

ATM 교환기의 위치 선정 문제에 관한 연구*

김덕성** · 이경식*** · 박성수** · 박경철****

Algorithm for the ATM Switching Node Location Problem*

Deokseong Kim** · Kyungsik Lee*** · Sungsoo Park** · Kyunchul Park****

■ Abstract ■

We consider the development of an integer programming model and algorithm for the ATM switching node location problem. There are two kinds of facilities, hub facilities and remote facilities, with different capacities and installation costs. Each customer needs to be connected to one or more hub facilities via remote facilities, where the hub(remote) facilities need to be installed at the same candidate installation site of hub(remote) facility. We are given a set of customers with each demand requirements, a set of candidate installation sites of facilities, and connection costs between facilities. We need to determine the locations to place facilities, the number of facilities for each selected location, the set of customers who are connected to each installed hub facilities via installed remote facilities with minimum costs, while satisfying demand requirements of each customer.

We formulate this problem as a general integer programming problem and solve it to optimality. In this paper, we develop a branch-and-cut algorithm with path variables. In the algorithm, we consider the integer knapsack polytope and derive valid inequalities.

Computational experiments show that the algorithm works well in the real world situation. The results of this research can be used to develop optimization algorithms to solve capacitated facility location problems.

* 본 연구는 한국과학재단 핵심연구비(971-1012-067-1)의 지원함에 의해 수행되었음.

** 한국과학기술원 산업공학과

*** 한국전자통신연구원

**** 한국통신 통신망연구소

1. 서 론

정보통신 네트워크의 구축에 있어서 관심이 집중되고 있는 광대역 정보통신망(Broadband Integrated Service Digital Network : B-ISDN)은 광대역영상 서비스, 고속데이터 전송등 다양한 광대역 정보통신 서비스를 경제적으로 제공할 수 있도록 표준화시킨 통신망으로서, 기존 전화망, 패킷망, 전용회선망, CATV망 등 서비스별로 구성되어 있는 통신망을 단일 통신능력을 통해 단일망으로 통합 제공해 줄 수 있다. 이 B-ISDN의 구현에 있어서 비동기식 전달 방식(Asynchronous Transfer Mode : ATM)은 B-ISDN이 요구하는 조건들을 만족시키기 위해 적합한 기능을 갖춘 통신 방식이다.

ATM 통신 방식은 기존의 회선 모드의 디지털 통신 방식과 패킷 모드 통신 방식을 통합한 방식으로 ATM 색역 기본 전송 수단으로 삼는다는 점에 있어서 패킷 통신 방식과 밀접한 관계를 갖는데 비해서, ATM 방식은 실시간성 및 CBR(Constant Bit Rate)의 신호까지도 동등하게 취급할 수 있다는 점에서 차이가 있다. [1]

한편 회선 모드 통신 방식에서는 서비스별로 채널을 할당한 후, 이 채널을 통해서 정보 신호를 연속적인 비트열로 전달하지만, ATM 방식은 정보 신호를 잘라서 ATM 셀에 담아 가상 채널을 통해서 전달하므로 가변적인 대역폭 할당이 요구되는 서비스를 제공해 줄 수가 있다. [1]

이러한 B-ISDN 서비스들을 제공하기 위한 ATM 망을 구현할 때 ATM 교환기의 도입은 선행 과제이고 모든 수요자의 수요를 만족시키면서 최소의 비용으로 망을 구축하는 것은 망의 경제성을 고려할 때 반드시 필요하다. 따라서 우리는 이 때 사용되는 교환기 시스템인 ATM-MSS (ATM-MAN Switching System) 노드의 위치 선정 문제(ANLP)를 고려할 필요가 있다. 본 논문에서 고려하고 있는 ATM 서비스는 PVC(Permanant Virtual Connection) 기반의 CBR, VBR(Variable Bit Rate) 특성을 갖는 전용회선 서비스이다. 따라서, QOS는

cell 수준의 CLR(Cell Loss Ratio)가 반영된다. 본 논문에서는 cell 수준의 QOS와 통계적 다중화는 ECR(Equivalent Cell Rate)를 통해서 고려된다고 가정한다. 따라서, 본 논문에서 고려하는 대역폭 요구량은 ECR이다.

그럼 먼저 ATM-MSS노드에 대해서 알아보자. ATM-MSS노드에는 허브 교환노드(Hub Switching Node : HSN)와 원격 교환노드(Remote Switching Node : RSN)가 있는데, 한 대의 HSN에는 여러 대의 RSN이 스타 토폴로지 구조로 연결될 수 있다. RSN은 최대 284 DS1E용량의 수요를 수용하며, DS1E(2.048Mbps), DS3(44.736Mbps) 그리고 STM-1(155.520Mbps)의 사용자 인터페이스를 가진다. HSN은 여러 RSN들을 한 곳으로 집중시켜서 RSN들 간의 전송 및 타 ATM-MSS시스템 간의 ATM 셀 전송을 하게 된다. HSN은 RSN들을 수용함으로써 hub facility에 해당하고 RSN은 여러 수요자들의 수요를 수용함으로써 remote facility에 해당한다. 본 논문에서는 편의상 이들을 각각 hub facility, remote facility라고 부르고, 각각의 facility에 대한 위치 선정 문제를 고려하도록 한다. 이 때 하나의 hub facility 설치후보지에는 여러 대의 hub facility들이 놓일 수 있고, 하나의 remote facility 설치후보지에는 여러 대의 remote facility들이 놓일 수 있다.

이러한 배경에서 ANLP는 다음과 같이 정의된다. 수요자의 집합 (U), remote facility의 설치후보지 집합 (R), 그리고 hub facility의 설치후보지 집합 (H) 이 주어질 때, 각 수요자 $u \in U$ 는 일정거리(L_1) 이내의 하나의 remote facility 설치후보지에 있는 한 대 이상의 remote facility들에 연결되어 r_u (DS1E)만큼의 수요량을 충족시켜야 한다. 이 수요자와 연결된 remote facility들은 일정거리 (L_2) 이내의 하나의 hub facility 설치후보지에 있는 한 대 이상의 hub facility들에 연결되어 수요자에게 공급할 물량을 공급 받아야 한다. 이것은 망 관리상의 효율을 위하여 나타나는 제약이다.

수요자 $u \in U$ 가 remote facility $r \in R$ 로부터

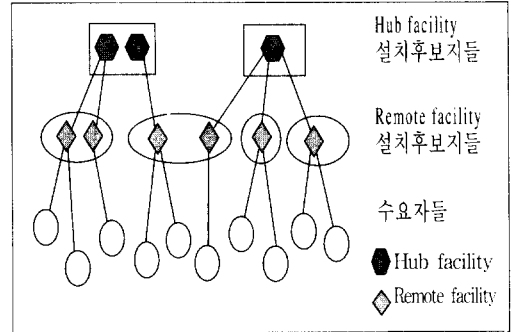
한 단위(DSIE)의 수요를 충족하는 데에는 d_{ur} 만큼의 운반비용이 발생하고, 한 대의 remote facility $\gamma \in R$ 이 hub facility $h \in H$ 에 연결되어 수요를 최대 b_R (DSIE)만큼 충족시키는 데에는 고정 운반비용이 d'_{rh} 만큼 발생한다. 이것은 remote facility와 hub facility간의 진송비용이 주어진 용량하에서 수요가 있으면 양에 관계없이 고정적으로 발생하기 때문이다.

각 remote facility의 설치비용은 F_R , 최대 공급용량은 b_R (DSIE)이다. 각 hub facility의 설치비용은 F_H , 용량은 한 대당 remote facility들의 수용대수 b_H (대)이다($F_R < F_H$). 단, remote facility와 hub facility의 종류는 각각 한 가지이다.

위와 같은 상황에서, 본 문제는 remote facility, hub facility들의 설치비용과 수요자-remote facility 설치후보지, remote facility 설치후보지-hub facility 설치후보지 사이의 운반비용의 합을 최소화하는 계층적 설비들(hub facility와 remote facility)의 설치위치와 설치위치별 설치대수 그리고 수요자-remote facility 설치후보지-hub facility 설치후보지 간의 연결상태를 결정해야 하는 문제이다.

본 문제에서 구하고자 하는 해의 한 예를 그림으로 나타내면 [그림 1]과 같다. 이 그림에는 두 개의 트리 망이 나타나 있는데 하나는 두 대의 hub facility들과 세 대의 remote facility들로 이루어진 망이며 또 하나는 한 대의 hub facility와 세 대의 remote facility들로 이루어진 망이다. 이 그림에서 사각형과 타원들은 각각 hub facility와 remote facility의 설치후보지를 나타내고, 진하게 나타낸 육각형과 마름모들은 각 후보지에 설치된 hub facility와 remote facility들을 나타내며, 도형들간의 직선은 수요자와 remote facility 간, remote facility와 hub facility 간의 논리적인 연결상태를 나타낸다. 이 그림은 각 수요자들이 하나의 remote facility 설치후보지에 놓인 remote facility들을 거쳐서 하나의 hub facility 설치후보지에 놓인 hub facility들에 연결되지만, 하나의 remote facility 설치후보지에 놓인 각

기 다른 remote facility들은 서로 다른 hub facility 설치후보지에 놓인 hub facility들에 연결될 수 있다는 것을 보여준다.



[그림 1] 설비위치 선정 및 수요자 할당 예

ANLP와 연관이 있는 기존 연구 결과들을 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 수요자와 공급설비의 2단계로 이루어진 용량제약이 없는 설비위치선정 문제 [3, 4, 5, 6, 13]와 용량제약이 있는 설비위치선정 문제 [2, 3, 6, 11, 13]가 있다. 이 문제들은 장비를 설치하는 데에 고정비용이 발생하고, 수요자와 공급설비사이에 한 단위의 물량을 공급 받는데 드는 이동비용이 있다는 점에서 이 문제와 유사하지만, 이 문제들에는 수요자가 하나 이상의 설비로부터 물량을 공급 받을 수 있고 공급 받는 물량이 반드시 정수 개일 필요가 없으며, 2 계위 구조라는 면에서 본 문제와 큰 차이가 있다. 다음으로 p-median 문제 [6]는 수요자가 하나의 공급자에게 연결되어야 한다는 점과 이동비용이 있다는 점에서는 이 문제와 유사하지만, 공급자의 개수가 이미 정해져 있고 공급자의 공급능력에 제한이 없으며, 고정비용이 없고, 역시 2 계위 구조라는 데에 많은 차이가 있다. Hierarchical facility location 문제 [6]는 계위가 2 계위 이상이라는 면에서 이 문제에 상당히 근접한 문제이다. 그러나 계층이 수요의 유형별로 구분되는 경우가 많고, ANLP와 유사한 계층 구조라 하더라도, 수요자가 여러 개의 공급설비로부터 물량을 공급 받는 경우가 많다. 이와 같이 기존의

location 문제들과 allocation 문제들은 본 문제와 많은 차이가 있으며, 이들에 대한 해법도 본 문제에 적용하기에는 무리가 있다.

본 문제와 유사한 Neebe and Rao [12]의 연구에서는 수요자가 단일의 설비로부터 물량을 공급 받을 수 있다는 점에서는 유사하지만, 그 문제가 2개의 구조라는 점과 하나의 후보지에 설치할 수 있는 facility의 대수의 상한이 1이라는 점에서 상당한 차이를 보인다. 그리고 이 문제와 직접적으로 관련이 있는 B-ISDN 구축을 위한 ATM 노드 선정문제[9, 15]는 각 수요자가 물량을 공급 받을 수 있는 facility의 대수의 상한이 1이라는 점에서 차이가 있으며 근사해를 제공해 주는 정도이다. 따라서 본 논문에서는 이 ATM-MSS 노드 위치 선정 문제의 최적해를 구하기 위한 해법을 제시하고 그 해법을 이용한 실험결과들을 제시하고자 한다

본 논문의 나머지 구성은 다음과 같이 되어있다. 먼저 2장에서는 문제 기술을 위한 기호들과 최적화 모형을 제시하고 3장에서는 본 문제를 해결하기 위한 절단평면 기법과 알고리즘을 소개하도록 한다. 다음으로 4장에서는 본 해법에 대한 실험 결과들을 보여주고 5장에서는 전체적인 결론과 추후 연구과제들을 소개하겠다.

2. 모 형

앞에서 설명한 문제는 다음과 같이 정수계획문제로 정식화될 수 있다. 먼저 ANLP를 정수계획문제로 모형화 하기 위해 필요한 변수들과 기호들을 정의하도록 하겠다.

y_{rh} : remote facility 설치후보지 r 에 설치되어 hub facility 설치후보지 h 에 연결되는 remote facility들의 수

u_h : hub facility 설치후보지 h 에 설치되는 hub facility 들의 수

v_{urh} : 수요자 u 가 remote facility 설치후보지 r 에 연결되고 r 이 hub facility 설치후보지 h 에

연결되면 1, 아니면 0.

$NR(h)$: hub facility 설치후보지 h 에 연결될 수 있는 remote facility 설치후보지들의 집합

$NU(r)$: remote facility 설치후보지 r 에 연결될 수 있는 수요자들의 집합

본 문제에서 수요자와 remote facility 설치후보지 사이의 거리가 거리제한 L_1 을 초과하거나 remote facility 와 hub facility 후보지들 사이의 거리가 거리제한 L_2 를 초과하면 각각의 운반비용을 충분히 큰 값으로 지정한다고 가정한다. 이때 본 문제를 모형화 하면 다음과 같다. 우리는 이 모형을 표준 모형이라고 부르도록 하겠다.

(ANLP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{h \in H} F_H u_h + \sum_{h \in H} \sum_{r \in NR(h)} \sum_{u \in NU(r)} r_u d_{ur} v_{urh} \\ & + \sum_{h \in H} \sum_{r \in NR(h)} (F_R + d_{rh}) y_{rh} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{h \in H} \sum_{\{r \in NR(h) \mid u \in NU(r)\}} v_{urh} = 1 \\ & \text{for all } u \in U, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{u \in NU(r)} r_u v_{urh} \leq b_R y_{rh} \\ \text{for all } h \in H, r \in NR(h), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r \in NR(h)} y_{rh} \leq b_H u_h \\ \text{for all } h \in H, \end{aligned} \quad (3)$$

$$v_{urh} \in \{0, 1\}, u_h \in Z_+, y_{rh} \in Z_+$$

$$\text{for all } h \in H, r \in NR(h), u \in NU(r),$$

제약식 (1)은 하나의 수요자는 반드시 하나의 remote facility 설치후보지를 거쳐 하나의 hub facility 설치후보지에 연결되어야 함을 나타낸다. 제약식 (2)는 remote facility의 용량제약식을, 제약식 (3)은 hub facility의 용량제약식을 나타낸다.

ANLP는 이론적으로는 NP-hard class에 속하는 매우 어려운 문제임을 증명할 수 있다. 이는 NP-hard class에 속하는, 잘 알려진 PARTITION 문제 [7]를 ANLP로 transform함으로써 보일 수 있다.

정리 1 ANLP는 NP-hard 이다.

(증명) ANLP feasibility 문제가 NP-complete임을 보이도록 하자. ANLP feasibility 문제가 NP에 속함은 분명하다. 이 문제가 NP-complete에 속함은 NP-complete인 PARTITION 문제가 이 문제로 다항식 변환(polynomial transformation) 될 수 있음을 보이면 된다.

PARTITION 문제의 instance, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\sum_{a \in A} s(a) = 2B$ 를 만족하는 양의 정수 $s(a)$, $\forall a \in A$, 양의 정수 B 가 주어졌을 때 ANLP의 instance를 다음과 같이 구성한다. 하나의 hub facility 설치후보지 h , 두 개의 remote facility 설치후보지 m_1, m_2 , $n+2$ 개의 수요자가 주어졌을 때 $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ 에 대하여 수요자 u_i 의 수요량이 $s(a_i)$ 가 되도록 하고 u_{n+1} 과 u_{n+2} 의 수요량은 각각 1이 되도록 한다. 그리고 u_{n+1} 은 m_1 의 facility를 거쳐서 h 에 연결시키고 u_{n+2} 은 m_2 의 facility를 거쳐서 h 에 연결시킨다. 이 때 hub facility의 설치비용 $F_H = 0$, 수용대수 $b_H = 2$ 로 하며, remote facility의 설치비용 $F_R = 1$, 공급용량 $b_R = B + 1$ 로 한다. 그리고 각 수요자와 remote facility 설치후보지 간의 운반비용은 모두 1로 두고 remote facility 설치후보지와 hub facility 설치후보지 간의 운반비용은 모두 0으로 둔다.

이 때 $W \subset U$ 가 m_1 의 facility를 거쳐서 h 에 연결되고 $U \setminus W$ 는 m_2 의 facility를 거쳐서 h 에 연결되어서 총 비용이 $2B+4$ 이하인 W 가 존재하면 $\sum_{a \in A} s(a) = \sum_{a \in A'} s(a) = B$ 인 부분집합 $A' = W$ 가 존재하고 그 역도 성립한다. 따라서 ANLP feasibility 문제는 NP-complete 이다.

본 문제는 본 장에서 소개한 표준모형 외에도 문제를 알기 쉽게 주문제와 부문제로 분해한 분해모형으로도 모형화 할 수 있다. 분해모형의 경우 열생성 기법을 이용한 branch-and-price 알고리즘을 적용해서 해를 얻을 수 있다. 하지만 분해모형에서의 열생성 기법을 이용한 branch-and-price 알고

리즘의 최적해로의 수렴 속도가 표준모형에서의 절단평면 기법을 이용한 branch-and-cut 알고리즘의 최적해로의 수렴 속도보다 훨씬 느리기 때문에 본 논문에서는 표준모형에서의 절단평면 기법을 이용한 branch-and-cut 알고리즘과 그 실험결과에 대해서만 설명하도록 하겠다. 분해모형과 branch-and-price 알고리즘에 대한 자세한 설명들 그리고 실험결과들은 D.Kim [8]을 참조하기 바란다.

3. 절단평면 기법에 의한 해법

본 장에서는 앞에서 제시한 표준모형에 대하여 절단평면 기법 [13]과 branch-and-bound 기법 [13]을 결합한 branch-and-cut 기법을 적용하여 본 문제에 대한 해법을 개발하였다. 먼저 절단평면 기법에 대하여 개략적으로 설명하고 다음으로 해법의 개발에 이용된 절단평면에 대해 설명하도록 하겠다. Branch-and-bound 기법은 비교적 잘 알려진 기법이라고 판단되므로 여기서는 자세히 언급하지 않겠다. 자세한 사항은 Nemhauser and Wolsey [13]를 참고하기 바란다.

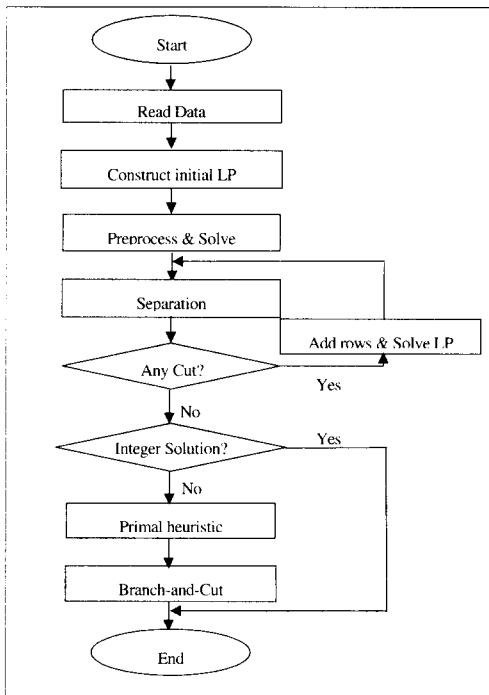
3.1 절단평면 기법

절단평면 기법은 정수계획문제를 해결하기 위해 선형계획완화문제를 반복적으로 해결하면서 선형계획완화문제의 비정수 최적해를 제거할 수 있는 절단평면(cutting plane)을 이용하는 방법이다. 이 기법은 주어진 정수계획문제의 정수가능해들이 정의하는 해집합에 대해 유효한 절단평면들의 집합을 정의하고, 이 절단평면들 중에서 선형계획완화문제의 비정수 최적해를 제거할 수 있는 절단평면을 구하여 선형계획완화문제에 추가하게 된다. 이 때 사용되는 절단평면은 정수가능 해들이 정의하는 convex hull에 대해 facet을 정의하는 것이 가장 바람직하겠고, 그렇지 못한 경우는 가능한 한 high dimensional face를 정의하는 것이 바람직하다.

절단평면 기법의 개략적인 절차는 다음과 같다.

먼저 주어진 정수계획문제의 선형계획완화문제를 푼다. 이 때, 얻어진 해가 정수해이면, 중단하고 그렇지 않으면, 미리 정의된 절단평면들의 집합에서 현재의 비정수해에 의해 위배되는 제약식들을 탐색한다. 만일, 위배되는 제약식이 없거나, 또는 탐색에 실패하였으면 중단하고, 그렇지 않으면, 얻어진 제약식들을 현재의 선형계획완화문제에 첨가한다. 첨가 후, 얻어진 선형계획완화문제를 가지고 위와 같은 과정을 반복한다.

위에서 만일 정수해가 얻어지지 않고, 또는 위배되는 절단평면에 대한 추가탐색이 불가능하면, 현재의 선형계획완화문제를 가지고, branch-and-bound 기법 [13]을 써서 최적정수해를 구하거나, branch-and-cut 기법 [14]을 사용하게 된다. 다면체적 절단평면 기법의 개략적인 절차는 [그림 2]를 참고하기 바란다.



[그림 2] 다면체적 절단평면 기법의 흐름도

Branch-and-cut 기법은 일반적인 branch-and-

bound 기법과 유사하나, enumeration tree의 각 노드에서 해결해야 하는 선형계획문제를 단순히 LP의 해법을 사용하여 해결하지 않고, 절단평면 기법을 사용하여 해결하는 기법이다. 이 경우 일반적인 branch-and-bound 기법에 비해 선형계획문제를 해결하는데 요구되는 시간은 많으나, branch-and-bound의 노드 수를 줄이므로 최적해를 좀 더 빨리 구할 수 있고, LP의 bound를 빠르게 증가시킬 수 있는 장점이 있다. Branch-and-cut 기법의 일반적인 사항에 대해서는 Padberg and Rinaldi [14]을 참조하기 바란다. 본 연구에서는 ANLP의 표준모형을 이용하여, branch-and-cut 알고리즘을 개발하였다.

3.2 Preprocessing

ANLP의 제약식 (1)과 (2)를 통해서 모든 수요자의 수요를 충족시키기 위해서 필요한 최소한의 remote facility의 대수를 구할 수 있으며, 이를 통해서 최소로 필요한 hub facility의 대수도 구할 수 있게 된다. 이로부터 유도된 다음의 두 유효부등식을 첨가함으로써 선형계획완화문제의 bound를 강화시킬 수 있다.

정리 2 다음의 부등식은 ANLP의 정수가능 해들이 정의하는 해집합에 대하여 유효하다.

$$\sum_{h \in H} \sum_{r \in NR(h)} y_{rh} \geq \left\lceil \sum_{u \in U} r_u / b_R \right\rceil \quad (4)$$

(증명) Remote facility의 최대 공급용량이 b_R 이고, 총 수요자의 수요가 $\sum_{u \in U} r_u$ 이므로 이 수요를 주어진 remote facility의 공급용량으로 만족시키기 위해서는 최소한 $\left\lceil \sum_{u \in U} r_u / b_R \right\rceil$ 대 만큼의 remote facility 들이 설치되어야 한다.

정리 3 다음의 부등식은 ANLP의 정수가능 해들이 정의하는 해집합에 대하여 유효하다.

$$\sum_{h \in H} u_h \geq \left\lceil \left\lceil \sum_{u \in U} r_u / b_R \right\rceil / b_H \right\rceil \quad (5)$$

(증명) 모든 수요자는 하나의 remote facility 설치 후보지를 거쳐서 하나의 hub facility 설치후보지에 연결되어야 하고, 이 수요를 충족시키기 위해 최소 $\lceil \sum_{u \in U} r_u / b_R \rceil$ 대의 remote facility가 설치되어 hub facility에 연결되어야 한다는 것을 알 수 있다. 그런데 각 hub facility의 remote facility 최대 수용 대수가 b_H 이므로 최소 $\lceil \lceil \sum_{u \in U} r_u / b_R \rceil / b_H \rceil$ 대 만큼의 hub facility들이 설치되어야 한다.

3.3 Special type of C-G inequality

용량제약이 있는 설비들을 고려하는 설비배치문제에서는 아래의 (0,1) 배낭문제에 나타나는 용량 제약식을 고려하게 된다.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b \\ & x \in B^n \end{aligned}$$

이 문제에서 용량 제약식의 우변이 상수인 경우에는 그 연구 결과들이 이미 많이 밝혀져 있으며 그 결과들에 대한 상세한 설명은 Nemhauser and Wolsey [13]를 참고하기 바란다. 하지만 설비의 용량을 정수배로 증가시킬 수 있는 설비배치문제나 같은 용량의 설비를 여러 대 배치할 수 있는 문제에서는 우변이 단순히 상수가 아니고 상수를 계수로 가지는 정수형 변수가 되며 이러한 문제에 대한 연구 결과들은 거의 알려져 있지 않다.

본 연구에서는 이러한 설비의 용량을 정수배로 증가시킬 수 있는 문제의 제약식에 대하여 고려하였다. 본 문제에서는 이러한 제약식이 각 remote facility 설치후보지별 용량제약식 (2)로 나타나게 되는데, 이 제약식과 변수의 정수제약으로부터 정의되는 정수가능 해들의 convex hull P_1 에 대해 유효한 절단평면을 고안하여 알고리즘의 개발에 사용하였다.

$$P_1 = \text{conv}\{x \in B^n, y \in Z_+ : \sum_{j \in N} a_j x_j - \lambda y \leq 0\}$$

단 λ 와 $a_j, j \in N$ 은 양의 정수이다.

사용되어진 절단평면은 다음과 같은 형태의 부등식으로서 Chvatal-Gomory 부등식 [13]의 특별한 형태임을 알 수가 있다.

$$\sum_{j \in J} \lfloor u_0 a_j + u_j \rfloor x_j + \sum_{j \in \bar{J}} \lfloor u_0 a_j \rfloor x_j + \lfloor -u_0 \lambda \rfloor y \leq \lfloor \sum_{j \in J} u_j \rfloor, \quad (6)$$

단, $J \subset N, \bar{J} = N \setminus J, u_0 \geq 0, u_j \geq 0, \forall j \in J$.

Chvatal-Gomory 부등식은 Chvatal-Gomory rounding method에 의해 생성되는 부등식을 일컫는 것인데 이 절차는 다음과 같다. 먼저 문제의 모형화에서 나타나는 부등식에 대하여 변수들이 정수이면, 부등식의 양변에 비음의 실수를 곱하여도 유효하며, 다음으로 비음의 실수가 곱해진 부등식의 좌변 각 항의 계수를 내림한 후 우변을 내림해도 얻어진 부등식은 원래의 문제에 대해 역시 유효하게 되는데 이러한 과정을 거쳐서 원래의 문제에 유효한 부등식을 생성해 낼 수가 있다. 본 문제에서도 부등식 (6)을 위와 같은 방법으로 얻게 되는데, 먼저 제약식 $\sum_{j \in N} a_j x_j - \lambda y \leq 0$ 에 비음의 실수 u_0 를 곱하고, 각각의 제약식 $x_j \leq 1, \forall j \in J$ 에 비음의 실수 u_j 를 곱하여 이 부등식들을 변끼리 더한 후 얻어지는 부등식의 좌변 계수들을 내림하고 그 다음으로 우변 상수를 내림하여 얻게 된다. 이렇게 하여 얻어진 부등식 (6)은 P_1 에 대해 유효한 부등식이며 Chvatal-Gomory 부등식의 특별한 한 형태가 됨을 알 수 있다.

3.4 Separation

Separation은 주어진 문제의 정수가능 해들이 정의하는 해집합의 구조분석을 통하여 얻어진 절단평면들의 집합에 대해서, 선형계획완화문제의 하나의 비정수 최적해가 위배하는 제약식을 찾아내는 과정으로서 본 절에서는 부등식 (6)에 대한 separa-

tion 에 대해 기술하였다.

먼저 $\sum_{j \in N} a_j x_j^* - \lambda y^* \leq 0, 0 \leq x_j^* \leq 1, \forall j \in N$ 인 비정수해 (x^*, y^*) 와 $J^* = \{j \in N : x_j^* > 0\}$ 가 주어졌다고 가정하자. 그러면 (x^*, y^*) 에 의해 위배되는 부등식 (6)을 찾기위한 separation 문제(SEP)은 다음과 같이 모형화할 수 있다.

SEP :

$$\max \sum_{j \in J} \left[u_0 a_j + u_j \right] x_j^* + \left[-u_0 \lambda \right] y^* - \left[\sum_{j \in J} u_j \right]$$

s.t. $u_0 \geq 0, u_j \geq 0, \text{ for all } j \in J^*$

SEP의 하나의 optimal solution $u_0^* \geq 0, u_j^*, \forall j \in J^*$ 를 구했다고 가정하자. 만약 최적목적함수의 값이 0보다 작거나 같다면 (x^*, y^*) 에 의해 위배되는 부등식 (6)이 없다는 것을 알 수 있으며, 0보다 크다면, 다음의 부등식

$$\sum_{j \in J} \left[u_0^* a_j + u_j^* \right] x_j + \sum_{j \in N \setminus J} \left[u_0^* a_j \right] x_j + \left[-u_0^* \lambda \right] y \leq \left[\sum_{j \in J} u_j^* \right]$$

이 (x^*, y^*) 에 의해 위배됨을 알 수 있다.

다음으로 $\left[-u_0 \lambda \right]$ 의 값이 정해진 구간 내에 속하는 양의 정수 p_0 에 대해 $\left[-u_0 \lambda \right] = -p_0$ 로 고정되었다고 가정하자. 그러면 이 상태에서 SEP은 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

SEP(p_0) :

$$\max \sum_{j \in J} \left[u_0 a_j + u_j \right] x_j^* + \left[-u_0 \lambda \right] y^* - \left[\sum_{j \in J} u_j \right]$$

s.t. $p_0 - 1 < u_0 \lambda \leq p_0$
 $u_j \geq 0, \text{ for all } j \in J^*$

여기서 $\hat{u}_0, \hat{u}_j, \forall j \in J^*$ 가 SEP(p_0)의 하나의 최적해라고 가정하자. 그러면 $\left[-u_0 \lambda \right] = -p_0$ 로 고정되었고 $u_0 \lambda \leq p_0$ 이므로 $u_0^* = p_0/\lambda, u_j^* =$

$\hat{u}_j, \forall j \in J^*$ 또한 SEP(p_0)의 최적해임을 알 수 있다. 이로부터 SEP(p_0)에서 $u_0 = p_0/\lambda$ 로 고정할 수 있다. $u_0 = p_0/\lambda$ 로 고정된 상태에서는 $u_0 a_j = p_j + f_j, \forall j \in J^*$ 로 나타내어질 수 있다. 단, $0 \leq (f_j = q_j/\lambda) < 1, \forall j \in J^*$ 이고 p_j 와 q_j 는 비음의 정수들이다. 그러면, SEP(p_0)은 다음과 같이 변형되어질 수 있다.

SEP'(p_0) :

$$\max \sum_{j \in J} p_j x_j^* - p_0 y^* + \sum_{j \in J} \left[f_j + u_j \right] x_j^* - \left[\sum_{j \in J} u_j \right]$$

s.t. $u_0 \geq 0, \text{ for all } j \in J^*$

정리 4 SEP'(p_0)에는 $u_j \in \{0, 1 - f_j\}, \forall j \in J^*$ 인 최적해가 존재한다.

(증명) SEP'(p_0)에서 어떤 $u_j = n + \alpha$ (단 n 은 비음의 정수, $0 \leq \alpha < 1$)가 포함된 항들의 합은 $\left[f_j + n + \alpha \right] x_j^* - \left[\sum_{j \neq j} u_j + n + \alpha \right] = \left[f_j + \alpha \right] x_j^* - \left[\sum_{j \neq j} u_j + \alpha \right] + n x_j^* - n$ 이다. 이때 $x_j^* \leq 1, \forall j \in J^*$ 이므로 $n x_j^* - n \leq 0$ 이다. 따라서 SEP'(p_0)은 $n=0$ 즉, $u_j < 1$ 인 최적해를 가지게 된다. 이때 어떤 $u_j = \alpha(1 - f_j) < \alpha < 1$ 일 때 u_j 가 포함된 항들의 합은 $\left[f_j + \alpha \right] x_j^* - \left[\sum_{j \neq j} u_j + \alpha \right]$ 이며, $u_j = 1 - f_j$ 일 때 u_j 가 포함된 항들의 합은 $\left[f_j + 1 - f_j \right] x_j^* - \left[\sum_{j \neq j} u_j + 1 - f_j \right]$ 이다. 그런데 $\left[f_j + \alpha \right] x_j^* = \left[f_j + 1 - f_j \right] x_j^* = x_j^*$ 이며 $\left[\sum_{j \neq j} u_j + \alpha \right] \geq \left[\sum_{j \neq j} u_j + 1 - f_j \right]$ 이므로 $\left[f_j + \alpha \right] x_j^* - \left[\sum_{j \neq j} u_j + \alpha \right] \leq \left[f_j + 1 - f_j \right] x_j^* - \left[\sum_{j \neq j} u_j + 1 - f_j \right]$ 이 성립한다. 따라서 $u_j = 1 - f_j$ 인 최적해를 가진다. 또한, 어떤 $u_j = \alpha(0 < \alpha < 1 - f_j)$ 일 때 u_j 가 포함된 항들의 합은 $\left[f_j + \alpha \right] x_j^* - \left[\sum_{j \neq j} u_j + \alpha \right]$ 이며, $u_j = 0$ 일 때 u_j 가 포함된 항들의 합

은 $\lfloor f_j \rfloor x_j^* - \lfloor \sum_{j \neq j} u_j \rfloor$ 이다. 그런데 $\lfloor f_j + \alpha \rfloor x_j^* = \lfloor f_j \rfloor x_j^* = 0$ 이며 $\lfloor \sum_{j \neq j} u_j + \alpha \rfloor \geq \lfloor \sum_{j \neq j} u_j \rfloor$ 이므로 $\lfloor f_j + \alpha \rfloor x_j^* - \lfloor \sum_{j \neq j} u_j + \alpha \rfloor \leq \lfloor f_j \rfloor x_j^* - \lfloor \sum_{j \neq j} u_j \rfloor$ 이 성립한다. 따라서 $u_j = 0$ 인 최적해를 가진다. 따라서 위의 정리는 성립한다.

따라서 위의 정리를 이용하여 다음의 SP(p_0)로부터 SEP(p_0)를 해결할 수 있다.

$$\text{SP}(p_0) : \max \sum_{j \in J} x_j^* w_j - \left[\sum_{j \in J} (1 - f_j) w_j \right] + C$$

s.t. $w_j \in \{0, 1\}$ for all $j \in J$

단, 상수 $C \equiv \sum_{j \in J} p_j x_j^* - p_0 y^*$ 이다.

위의 문제 SP(p_0)는 NP-hard class에 속한다는 것을 보일 수 있으며, 또한 최적해를 구할 수 있는 pseudo-polynomial time 알고리즘이 존재한다는 것을 보일 수 있다. 이에 대한 자세한 사항 및 부등식 (6)의 이론적인 분석과 결과들은 KLee [10]을 참조하기 바란다.

위의 SP(p_0)를 정해진 구간내의 p_0 를 고정하면서 순차적으로 해결하여 y 변수의 계수가 일정한 구간 내에 속하는 정수값을 가지는 부등식 (6)을 찾아낼 수 있게 된다. 본 연구에서는 $0 \leq p_0 \leq |J^*|$ 로 정하여 부등식 (6)을 separation 하였다.

3.5 Primal heuristic

만약 ANLP에 대한 하나의 정수가능 해를 구했다면, 이는 ANLP의 최적 목적함수 값에 대한 상한을 제공해 줄 뿐만 아니라, 이 정수가능 해의 quality가 좋을수록 branch-and-cut 알고리즘의 수행시 enumeration tree의 크기를 줄여줄 가능성이 크다. 본 연구에서는 ANLP에 대한 하나의 정수가능 해를 구하기 위해 주어진 선형계획완화문제의 비정수 최적해를 이용하여 다음과 같은 primal heuristic을

고안하여 이용하였다. [그림 3]은 본 알고리즘에서 사용한 primal heuristic을 나타낸다.

```

For  $v_{urh}$ 의 값이 정수가 아닌 모든  $u \in U$ 에 대하여
  If  $v_{urh} \geq 0.8$ 인  $v_{urh}$ 가 존재하면,  $v_{urh} = 1$ 
  Else 수요자  $u$ 에서 remote facility 설치후보지를 거쳐 hub facility 설치후보지에 연결되는 path중 수요를 충족시키는데 필요한 수송비용이 최소가 되는 path를 찾아서  $v_{urh} = 1$ 로 둔다.
End
Calculate  $y_{rh} = \left\lceil \sum_{u \in NR(r)} r_u v_{urh} / b_R \right\rceil$ 
for all  $h \in H, r \in NR(h)$ 
Calculate  $u_h = \left\lceil \sum_{r \in NR(h)} y_{rh} / b_H \right\rceil$  for all  $h \in H,$ 
    
```

[그림 3] Primal heuristic

본 연구에서 개발된 branch-and-cut 알고리즘의 구현시에는, enumeration tree의 root node에서 branching을 수행하기 직전에 얻어진 선형계획완화문제의 비정수 최적해를 이용하여 primal heuristic을 수행하고, 그 이후에는 enumeration tree의 각 노드를 탐색할 때, 매 30번째 노드마다, branching을 수행하기 직전에 primal heuristic을 적용하였다.

