 것을 알 수 있다. 여기서  $\eta_{max}$ 는 정확탄성곡선상에서 최대의  $\eta$ 값을 의미한다. 표의 좌단에 표시된  $\eta_{max}$ 의 비율을 살펴보면 거동값이 커질수록  $e$ 의 영향이 더 커지는 것을 알 수 있으며,  $\delta$ ,  $\alpha$ 값에 대해서도  $\delta$ ,  $\alpha$ 값이 커질수록  $e$ 의 영향이 더 커진다.

Fig. 5는  $n=2$ ,  $e=4$ (정방향 변단면)인 변단면 보에 대하여  $w_A = w_B$ ,  $m_A = m_B$ 가 작용하는 경

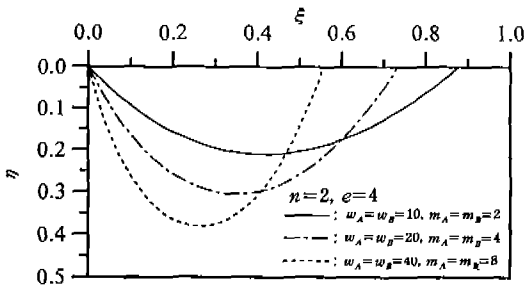


Fig 5. Shapes of elastica

우에 정확탄성곡선 ( $\xi$ ,  $\eta$ )의 예를 보여주고 있다. 하중의 크기가 증가함에 따라서  $\delta$ 와  $\alpha$ 가 증가하는 것을 알 수 있으며, 하중은 대칭이지만  $n=2$ 로 단면이 비대칭이어서 정확탄성곡선이 비대칭으로 이루어진 것을 알 수 있다.

Fig. 6는 Fig. 5에서  $w_A = w_B = 20$ ,  $m_A = m_B = 4$ 인 경우에 합응력도  $a$ ,  $v$ ,  $m$ 을 나타낸 것이다. 축방향력  $a$  및 전단력  $v$ 는 단부에서 크게 발

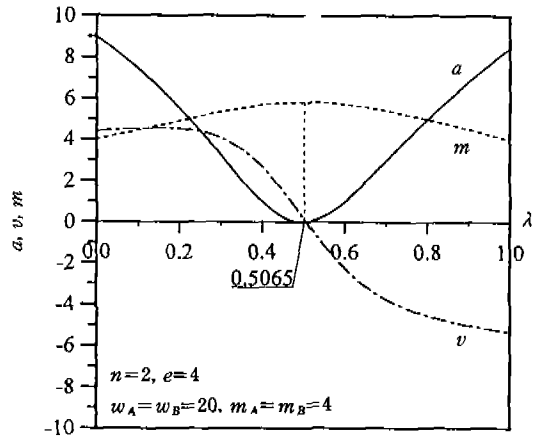


Fig. 6. Example of stress resultants

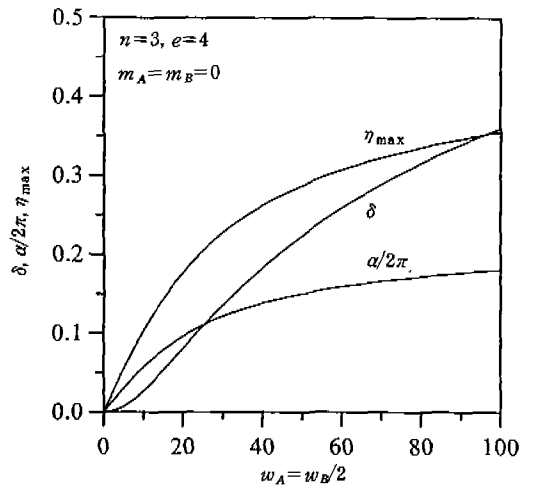


Fig. 7. Responses of beam loaded with the linearly distributed load

생하며, 휨모멘트  $m$ 은 보 중앙부분에서 크게 발생함을 알 수 있다. 그러나 하중이 대칭임에도 불구하고 단면이  $n=2$ 인 비대칭이므로  $\lambda=0.5$ 가 아닌  $\lambda=0.5065$ 에서 최대휨모멘트가 발생함을 알 수 있다.

Figs. 7~11은  $n=3, e=4$ 의 변단면에 각각 선형분포하중 ( $w_A = w_B/2$ ), 단부모멘트하중 ( $m_A =$

$m_B/2$ ), 등분포하중 ( $w_A = w_B$ ), 삼각형분포하중 ( $w_A=0$ ), 순수휨 ( $m_A = m_B$ )이 작용하는 경우에 하중과 변위  $\delta, \alpha/2\pi, \eta_{max}$  사이의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림들에서 하중과 변위의 관계는 강한 비선형성을 나타내고 있음을 알 수 있다. 이들 곡선으로부터  $\delta$ 는 작은 하중에서 작은 증가율을 보이고 큰 하중에서 큰 증가율을 보이지

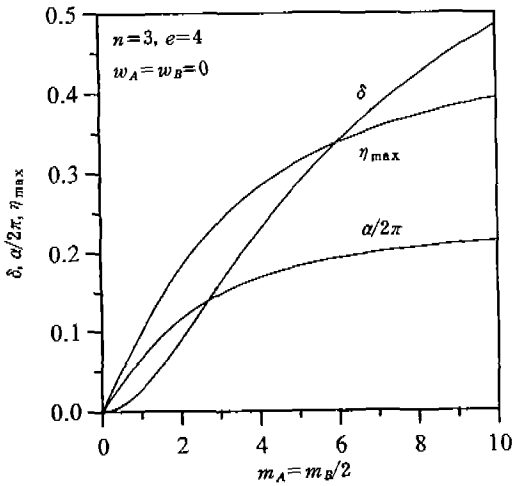


Fig. 8. Responses of beam loaded with the end moments

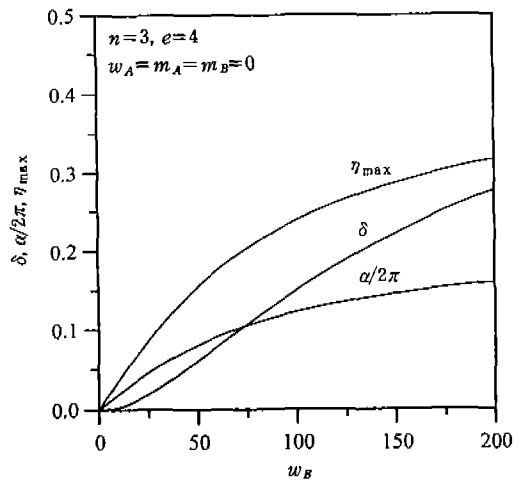


Fig. 10. Responses of beam loaded with the triangular load

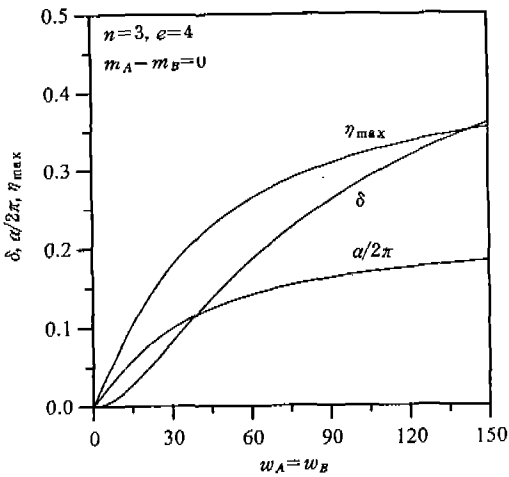


Fig. 9. Responses of beam loaded with the uniformly distributed load

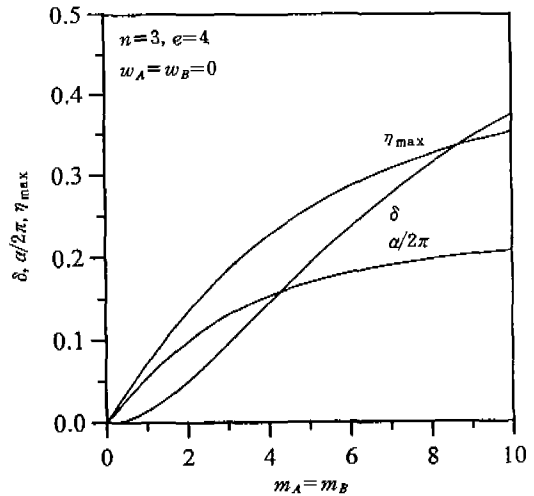


Fig. 11. Responses of beam in pure bending



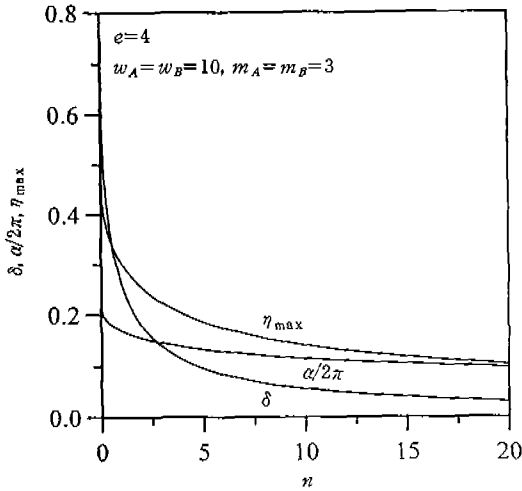


Fig. 12. Effects of section ratio on responses

만,  $\alpha/2\pi$ 와  $\eta_{max}$ 는 작은 하중에서 더 큰 증가율을 보이고 하중이 증가함에 따라서 증가율이 감소함을 알 수 있다.

Fig. 12는 단면비  $n$ 과 변위  $\delta$ ,  $\alpha/2\pi$ ,  $\eta_{max}$  사이의 관계를 그림에 나타낸 것이다.  $n$ 값이 증가함에 따라서 당연히 거동값이 감소함을 알 수 있으며, 작은  $n$ 값에 대하여 감소율은 더 크고  $n$ 값이 증가함에 따라서 감소율은 감소한다. 따라서  $n$ 이 약 10이상에서는  $\delta$ ,  $\alpha/2\pi$ ,  $\eta_{max}$ 가 수평선에 접근하여 모두 일정한 값들에 수렴하는 것을 알 수 있다.

## VI. 결 론

이 논문은 단순지지 변단면 보의 기하학적 비선형 거동해석에 관한 연구이다. 이 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1. 선형분포하중과 단부모멘트하중이 재하되는 단순지지 보의 정확탄성곡선상에 발생하는 휨모멘트식을 구하였다.
2. 이 식을 Bernoulli-Euler 보 이론에 적용하여 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이 미분방정식을 수치적분기법과 시행착오적 방법을 이용하여 수치해석하였다.

3. 본 연구의 기하학적 비선형거동값과 문헌의 거동값이 잘 일치하여 본 연구에서 구한 휨모멘트식, 미분방정식 및 수치해석방법이 기하학적 비선형 거동해석에 매우 타당함을 보였다.

4. 일련의 수치해석을 실시하여 정확탄성곡선, 합응력도 및 하중-변위( $\delta$ ,  $\alpha/2\pi$ ,  $\eta_{max}$ )의 관계를 얻었다.