3.6 구현상의 고려사항

현재의 선형계획완화문제의 최적해가 정수해가 아니고 또한 위배되는 제약식 (6)이 없을 경우에 branching을 통해 enumeration tree 상에서 child 노드를 생성하는데, 이 때 branching을 수행할 변수는 다음과 같이 선택하였다. 표준모형에서의 변수는 이진변수와 정수변수로 이루어져 있는데, 이 중 이진변수에 우선순위를 두었고, 같은 우선순위 내에서는 현재값의 소수부분이 0.5에 가장 가까운 결정변수에 우선순위를 두고 branching 할 변수를

선택하였다. 선택된 변수를 x 라하고 그 값을 k 라 할 때, enumeration tree 상에서 $x \leq \lfloor k \rfloor$ 인 노드와 $x \geq \lfloor k \rfloor + 1$ 인 노드의 두 child 노드를 생성하였다. Enumeration tree 에서의 노드 탐색방법은 best bound rule [13]을 이용하였으며, 개발된 알고리즘의 구현에는 상용소프트웨어 CPLEX callable version 4.0에서 제공하는 Library 함수들을 사용하였다.

4. 실험결과

4.1 실험 데이터 및 실험환경

본 연구에서는 <표 1>과 같이 실험 데이터를 구성하였다. 이 표에서 처음 세 열들은 hub facility 설치후보지의 수, remote facility 설치후보지의 수, 수요자의 수를 나타낸다. 다음 두 열들은 hub facility 설치후보지와 remote facility 설치후보지 간의 연결 가능한 link의 수와 remote facility 설치후보지와 수요자 사이의 연결 가능한 link의 수를 나타낸다. 마지막 열은 각 class에 해당하는 실험 데이터의 수이다. 이 표에서 (1)-(11)은 임의로 생성한 실험 데이터 class로서, hub facility 설치후보지 수와 remote facility 설치후보지 수의 쌍은 (2, 8), (3, 10), (5, 15)이며, 수요자의 수는 20개, 30개, 40개, 50개이다. 각 열의 class는 각각 15개 씩 이루어져 있다. (12)-(13)은 국내 모 통신회사 측으로부터 제공 받은 실험 데이터이다.

임의로 생성한 데이터에 대하여 각 수요자의 수요치는 $[3, 0.75 \times \text{The Capacity of remote facility}]$ 의 이산일양분포를 가지도록 생성하였다. 수요자와 remote facility 설치후보지 그리고 remote facility 설치후보지와 hub facility 설치후보지 사이의 운반비용은 가로로 길이가 $[0, 30]$, 세로로 길이가 $[0, 30]$ 인 Euclidean 평면상에서 수요자 각각에 대해 하나의 점을 생성하고, 이들 중에서 다시 임의로 remote facility 설치후보지들, hub facility 설치후보지들을 선택하고 이들 간의 Euclidean distance

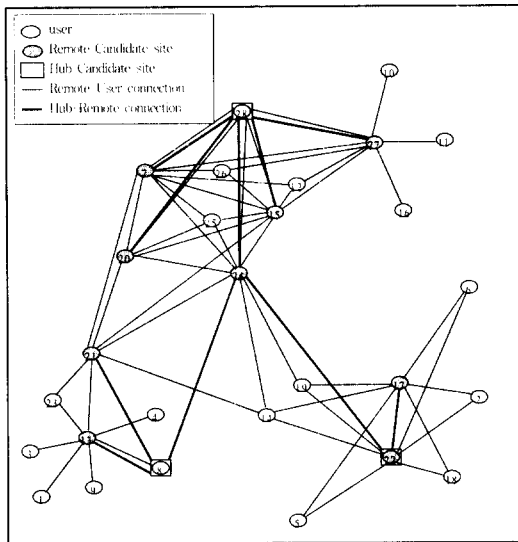
를 구하여 단위 수요의 운반비용으로 정하였다. 이는 운반비용이 거리에 비례한다는 것을 가정한 것이다.

실험에서 사용된 remote facility의 수용 용량은 284(DS1E), hub facility의 remote facility 수용대수는 5(remote facilities/hub facility)로 설정하였다. 그리고 remote facility와 hub facility 사이의 가격은 현실을 반영하여 1 : 3의 비용 비를 가지도록 remote facility의 비용을 100, hub facility의 비용을 300으로 설정하였다. 전산실험은 Pentium PC(200MHz)에서 수행되었다.

<표 1> 실험 데이터들의 특성

	#Hub	#Remote	#User	#Hub-Remote	#Remote-User	#Problem
(1)	2	8	20	16	160	15
(2)	2	8	30	16	240	15
(3)	2	8	40	16	320	15
(4)	3	10	20	30	200	15
(5)	3	10	30	30	300	15
(6)	3	10	40	30	400	15
(7)	3	10	50	30	500	15
(8)	5	15	20	75	300	15
(9)	5	15	30	75	450	15
(10)	5	15	40	75	600	15
(11)	5	15	50	75	750	15
(12)	2	9	28	10	72	1
(13)	3	9	28	11	72	1

[그림 4]는 실험 데이터 (13)의 특성을 나타내는 graph로서 각 facility들의 설치후보지와 수요자들과의 연결 가능성을 나타낸다. 사각형은 hub facility 설치후보지를 나타내며, 검은 칠한 원은 remote facility 설치후보지를, 밝은 원은 수요자를 나타낸다. 또한 가는 직선은 이 직선에 연결된 remote facility 설치후보지와 수요자가 서로 연결이 가능함을 나타내고 굵은 직선은 이 직선에 연결된 hub facility 설치후보지와 remote facility 설치후보지에 각각 놓이는 facility들이 서로 연결이 가능함을 나타낸다.



[그림 4] 실험 데이터 (13)의 수요자와 후보지간의 연결가능성 Graph

4.2 성능 기준

본 연구에서 개발되어진 알고리즘들이 다양한 문제들에 대해서 얼마나 효과적인가를 시험하기 위한 성능기준으로는 시간, branch-and-bound tree 상에서의 생성된 node 수 등으로도 가늠해 볼 수 있겠지만, 시간은 실험에 사용되어진 컴퓨팅환경에 따라 달라질 수 있는 것이며 node 수는 branching rule 이라든지 탐색방법등에 따라 변할 수 있는 것이다. 따라서 컴퓨팅환경이나 branch-and-bound 에서의 여러가지 rule들에 좀 더 영향을 덜 받는 기준으로 다음을 고려하게 된다.

$$\text{Gap0}(\%) = (\text{OPT} - \text{Initial LP}) / \text{OPT} \times 100$$

여기서 OPT는 정수최적해에 해당되는 목적함수 값을 나타내며, Initial LP는 선형계획완화문제의 최적목적함수 값을 나타낸다. Gap0가 의미하는 바는 선형계획완화문제의 최적목적함수 값과 정수최적해에 해당되는 최적목적함수 값의 상대적인 차이를 나타내며, 일반적으로 이 값이 적을수록 branch-and-bound에서 생성되는 node의 수가 작아진다고

할 수 있으며, 이에 따라 짧은 시간내에 문제를 해결할 수 있을 것이라고 예상할 수 있다. 그리고 3장에서 제시한 preprocessing이 어느 정도의 성능을 나타내는 지를 추정하기 위하여 다음과 같은 기준을 사용하였다.

$$\text{Gap1}(\%) = (\text{OPT} - \text{Preprocessed LP}) / \text{OPT} \times 100$$

여기서 Preprocessed LP는 선형계획완화문제에서 preprocessing을 거친 직후의 최적목적함수 값을 나타낸다. 그리고 이 두 기준과 더불어 preprocessing과 C-G 절단평면의 성능을 평가하기 위해서 다음과 같은 기준을 사용하였다.

$$\text{Gap2}(\%) = (\text{OPT} - \text{Final LP}) / \text{OPT} \times 100$$

위의 식에서 Final LP는 branch-and-cut 알고리즘에서 enumeration tree의 root node에서 branching을 수행 하기 직전의 선형계획완화문제의 최적목적함수 값을 나타낸다. 다음으로 primal heuristic의 성능을 평가하기 위하여 다음과 같은 기준을 사용하였다.

$$\text{Gap3}(\%) = (\text{PRIMAL} - \text{OPT}) / \text{OPT} \times 100$$

여기서 PRIMAL은 enumeration tree의 root node에서 branching을 수행 하기 직전의 선형계획완화문제의 해를 이용하여 primal heuristic을 실행하였을 때 구한 정수해의 목적함수 값이다. 그 외의 기준으로는 앞에서 언급한 바와 같이 시간, enumeration tree의 node 수 등을 꼽을 수 있다.

4.3 알고리즘의 실험결과

<표 2>는 branch-and-cut 알고리즘을 적용했을 때 얻어진 실험결과를 보여주고 있다. 이 표에서 #CUT 열은 알고리즘을 수행했을 때 생성된 C-G 절단평면의 개수의 평균치를 나타내며, #LP 열은 알고리즘이 최적해를 구할 때까지 풀 선형계획완화문제의 개수의 평균치이다. Gap0, Gap1, Gap2,

Gap3 열들은 앞 절에서 설명한 성능 기준들이며, #Node 열은 enumeration tree에서 생성된 평균 node 수를 나타내며, Time 열은 알고리즘을 수행하는 데 걸린 총 소요시간의 평균치(초)를 나타낸

〈표 2〉 Computational Results of Branch-and-Cut Algorithm

Data Set		#CUT	#LP	Gap0 (%)	Gap1 (%)	Gap2 (%)	Gap3 (%)	#Node			Time(sec)		
								CPLEX0	CPLEX1	B&C	CPLEX0	CPLEX1	B&C
[1]	Avg	19.7	11.3	0.82	0.41	0.26	0.06	482.7	181.4	3.6	2.03	1.04	2.42
	Max	38.0	28.0	1.78	0.99	0.99	0.63	3,003.0	1,381.0	10.0	9.84	5.66	5.00
	Min	10.0	4.0	0.36	0.00	0.00	0.00	47.0	22.0	0.0	0.44	0.44	1.10
[2]	Avg	33.3	19.2	0.52	0.20	0.15	0.05	10,760.5	211.6	4.9	52.04	1.37	14.54
	Max	67.0	68.0	0.79	0.51	0.49	0.41	143,874.0	715.0	32.0	698.59	3.51	35.81
	Min	18.0	10.0	0.21	0.00	0.00	0.00	45.0	83.0	0.0	0.55	0.77	6.48
[3]	Avg	64.3	57.2	0.32	0.10	0.08	0.36	5,913.9	1,857.5	22.3	33.05	11.48	79.83
	Max	369.0	491.0	0.47	0.29	0.28	4.25	57,857.0	24,458.0	232.0	319.06	146.50	660.21
	Min	16.0	7.0	0.18	0.00	0.00	0.00	121.0	114.0	0.0	0.99	1.10	10.00
[4]	Avg	23.9	13.5	1.26	0.76	0.44	0.66	347.8	199.0	5.2	1.94	1.47	1.96
	Max	47.0	22.0	2.84	1.98	1.22	3.33	1,121.0	527.0	10.0	5.54	3.24	2.86
	Min	16.0	6.0	0.67	0.00	0.00	0.00	37.0	70.0	2.0	0.55	0.82	1.09
[5]	Avg	50.2	36.7	0.78	0.38	0.26	1.48	3,200.4	365.5	15.6	23.56	2.98	13.61
	Max	174.0	231.0	1.40	1.09	0.79	11.78	13,150.0	759.0	122.0	89.59	5.55	73.77
	Min	19.0	9.0	0.37	0.03	0.00	0.00	137.0	68.0	0.0	1.71	0.99	2.97
[6]	Avg	89.5	98.1	0.59	0.31	0.23	0.86	6,109.7	632.2	60.9	68.00	6.50	105.20
	Max	546.0	763.0	0.88	0.53	0.41	9.94	47,801.0	3,421.0	606.0	① 627.36	① 30.76	941.26
	Min	21.0	12.0	0.40	0.00	0.00	0.00	304.0	90.0	2.0	2.92	1.31	10.06
[7]	Avg	88.6	66.8	0.59	0.38	0.22	0.35	13,828.9	4,167.8	29.1	150.63	48.97	102.82
	Max	181.0	198.0	1.16	1.10	0.43	2.52	89,138.0	30,304.0	100.0	1,003.49	361.60	①271.76
	Min	20.0	11.0	0.33	0.00	0.00	0.00	223.0	91.0	0.0	2.86	1.70	17.30
[8]	Avg	29.7	24.7	3.62	2.94	2.25	0.30	2,749.8	1,134.6	15.5	25.23	12.90	3.86
	Max	46.0	74.0	6.89	5.85	4.43	3.62	7,669.0	5,119.0	62.0	68.44	54.65	10.84
	Min	19.0	11.0	2.25	1.40	0.90	0.00	312.0	128.0	6.0	3.30	1.93	1.74
[9]	Avg	46.8	40.9	1.98	1.46	1.12	0.16	8,751.3	2,689.2	22.7	124.57	42.67	10.42
	Max	95.0	149.0	2.60	2.06	1.76	0.71	38,600.0	6,496.0	100.0	① 545.41	95.52	34.19
	Min	20.0	14.0	1.20	0.74	0.48	0.00	865.0	234.0	8.0	11.97	4.45	3.37
[10]	Avg	88.3	50.8	1.30	0.94	0.69	0.94	23,323.3	9,803.2	78.6	794.99	471.82	75.16
	Max	541.0	212.0	1.91	1.58	1.29	9.01	75,913.0	39,154.0	784.0	⑤3,544.34	②3,593.56	①724.97
	Min	30.0	20.0	1.01	0.54	0.42	0.00	2,161.0	564.0	8.0	36.42	12.74	10.04
[11]	Avg	121.3	134.6	0.91	0.66	0.44	0.65	20,872.8	9,341.6	84.8	813.87	597.40	135.29
	Max	547.0	711.0	1.24	0.99	0.71	2.77	47,860.0	36,301.0	496.0	③3,532.59	②2,782.75	921.86
	Min	33.0	15.0	0.54	0.12	0.02	0.00	4,155.0	413.0	6.0	95.96	10.41	13.05
[12]		60.0	29.0	5.64	4.88	0.57	12.18	2,040.0	1,858.0	8.0	11.48	10.11	6.54
[13]		102.0	257.0	9.40	8.81	2.81	14.07	1,615.0	1,419.0	182.0	9.72	9.45	38.00

(circle : the number of unsolved problems within 3 hours)

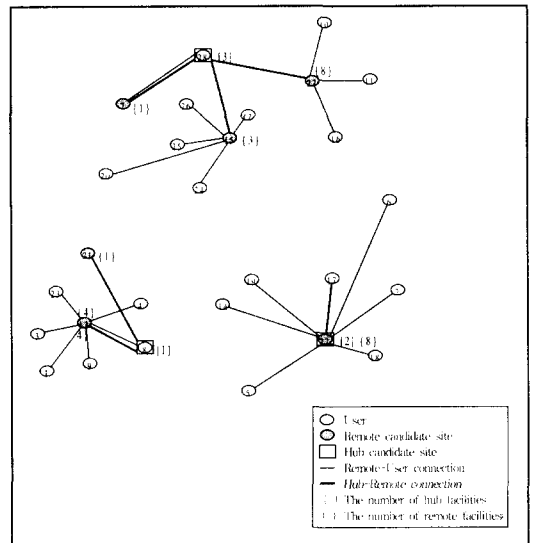
다. CPLEX0 오픈 상용 branch-and-bound code인 CPLEX를 이용해 단순히 branch-and-bound를 적용한 경우이고, CPLEX1 오픈 preprocessing을 거친 이후에 CPLEX를 이용해 branch-and-bound를 적용한 경우이며, B&C는 preprocessing을 거친 이후 branch-and-cut 알고리즘을 적용한 결과이다.

이 실험결과로부터 Gap0가 평균 1.23% 정도에서 최대 9.4% 정도임을 알 수 있고 전체적으로 이 값은 상당히 작다고 할 수 있다. 그리고 preprocessing을 거친 이후에 이 값은 Gap0의 30% 정도가 줄어들었는데 이것은 preprocessing이 본 문제의 bound를 상당히 개선시켰음을 나타낸다. 또한 preprocessing 이후 절단평면을 추가하고서 본 문제의 Gap2를 측정할 결과 다시 Gap1의 32%정도가 줄어들어 전체적으로 절단평면까지 추가한 후에 본 문제의 Gap2은 0.15%~2.81% 정도가 되었다. 그리고 enumeration tree의 root node에서 primal heuristic을 사용했을 때 구한 해와 최적해와의 Gap3는 평균 3.28%이며 임의로 생성한 데이터에서는 0.35% 정도가 되어 최적해에 근접한 해를 제공해 준다는 것을 알 수 있다.

다음으로 branch-and-cut 알고리즘의 적용결과, enumeration tree에서 생성된 node 수와 소요된 시간(초)에 대해 알아보도록 하겠다. 먼저 node 수에 대해서 알아 보자. Preprocessing의 추가로 인하여 나타나는 결과들은 #Node 열의 CPLEX0 항과 CPLEX1 항을 비교하면 알 수 있다. CPLEX1을 적용한 경우 CPLEX0보다 생성 node 수에서 평균 11배에서 최대 50배 정도까지 적게 생성되는 차이를 보이고 있다. 다음으로 C-G 절단평면의 추가로 인하여 나타나는 결과들은 #Node 열의 CPLEX1항과 B&C 항을 비교해 보면 알 수가 있다. B&C는 CPLEX1보다 생성 node 수에서 평균 75배에서 최대 230배 정도까지 적게 생성되는 차이를 보이고 있다. 이러한 결과들은 preprocessing과 C-G 절단평면이 enumeration tree에서 탐색해야 할 노드들을 상당히 줄여준다는 결과를 나타내고 있다.

다음으로 소요되는 시간들을 분석해 보자. 비교

적 문제의 size가 작은 (1)~(7)까지는 preprocessing을 거친 CPLEX1이 가장 빠른 시간안에 문제들을 풀었지만 (6)의 경우처럼 풀지 못하는 경우도 있었다. 이러한 결과들은 B&C는 필요한 C-G 절단평면을 찾아서 추가하기 위해서 많은 시간들을 소요하기 때문에 나타나는 결과이다. 하지만 비교적 문제의 size가 큰 (8)~(11)에서는 B&C가 CPLEX0보다 월등히 빨리 수행되며 CPLEX1보다도 평균 4.53배에서 최대 6배 정도까지 빨리 풀었다. 그리고 CPLEX0 와 CPLEX1은 상당한 시간(3시간)을 소요하고도 최적해를 찾지 못하는 경우가 많은 반면 B&C는 최적해를 상대적으로 잘 찾아서 본 알고리즘의 효율성을 잘 보여주고 있다.



[그림 5] 문제 (13)의 최적해

[그림 5]는 실험 데이터 (13)에 대해서 실험한 결과 나타난 최적해의 한 예로서 밝게 칠한 원은 각 수요자들을 나타내고 사각형은 선택된 hub facility의 설치후보지를 나타내고 사각형 안의 원은 이 설치후보지에 있는 수요자를 나타내며 사각형 옆에 있는 대괄호 안의 숫자는 이 설치후보지에 설치될 hub facility의 대수를 나타낸다. 검게 칠한 원은 수요자이면서 선택된 remote facility의 설치후보지를

나타내고 검게 칠한 원의 옆에 있는 중괄호 안의 숫자는 그 때 설치될 remote facility의 대수를 나타낸다. 가는 직선은 수요자와 remote facility 사이의 연결된 상태를 나타내고, 굵은 직선은 remote facility와 hub facility 사이의 연결된 상태를 나타낸다.

5. 결 론

본 연구에서는 ATM-MSS 교환기의 위치 선정 문제(ANLP)에 대한 정수계획모형을 제시하고 최적해를 구하기 위한 알고리즘을 개발하였다. 개발되어진 알고리즘은 표준모형에서 절단평면기법을 이용한 branch-and-cut 알고리즘이며, 본 문제의 다른 해법으로 분해모형에서 branch-and-price 알고리즘도 개발할 수 있다.

본 논문에서 제시된 모형과 branch-and-cut 알고리즘을 다양한 실험 데이터들에 적용하여 전산 실험을 수행한 결과, 현실적인 크기의 문제를 잘 해결하였으며 본 문제에 대한 타당한 모형과 알고리즘으로 제시되었다.

본 연구에서 개발된 모형과 알고리즘은 계층적 설비배치 구조를 가지는 유통시스템의 물류센터 위치선정문제나 통신설비의 위치선정문제 등에 적용될 수 있을 것이다. 또한 각 facility의 설치후 보지에 설치할 수 있는 facility 대수에 상한이 있는 경우와 facility들의 종류가 여러 종류가 있어 용량과 설치비용이 각각 다른 경우 등 확장된 문제를 연구하는데 기초자료로 이용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] 이병기, 강민호, 이종희, 「광대역 정보통신」, 2판, 교학사, 1997.
- [2] Aardal, K., Y. Pochet and L.A. Wolsey, "Capacitated Facility Location : Valid Inequalities and Facets," *Mathematics of Operations Research*, Vol.20,(1995), pp.562-582.
- [3] Aikens, C. H., "Facility location models for distribution planning," *European Journal of Operational Research*, Vol.22,(1985), pp.263-279.
- [4] Cho, D. C., E. L. Johnson, M.W. Padberg, and M.R. Rao, "On the uncapacitated plant location problem I : Valid inequalities and facets," *Mathematics of Operations Research*, Vol.8, (1983), pp.579-589.
- [5] Cho, D. C., E. L. Johnson, M.W. Padberg, and M.R. Rao, "On the uncapacitated plant location problem II : Facets and lifting theorems," *Mathematics of Operations Research*, Vol.8, (1983), pp.590-612.
- [6] Daskin, M. S., *Network and Discrete Location : Models, Algorithms, and Applications*, Wiley, New York, 1995.
- [7] Garey, M. R. and D. S. Johnson, *Computers and Intractability : A Guide to the theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Company, 1979.
- [8] Kim, D., "Algorithm for the ATM Switching Node Location Problem," M.S. thesis, Dept. of I.E., KAIST, Taejon Korea, 1998.
- [9] Kim, S., M. Kim, S. Lee and K. Ryu, "Optimization Models and Algorithms for Planning ATM Networks," working paper, TNRL, Korea Telecom, Korea, 1995.
- [10] Lee, K., "Routing and Capacity Assignment Models and Algorithms for the Design of Telecommunication Networks," Ph.D. thesis, Dept. of I.E., KAIST, Taejon Korea, 1998.
- [11] Leung, J. M. Y. and T. L. Magnanti, "Valid inequalities and facets of capacitated plant location problem," *Mathematical Programming*, Vol.44, (1989), pp.271-291.
- [12] Neebe, A. W. and M. R. Rao, "An Algorithm

- for the Fixed-Charge Assigning Users to Sources Problem," *Journal of Operational Research Society*, Vol.32, (1983), pp.1107-1113.
- [13] Nemhauser, G. L. and L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1988.
- [14] Padberg, M. and G. Rinaldi, "A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems," *SIAM Review*, Vol.33, (1991), pp.60-100.
- [15] Ryu, K., S. Kim, H. Song and S.Chung, "Facility Location Problem for the Initial Deployment of B-ISDN," working paper, TNRL, Korea Telecom, Korea, 1996.