5. 이러한 수치해석의 결과들은 처짐이 매우 큰 구조물 설계에 그 활용이 가능할 것으로 판단된다.

## 참 고 문 헌

1. Euler, L., 1774, Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maxima Minimive Proprietate Gaudentes, Additamentum I. De Curvis Elasticis, Lausanne and Geneva, 1774.
2. Gospodnetic, D., 1959, "Deflection Curve of a Simply Supported Beam," J. Appl. Mech., Vol. 26, pp.675-676.
3. Rojahan, C., 1968, Large Deflections of Elastic Beams. Thesis for the Degree of Engineer, Stanford University.
4. Lau, J.H., 1981, "Large Deflection of Cantilever Beam," J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 107, No. EM1, pp.259-264.
5. Wang, C.Y., 1981, "Large Deflections of an Inclined Cantilever with an End Load," Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 16, pp.155-163.
6. 이병구, 1990, "캔틸레버보의 과대처짐 해석," 대한토목학회 논문집, 제10권 제1호, pp.1-7.
7. Lee, Byoung Koo, Wilson, J.F. and Oh, Sang Jin, 1993, "Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross-section," Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 28, pp.579-589.
8. Chucheepsakul, S., Thepphitak, G. and Wang, C.M., 1996, "Large Deflection of Simple Variable-Arc-Length Beam Subjected to a Point Load," Struc. Engi. and

- Mech., Vol. 4, pp.49-59.
9. 이병구, 정진섭, 이문수, 박승해, 1994, "3차이론에 의한 변단면 강말뚝의 좌굴하중 및 후좌굴거동," 한국농공학회 논문집, 제36권 제2호, pp.56-66.
  10. Wilson, J.F. and Strong, D.J., 1997, "Elastic Buckling of End-Loaded, Tapered Cantilevered Beams with Initial Curvature," *Struc. Engi. and Mech.*, Vol. 5, No. 3, pp.257-268.
  11. Gupta, A.K., 1985, "Vibration of Tapered Beams," *J. Struc. Div.*, Vol. 111, pp.19-36.
  12. Fertis, D.G., 1993, *Nonlinear Mechanics*, CRC Press.
  13. Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O., 1969, *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons.