

정수계획모형에서의 평균잠재가격과 이의 안정성

조 성 철*

Average Shadow Price in Integer Programming and its Stability Analysis

Seong-Cheol Cho*

■ Abstract ■

The average shadow price is a substitute for the traditional marginal shadow price. It can serve as a standard for decision making problems about the economic resources where the marginal analysis gives no useful information. This paper treats the average shadow price in pure integer programming and shows some stability properties of it. This implies that the values of the average shadow prices once computed are reliable within some extent of the data perturbations of the integer programming model.

1. 서 론

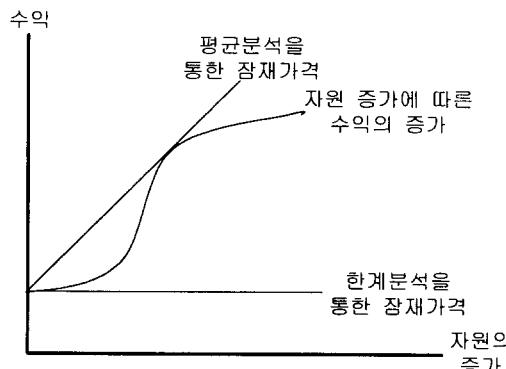
지금까지 희소한 자원을 이용한 생산활동에 있어서 투입되는 자원에 대한 잠재 가격은 가용 자원이 현 수준에서 한 단위 증가 할 경우 이에 따르는 기업 이익의 순간적 변화율이라는 고전적인 한계 분석을 통해 이해되고 정의되어 왔다. 이러한 분석은 현대적 의사 결정 모형의 전형인 선형계획모형에서 먼저 정의되고 해석되어 왔으며[6, 8], 선형계획모형과 이의 잠재가격이 자원의 효율적 배분에

시사하는 점을 발견하고 잘 해석한 공로로 노벨 경제학상이[6, 8] 수여되기도 하였다.

이러한 한계 기여율로서의 잠재 가격은 즉각적으로 고전적인 경제학의 가정인 한계수익 체감의 법칙 등이 잘 적용되는 볼록 계획법(convex programming) 분야에[1, Chapter 4] 적용되었고, 이는 쿤-터커 승수와(Kuhn-Tucker multiplier)[1, pp. 95-100] 동일시되었다. 이러한 한계 개념의 잠재 가격은 그러나 볼록성의 가정이 깨어지는 상황하

* 한국해양대학교 해운경영학부

에서는 의미 있는 경제적 해석을 내리기가 어렵다. 예를 들어, 특정 자원이 한계 수익 체증의 형태를 부분적으로라도 보이는 경우에는 자원의 한계 가격이 주는 정보는 현실적 응용을 논의하기가 어려울 수 있다. [그림 1]에서는 이러한 사실을 단적으로 보여 주고 있다. 평균잠재가격이 소개되기 전까지는 볼록계획법 이외의 수리계획모형에서도 잠재가격들은 이러한 한계분석의 연장선상에서만[5, 9, pp.65-66; 10, pp.66-68] 다루어졌다. 말하자면 최근에 개발된 평균잠재가격은[3, 4, 7] 전통적인 한계 분석을 떠난 잠재가격의 개발을 위한 첫 시도였다. 먼저 이는 정수계획모형을(integer programming) 대상으로[7] 소개되었고, 이 후 일반적인 수리계획법과(mathematical programming)[3] 혼합 정수계획모형으로(mixed integer programming) 일반화되어[4] 소개되었다. 이의 개념과 정의, 도출해법[3, 7] 쌍대 이론과의(duality theory) 관계[2] 등은 이미 발표된 몇 개의 논문을 통해 살펴 볼 수 있다.



[그림 1] 한계분석과 평균 분석

이 논문은 이러한 평균 잠재가격을 순수 정수계획모형을 대상으로 다시 다룬다. 정수계획모형의 이산성으로 인해 평균잠재가격의 안정성이 의문시 될 수 있음을 생각해 볼 수 있다. 모형의 계수가 약간만 변해도 평균잠재가격이 제 계산을 요구할 만큼 심각하게 변한다면 평균잠재가격이 의사결정

에 갖는 유용성은 그 만큼 실제적 의미가 상실될 것이다. 이 논문에서는 이러한 평균잠재가격의 안정성을 논의하며 이것이 모형의 모수의(parameter) 작은 변동에 대해 어느 정도 안정적이라는 사실을 수학적으로 논증하였다.

다음 제 2절에서는 정수계획모형에서의 평균잠재가격을 소개하고, 제 3절의 논의를 위한 기호와 가정들을 소개한다. 특히, 경영 의사결정을 지원하는 기준치라는 의미로 평균잠재가격을 소개하며, 전통적인 한계 개념의 잠재가격과 비교한다. 제 3절에서는 이 논문의 주요 논점인 평균잠재가격의 안정성에 관련된 수학적 문제 및 증명을 시도한다. 결론의 예를 보여 주는 숫자 예제를 포함하였다. 마지막 제 4절에서는 논문을 다시 요약하고, 앞으로의 연구 주제가 될 수 있는 점들을 논의하고 있다.

2. 평균잠재가격의 정의 및 유용성

이제 다음과 같은 정수계획모형으로 표현된 경영 의사결정모형을 생각해 보자. 현재 m 개의 가용자원을 각각 b_i ($i \in M = \{1, \dots, m\}$)만큼 확보할 수 있는 조직이 이를 이용하여 n 개의 (생산) 활동을 수행하는 경우를 생각해 보자. c_j 를 각 활동으로부터 얻을 수 있는 단위 당 수익(혹은 이익)이라고 하자. 각 활동의 수준이 오직 정수로만 표현될 수 있을 경우, 최대 이익을 추구하는 경영자의 의사결정모형은 다음과 같은 정수계획모형 ($(P_{(A, b, c)})$)로 표현할 수 있다. 이 모형에서 각 자원들에 대한 한계수익 체감의 법칙 등 고전적인 미시 경제학의 가정이 깨어지는 이유는 각 활동 수준 x_j 가 정수 값만을 갖는 모형이기 때문이다.

$$(P_{(A, b, c)}) \quad \max \{ cx \mid Ax \leq b, x \in X \}$$

여기에서 $A = (a_{ij})$ 는 $m \times n$ 행렬, a_{ij} 는 활동 j 를 한 단위 수행하는데 소요되는 자원 i 의 양을

나타낸다. 또한 $c = (c_1, \dots, c_n)$, 즉 각 활동 j 의 단위 당 이익 벡터, 그리고 $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, 즉 각 가용 자원량들을 표시하는 벡터를 의미한다.

집합 X 를 아래와 같은 정수들의 집합으로 정의 한다.

$$X = \{x \in R^n \mid Hx \leq b, x \geq 0, \text{ 정수}\}$$

(가정 1) 편의상 – 그러나 실제적 유용성을 잃지 않으면서 – 집합 X 를 공집합이 아닌 유한 집합이라고(finite set) 가정한다. 이 X 에서 정수 제약을 없앤 집합을 \bar{X} 로 정의하기로 하자. 즉, $\bar{X} = \{x \in R^n \mid Hx \leq b, x \geq 0\}$ 로 정의한다.

앞으로의 논의를 위해 임의의 점 $y \in R^k$ 에서 반경 $\varepsilon (>0)$ 인 y 의 주변(neighborhood) $B(y, \varepsilon)$ 를 아래의 집합으로 정의한다.

$$B(y, \varepsilon) = \{y' \in R^k \mid \|y' - y\| < \varepsilon\},$$

단, $\|y' - y\| = \sqrt{(y'_1 - y_1)^2 + \dots + (y'_k - y_k)^2}$

(가정 2) 위의 모형 $(P_{(A, b, c)})$ 는 행렬 A 가 고정되어 있을 경우, b 의 적절한 주변에서(neighborhood) 실행 가능해를(feasible solution) 갖는다고 가정한다. 즉, 적절한 ε 이 존재하여 임의의 $d \in B(b, \varepsilon)$ 에 대해 모형 $(P_{(A, d, c)})$ 가 실행 가능해를 갖는다.

제 2절을 진행하는 동안 기술계수행렬 A 와 이익벡터 c 는 고정된 것으로 가정한다. 이제 경영자가 가용 자원을 추가적으로 확보하는 문제를 고려하고 있다고 하자. 상정할 수 있는 각 가용 자원의 양 $d = (d_1, \dots, d_m)$ 에 대해 다음과 같이 최대이익함수 $z(d)$ 를 정의하기로 하자.

$$z(d) = \max \{ cx \mid Ax \leq d, x \in X\}$$

정수의 가정이 제거된 경우 최대이익함수를 $\bar{z}(d) = \max \{ cx \mid Ax \leq d, x \in \bar{X}\}$ 로 나타낸다.

이제 경영자가 현재의 가용 자원량 b 에서, 다른 자원은 그대로 둔 채로 특정 자원 i 에 관해 추가적 확보를 고려하고 있는 경우를 고려해 보자. 경영자는 이의 추가적 확보가 자원의 확보 비용을 공제하고 추가적 순이익을 발생시킬 수 있을 것인가를 알고 싶을 것이다. 이제 e_i 가 i 번째 단위 벡터(i -th unit vector) 의미한다고 하자. 자원 i 를 p 의 가격으로 $s (> 0)$ 만큼 추가적으로 확보하는 경우 경영자는 이를 이용하여 추가적인 순이익을 $z(b + se_i) - z(b) - ps$ 만큼 기대할 수 있을 것이다. 이 경우 추가적으로 확보한 자원 한 단위당 평균적으로 $(z(b + se_i) - z(b))/s$ 만큼의 이익을 추가적으로 얻었고 이를 위해 단위 당 비용 p 를 지불한 것으로 설명할 수 있다. 이러한 자원의 추가적 구매를 통한 평균 이익의 개념으로 아래와 같이 구매 평균잠재가격을(buying shadow price) 정의한다.

(정의 1 [7]) 자원 i 에 관한 구매 평균잠재가격 (buying average shadow price) u_i 를 아래와 같이 정의한다.

$$u_i = \max \left\{ \frac{z(b + se_i) - z(b)}{s} \mid s > 0 \right\}$$

앞에서 논의한 가정들에 의해 위의 정의는 항상 유한한 값으로 발견되는 것을 쉽게 알 수 있다. 위의 u_i 가 0인 경우 이 모형 내에서 자원 i 를 자유자로(free good[7]) 정의한다.

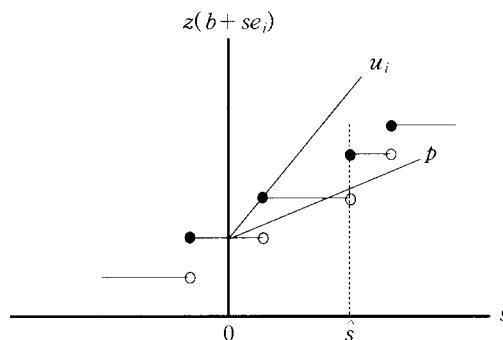
정수제약이 없는 일반적인 선형계획모형일 경우는 함수 $\bar{z}(d)$ 가 d 대한 오목함수이므로(convex)

function)[1, p.72] 이 경우 쉽게

$$= \lim_{s \downarrow 0} \frac{\overline{z(b + se_i)} - \overline{z(b)}}{s}$$

임을 알 수 있다. 즉, 위의 평균잠재가격은 이런 면에서 고전적인 한계 개념의 잠재가격을 포함하는 일반적인 개념의 잠재가격이라는 것을 알 수 있다. 단, 고전적인 한계분석을 정수계획모형에 적용할 경우 어떤 자원 i 이든지 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{z(b+se_i) - z(b)}{s}$

= 0이므로 고전적 한계 분석이 의미를 상실하게 된다. [그림 2]는 이 사실을 직관적으로 설명한다. 고전적인 한계분석을 통해서는 모든 자원의 한계 가치가 0임에도 불구하고 경영자는 추가적 자원 확보를 통해 여전히 추가적 순이익의 확보를 기대할 수 있는 것이다. 이제 아래의 정리를 통해 평균 잠재가격이 갖고 있는 의사결정에의 유용성을 설명할 수 있다. 이의 증명은 정의 1로부터 자명하게 도출된다.



[그림 2] 평균잠재가격과 최대이익함수

(정리 1) 자원 i 의 시장 가격 p 가 정의 1의 구매 평균잠재가격 u_i 보다 작을 경우 자원의 추가적 확보를 통해 추가적 순이익을 얻을 수 있다. 즉 적절한 값 s 에 대해 $z(b + se_i) - z(b) - ps > 0$ 가 성립

한다. 반대로 자원 i 의 시장 가격 p 가 u_i 보다 클 경우 자원 i 의 추가적 확보를 통해 추가적 순이익을 기대할 수 없다. 즉, 임의의 $s(>0)$ 에 대해 $z(b+se_i) - z(b) - ps < 0$ 이다. ■

대칭적으로 자원 i 의 차분 혹은 판매에 관한 의사결정의 지표가 되는 잠재가격을 아래와 같이 정의한다.

(정의 2 [3, 7]) 자원 i 에 관한 판매 평균잠재가격 (selling average shadow price) v_i 를 아래와 같이 정의한다.

$$v_i = \min \left\{ \frac{z(b + se_i) - z(b)}{s} \mid s < 0 \right\}$$

위의 v_i 역시 앞에서 논의한 가정들에 의해 유한한 값을 갖게 된다. 정수제약 조건이 없는 경우 또한 함수 $\bar{z}(\bar{d})$ 가 오목함수이므로 구매 평균잠재가격의 경우와 같은 이치로 이는 고전적인 한계 개념의 잠재가격과 같게된다. 즉, 정의 2 역시 한계개념을 포함하는 일반적 개념이라고 볼 수 있다. 또한 자원의 처분에 관한 의사결정의 측면에서 역시 아래와 같은 결론을 얻을 수 있다. 이의 증명 역시 정의 2로부터 자명하다고 할 수 있다.

(정리 2) 자원 i 의 시장 가격 p 가 정의 2의 v_i 보다 클 경우 이 자원의 처분을 통해 추가적 순이익을 얻을 수 있다. 즉, 적절한 처분량 $\hat{s}(>0)$ 에 대해 $p\hat{s} - \{z(b) - z(b - se_i)\} > 0$ 가 성립한다. 반대로 자원 i 의 시장 가격 p 가 v_i 보다 작을 경우 자원 i 의 처분을 통해 추가적 순이익을 기대할 수 없다. 즉, 임의의 $s(>0)$ 에 대해 $p\hat{s} - \{z(b) - z(b - se_i)\} < 0$ 이다 ■

평균 잡재가격의 정의와 정리 1, 2를 통해 평균 잡재가격 u_i, v_i 를 알고 있을 경우 아래와 같은

의사결정 기준을 개발할 수 있다.

자원 추가 확보를 위한 의사결정 기준

만일 자원 i 의 시장가격이 구매 평균잠재가격 (u_i)보다 작으면 자원을 적절히 추가적으로 확보하라. 아니면 확보하지 말라.

자원 처분을 위한 의사결정기준

만일 자원 i 의 시장가격이 판매 평균잠재가격 (v_i)보다 크면 자원을 적절히 처분하라. 아니면 처분하지 말라.

지금까지의 논의를 통해 평균잠재가격은 고전적 한계개념과는 대조적으로 평균개념으로 평가된 자원 i 의 잠재가격이라고 할 수 있다. 그러나 이는 선형계획모형 등의 볼록성이 충족되는 상황하에서는 한계 분석과 같은 잠재가격이기도하다. 특히 평균잠재가격은 고전적인 한계개념의 잠재가격이 정보를 줄 수 없는 상황하에서도 각 자원의 추가적 확보나 처분에 관한 경영자의 의사결정에 기준을 제공함을 설명하였다. 임의의 $u_i \leq p \leq v_i$ 인 가격 p 에서는 자원 i 의 추가적 확보나 처분의 필요성이 없으므로 이러한 가격 p 를 자원 i 의 균형가격으로[7] 정의한다. 물론 정수의 활동 수준만이 가능한 상황으로 인하여 $v_i < u_i$ 인 경우가 얼마든지 나타날 수 있다. 이 경우는 정수계획모형에서는 자원의 균형가격이 존재하지 않을 수 있음을 설명해 주기도 한다. 다음 제 3절에서의 숫자 예제를 통해 (제 3.2절) 이러한 경우의 예를 볼 수 있다. 평균잠재가격에 관한 자세한 계산 절차와 보다 쉬운 상한 및 하한의 계산 방법, 균형가격과의 관계 등에 관한 내용을 논문[3, 7]에서 찾아 볼 수 있다.

3. 평균잠재가격의 안정성

전 절에서 정의된 평균잠재가격의 정확한 계산은 정수계획모형의 계산의 복잡성으로 인해 많은

계산량을 요구하는 경우가 많이 발생한다. 따라서 계산된 평균잠재가격이 각 계수들의 작은 변동으로 인해 안정성 없이 재계산을 요구할 만큼 변하게 된다면, 평균잠재가격의 실제적 유용성을 문제점을 갖게 된다. 왜냐하면 현실의 불확실성을 반영할 때 계산된 평균잠재가격의 정확성을 신뢰할 수 없기 때문이다. 이 절에서는 계수들의 부분적이고 작은 변동에 대해서는 계산된 평균 잠재 가격이 안정적이라는 사실을 논증한다.

이 절의 논의를 위해 다음과 같이 필요한 용어를 정의한다.

(정의 3) 임의의 자원 i 에 대해 만일 어떤 값 \hat{s} 가 있어서 $s < \hat{s}$ 인 임의의 s 에 대해 $z(b + se_i) < z(b + \hat{se}_i)$ 의 관계식이 성립하면 이 값 \hat{s} 를 자원 i 의 임계값이라고(critical value) 정의한다. 자원 i 에 관한 모든 임계값들의 집합을 C_i 로 나타내기로 하자.

전 절에 설명한 모형의 가정 1, 2로부터 모든 자원 i 에 대해 $C_i \neq \emptyset$ 이며, 유한개의 임계값을 갖게됨을(즉, $|C_i| < \infty$) 알 수 있다. [그림 2]는 선형적인 최대이익함수 $z(b + se_i)$ 와 자원 i 의 임계값을 함께 예시해 주고 있다.

(정리 3, [7]) 자원 i 의 임계값들의 집합 C_i 에 대해 평균잠재가격 u_i , v_i 는 아래의 관계식에 의해 도출할 수 있다.

$$u_i = \max \left\{ \frac{z(b + se_i) - z(b)}{s} \mid s > 0, s \in C_i \right\}$$

$$v_i = \min \left\{ \frac{z(b + se_i) - z(b)}{s} \mid s < 0, s \in C_i \right\}$$

이 절에서는 모형의 계수들의 변동을 다각적으로 논하므로 이에 따른 최대이익함수 $z(\cdot)$ 를 계수

A, b, c 의 함수로 다루기로 하자. 즉, 주어진 기술 계수행렬 A' , 가용자원량 벡터 b' , 이익 벡터 c' 에 대해 최대이익함수 $z(A', b', c')$ 을

$$z(A', b', c') = \max \{ c'x \mid A'x \leq b', x \in X \}$$

로 정의하기로 하자. 전 절의 **가정 1, 2**로부터 위의 함수는 현재의 주어진 계수 (A, b, c) 주변에서 유한한 값을 갖는 함수임을 쉽게 알 수 있다. 이 절의 논의를 위해 아래의 집합을 정의하기로 하자.

(정의 4) 주어진 계수 (A', b', c') 에 대해

$$F_i(A', b') = \{x \in X \mid a'_i x \leq b'_i\}$$

(단, a'_i 는 행렬 A' 의 i 번째 행을 의미한다.)

$I(A', b') = \{i \in M \mid a'_i x = b'_i, x \in F_i(A', b') \text{인 } x \text{가 존재}\},$

$$I^c(A', b') = M - I(A', b')$$

(즉, $M = I(A', b') \cup I^c(A', b')$ 이다.)

로 정의한다.

위의 정의의 기호를 사용하면 계수 (A', b', c') 에 의해 주어지는 최적 활동을 위한 의사결정 문제의 실행가능해 집합을 $\bigcap_{i \in M} F_i(A', b')$ 로 이해할 수 있다. 이 절에서 논의하는 안정성을 위해 다음을 가정한다.

(가정 3) 현재 주어진 계수 A, b 에 대해 $I^c(A, b) \neq \emptyset$, 즉, 확보된 가용자원을 이용하여 현재의 기술로(생산) 활동을 할 경우 항상 사용되지 않고 남는 자원이 적어도 한 개 이상 존재한다.

위의 가정이 만족될 경우 $(P_{(A, b, c)})$ 의 최적해에서 비속박적 제약식이(nonbinding constraints)

존재함은 자명하다. 즉, (가정 3)은 최적해에서 비속박적 제약식이 존재한다는 가정보다 더 엄격한 것이다. 이러한 가정을 전제하고 안정성 분석을 수행하는 이유는 정수계획모형의 해가 비속박적 제약식의 계수 변동에 대해서도 예측할 수 없는 이산적인 변동을 보일 수 있기 때문이다. 제 3.2절의 숫자 예제는 이러한 점을 예시해 주고 있다.

3.1 가용 자원량 b 에 대한 안정성 분석

이 절에서는 가용 자원량 b 의 작은 변동에(즉, 현재 수준 b 에서 b' 으로의 변동) 대한 평균잠재가격의 안정성을 설명한다. 급격한 변동을 배제하기 위해 임의의 $k \in I(A, b)$ 에 대해 $b'_k = b_k$ 로 고정시킨 경우를 다루며, 이 경우 평균잠재가격이 $i \in I^c(A, b)$ 인 b'_i 들의 작은 변동에 대해 b 에서 연속함수임을 논증하게 된다. 이를 위해 임의의 자원 i 의 평균잠재가격을 b 주변에서 b' 의 함수로 나타내기로 하자. 즉

$$u_i = f_i(b'), \quad v_i = g_i(b')$$

로 표현해 보기로 하자.

(보조정리 4) 임의의 $k \in I(A, b)$ 에 대해 $b'_k = b_k$ 라고 하자. 그러면 $b' \in B(b, \varepsilon)$ 일 경우, 임의의 $i \in I^c(A, b)$ 에 대해 $F_i(A, b') = F_i(A, b)$ 이고, $I(A, b') = I(A, b)$ 인 양수 ε 이 존재한다.

(증명) 임의의 $i \in I^c(A, b)$ 에 대해

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \min [b_i - \max \{a_i x \mid x \in F_i(A, b)\}, \\ &\quad \min \{a_i x \mid x \in X, a_i x > b_i\} - b_i] \end{aligned}$$

로 정의하자. 그러면 $\varepsilon_i > 0$ 이다. 이제 $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$ 로 정의하면 $|b'_i - b_i| \leq \|b' - b\| < \varepsilon \leq \varepsilon_i$ 가 성립하므로 결론의 성질이 만족됨을 정의 4로부터 쉽

게 알 수 있다. ■

(정리 5) 임의의 $k \in I(A, b)$ 에 대해 $b'_k = b_k$ 라고 하자. 그러면 임의의 양수 δ 에 대해 적절한 양수 ϵ 이 존재하여 다음과 같은 성질을 만족한다: 만일 $b' \in B(b, \epsilon)$ 이면

- (1) 임의의 자원 $k \in I(A, b)$ 에 대해 u_k, v_k 의 평균잠재가격은 변하지 않는다.
- (2) 임의의 자원 $i \in I^c(A, b)$ 에 대해 $|f_i(b') - f_i(b)| < \delta$ 이고, $g_i(b') = g_i(b) = 0$ 이다.

(증명) 보조정리 4의 ϵ 을 생각해보자.

(1) 보조정리 4의 결론으로부터 임의의 $i \in I^c(A, b)$ 에 대해 $F_i(A, b') = F_i(A, b)$ 이므로, 임의의 실수 s 에 대해 $(P_{(A, b' + se_i, c)})$ 와 $(P_{(A, b + se_i, c)})$ 가 동일한 실행가능해를 가짐을 알 수 있다. 따라서 정의 1, 2로부터 평균잠재가격이 동일한 값임이 밝혀진다.

(2) $s < \epsilon - \|b' - b\|$ 인 양수 s 에 대해 $(P_{(A, b' - se_i, c)})$ 와 $(P_{(A, b', c)}), (P_{(A, b, c)})$ 의 실행가능해가 모두 같으므로 판매 평균잠재가격의 정의 (정의 2)로부터 판매 평균잠재가격 v_i 가 모두 0임을 알 수 있다. 즉, $v_i = g_i(b') = g_i(b) = 0$ 이 성립 한다. 구매 평균잠재가격에 대해서는 먼저 자원 i 가 자유재인 경우를 (즉, 임의의 양수 s 에 대해 $z(A, b + se_i, c) = z(A, b, c)$ 인 경우를) 생각해 보자. 보조정리 4로부터 임의의 자원 $j \in M$ 에 대해 $F_j(A, b') = F_j(A, b)$ 가 성립하므로, $z(A, b' + se_i, c) = z(A, b', c)$ 임을 알 수 있다. 따라서 여전히 구매 평균잠재가격은 정의 1에 의해 0으로 불변이다. 이제 자원 i 가 자유재가 아닌 경우를 생각해 보자. 정리 3으로부터

$$u_i = f_i(b)$$

$$= \max \left\{ \frac{z(A, b + se_i, c) - z(A, b, c)}{s} \mid s > 0, s \in C_i \right\}$$

이므로 새로운 구매 잠재가격 $u_i = f_i(b')$ 는

$$\begin{aligned} f_i(b') &= \max \left\{ \frac{z(A, b' + se_i, c) - z(A, b', c)}{s} \mid s = \right. \\ &\quad \left. s - (b'_i - b_i), s > 0, s \in C_i \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{z(A, b' + se_i, c) - z(A, b, c)}{s} \mid s = \right. \\ &\quad \left. s - (b'_i - b_i), s > 0, s \in C_i \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{z(A, b + se_i, c) - z(A, b, c)}{s} \mid s = \right. \\ &\quad \left. s - (b'_i - b_i), s > 0, s \in C_i \right\} \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서 전제한 ϵ 를 충분히 작은 값으로 상정할 경우, C_i 는 유한개의 점들의 집합이므로, 임의의 $s \in C_i$ 에 대해

$$\left| \frac{z(A, b + se_i, c) - z(A, b, c)}{s} - \frac{z(A, b' + se_i, c) - z(A, b', c)}{s} \right| < \delta$$

이고, 따라서 $|f_i(b') - f_i(b)| < \delta$ 만족된다. ■

이상 논의에 의해 평균잠재가격은 현재의 가용자원량 b 에서 이들 중 일부가 그대로 고정될 경우 (즉, 임의의 $k \in I(A, b)$ 에 대해 $b'_k = b_k$ 일 경우) 다른 우변들의 변동에 대해 이들의 연속함수가 되는 안정성을 가짐을 논증하였다.

3.2 안정성 분석의 예제

이 절에서는 간단한 숫자 예제를 통해 앞 절에서 논의한 평균잠재가격의 안정성을 예시하고자 한다. 다음과 같은 정수계획모형을 생각해보기로 하자.

(P_(A, b, c))

$$\max \{x_1 + 2x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 2, 2x_1 + 5x_2 \leq 8, x \in X\}$$

여기서 $X = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2\}$ 라고 정의하기로 하자. 그러면 문제 (P_(A, b, c))는 가정 1, 2, 3을 모두 만족함을 쉽게 알 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, c = (1, 2), x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

해하면 $I(A, b) = \{1\}$, $I^c(A, b) = \{2\}$ 이다. 먼저 이 문제를 풀어 보면 최적해는 $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, 최적 목적함수값은 $z(A, b, c) = 3$ 임이 발견된다. 제약식 1은 최적해에서 속박적(binding) 제약식이고, 제약식 2는 비속박적이지만(nonbinding) 평균잠재가격을 정리 3에 의해 도출해 보면

$$u_1 = 0, v_1 = 1, u_2 = 1/2, v_2 = 0$$

임을 발견할 수 있다. 이는 정수제약이 없는 선형계획모형에서는(비속박적 제약식에 해당하는 잠재가격은 언제나 0이므로) 발견할 수 없는 결과이다. 이 결과에 의해 자원 1의 균형가격은 [0, 1]의 구간상에 있는 임의의 값으로 설명이 되고, 자원 2의 경우는 $u_2 > v_2$ 이므로 균형가격을 정의할 수 없음을 알 수 있다. 왜냐하면 어느 가격에서도 추가적 자원의 확보 혹은 처분이 현재의 상태보다 낫기 때문이다.

이제 앞 절에서의 가정대로 $b'_1 = 2$ 로 고정시키고 자원 2의 양만을 현재의 값 $b_2 = 8$ 주변에서 약간 변동시켜 보자. 그러면 $7 < b'_2 < 10$ 에 대해서는 $F(A, b'_2) = F(A, b_2)$ 이며, 이 범위에 대해 $u_1 = 0$, $v_1 = 1$ 이 그대로 유지됨을 (정리 5 (1)) 알 수 있다. 또한 자원 2의 평균잠재가격에 대해서는 $u_2 = \frac{1}{2 - (b'_2 - 8)}$ 로 $b'_2 = 8$ 에서 b'_2 의 연속함수이고, $v_2 = 0$ 이 그대로 유지됨을 확인해 볼 수 있다. (정리 5 (2))

예를 바꾸어 위의 문제에 제약식 $x_1 + 3x_2 \leq 6$ 을 추가하여 만든 아래의 문제를 생각해 보기로 하자.

(P_(A, b, c))

$$\max \{x_1 + 2x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 2, 2x_1 + 5x_2 \leq 8, x_1 + 3x_2 \leq 6, x \in X\}$$

그러면 $I(A, b) = \{1, 3\}$, $I^c(A, b) = \{2\}$ 이며, 여전히 정리 5가 성립됨을 확인할 수 있다. 반면에 최적해 $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ 에서 속박적 제약식은 제약식 1, 비속박적 제약식은 제약식 2, 3이지만 $b'_1 = 2$ 로 고정시킨다고 하여도 만일 $b'_3 = 6 - \varepsilon$ 로 줄어들면, 아무리 작은 양수 ε 에 대하여서도,

$$u_2 = f(2, 8, 6 - \varepsilon) = 0 < \frac{1}{2}$$

로 갑자기 평균잠재가격의 값이 변한다. 이는, 연속적인 최적화 모형과는 달리, 정수계획모형에서는 비속박적 제약식의 계수 변동에 대해서도 안정성과 관련하여 의미 있는 결과를 도출하기가 어려울 수 있음을 보여 주고 있다.

3.3 기술계수 A 의 변동에 대한 안정성

이 절의 분석을 위해 평균잠재가격을 현재의 기술계수행렬 $A = (a_{ij})$ 의 주변에서 이 기술계수들을 a'_{ij} 의 함수로 표현해 보자. 즉,

$$u_i = f_i(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{mn}) = f_i(a'_1, \dots, a'_m) = f_i(a')$$

$$v_i = g_i(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{mn}) = g_i(a'_1, \dots, a'_m) = g_i(a')$$

로 표현해 보기로 하자. 제 3.1절에서처럼 임의의 $k \in I(A, b)$ 에 대해 $a'_{ik} = a_k$ 로 고정시키고 안정성 분석에 관한 결론을 얻을 것이다.

(보조정리 6) 모든 $k \in I(A, b)$ 에 대해 $a'_{ik} = a_k$

라고 하자. 그러면 임의의 $a' \in B(a, \epsilon)$ 에 대해, 만일 $i \in I^c(A, b)$ 이면, $F_i(A', b) = F_i(A, b)$ 이고, $I(A', b) = I(A, b)$ 인 양수 ϵ 이 존재한다.

(증명) 함수 $a'_i \mapsto a'_i x$ 가 선형함수, 즉 연속함수이므로, 또한 집합 X 가 유한개의 벡터로 구성된 집합이므로 연속함수의 정의로부터 적절한 양수 ϵ 의 존재가 자명하다. ■

(정리 7) 모든 $k \in I(A, b)$ 에 대해 $a'_k = a_k$ 라고 하자. 또한 임의의 $i \in I^c(A, b)$ 에 대해 다음과 같이 가정하기로 하자 :

임의의 양수의 임계값 $\bar{s} \in C_i$ 에 대해 이에 대응하는 해가 유일하게 존재한다. 즉, $x \in X$, $a'_j x \leq b_j$ ($j \neq i$), $a'_i x = b_i + \bar{s}$ 인 해가 오직 한 개 존재한다.

그러면 임의의 양수 δ 에 대해 다음과 같은 성질을 만족하는 양수 ϵ 이 존재한다 :

임의의 $a' \in B(a, \epsilon)$ 에 대해

- (1) 만일 $k \in I(A, b)$ 이면, $f_k(a') = f_k(a)$ 이고, $g_k(a') = g_k(a)$ 이다. 즉, 평균잠재가격이 변하지 않는다.
- (2) 만일 $i \in I^c(A, b)$ 이면 $|f_i(a') - f_i(a)| < \delta$ 이고, $g_i(a') = 0$ 이다.

(증명) 보조정리 6의 양수 ϵ 을 생각해 보자.

(1) 보조정리 6의 결론으로부터, 임의의 $i \in I^c(A, b)$ 에 대해 $F_i(A', b) = F_i(A, b)$ 이므로, 임의의 실수 s 에 대해 $(P_{(A', b + se_i, c)})$ 와 $(P_{(A, b + se_i, c)})$ 가 동일한 실행가능해를 가짐을 알 수 있다. 따라서 평균잠재가격의 정의 1, 2로부터 같은 평균잠재가격의

값이 도출된다.

(2) 먼저 판매 평균잠재가격의 경우부터 생각해 보자. 정리 5 (2)의 증명과정과 비슷한 방법으로 양수 s 를 $b_i - \max\{a'_j x \mid x \in F(A', b)\}(>0)$ 보다 작게 잡아 주면 $(P_{(A', b - se_i, c)})$ 와 $(P_{(A', b, c)})$, $(P_{(A, b, c)})$ 가 모두 동일한 실행가능해 집합을 가짐을 알 수 있다. 따라서 $z(A', b - se_i, c) - z(A', b, c) = 0$ 이므로 판매 평균잠재가격의 정의 (정의 2)에 의해 $v_i = 0$ 으로 변함이 없음을 알 수 있다. 또한 보조정리 6의 결과로부터 차원 i 가 자유재이면 모형 $(P_{(A', b, c)})$ 에서도 차원 i 가 자유재임을 알 수 있다. 따라서 $u_i = f_i(a') = 0$ 이다. 차원 i 가 자유재가 아닌 경우 임계값에 대응하는 해 x 가 유일하다는 전제와, 임계값의 수가 유한하다는 사실, 그리고 임의의 x 에 대해 함수 $a'_i x$ 가 a'_i 의 연속함수라는 사실로부터 ϵ 을 충분히 작게 잡았을 경우 동일한 해에서 임계값을 갖게 되고 동일한 해 x 에 해당하는 두 임계값의 차이를 충분히 작게 할 수 있다는 점을 알 수 있다. 따라서 정리 5 (2)를 증명할 때와 같은 수식 조작을 통해 $|f_i(a') - f_i(a)| < \delta$ 가 성립함을 쉽게 알 수 있다. ■

결국 일부 기술계수가 불변이라는 전제하에서 ($k \in I(A, b)$ 에 대해 $a'_k = a_k$) 기술계수를 이루는 행렬 A 의 변동에 대해서도 평균잠재가격이 현재의 기술계수에서 연속 함수적인 안정성을 갖고 있음을 알 수 있다.

3.4 목적함수 계수 c 에 대한 안정성 분석

목적함수의 계수 c 는 각 활동의 단위당 수익을 의미한다. 이제 현재의 계수 c 주변에서 목적함수 계수 c' 의 함수로 평균잠재가격을 표현해 보기로 하자.

$$u_i = f_i(c'_1, \dots, c'_n) = f_i(c'),$$

$$v_i = g_i(c'_1, \dots, c'_n) = g_i(c')$$

먼저 평균잠재가격은 c' 의 함수로서 1차 동차 함수임을(positively homogeneous of degree 1) 아래와 같이 논할 수 있다.

(정리 8) 평균잠재가격은 목적함수 계수에 대해 1차 동차 함수이다. 즉, 임의의 양수 α 에 대해 $f_i(\alpha c) = \alpha f_i(c)$ 이고, $g_i(\alpha c) = \alpha g_i(c)$ 임이 성립한다.

(증명) 임의의 양수 t 와 $(P_{(A, b+se_i, c)})$ 의 실행가능해가 존재하는 임의의 실수 s 에 대해

$$\begin{aligned} & \max \{ t cx \mid x \in X, ax \leq b_i + s, ax \leq b_j (j \neq i) \} \\ &= t \max \{ cx \mid x \in X, ax \leq b_i + s, ax \leq b_j (j \neq i) \} \\ &= tz(A, b+se_i, c) \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 평균잠재가격의 정의 1, 2로부터 자명하게 도출된다. ■

위에서 보인 1차 동차성은 활동들의 단위당 수익과 평균잠재가격 사이에 비례관계가 성립하고 있음을 알려준다. 예를 들어, 모든 활동의 단위 당 수익이 2배로 되면 평균잠재가격도 두 배로 평가된다. 이는 자원의 가치 평가에서 바람직한 성질이라 할 수 있다. 다음 정리는 평균잠재가격이 현재의 목적 함수 계수 c 에서 c' 의 연속함수임을 보여준다.

(정리 9) 만일 문제 $(P_{(A, b+se_i, c)})$ 가 실행 가능한 임의의 s 에 대해 이 문제의 최적해가 유일하게 존재한다면, 평균잠재가격 $u_i = f_i(c')$, $v_i = g_i(c')$ 은 c 에서 연속함수이다.

(증명) 임의의 임계값 \bar{s} 에 대해 $(P_{(A, b+\bar{se}_i, c)})$ 의 유일한 최적 해를 $x(\bar{s})$ 라고 표현해보자. 임계

값의 수는 유한하고 임의의 두 개의 이웃하는 임계값 s_1, s_2 에 대해 $x(s_1)$ 이 임의의 $s \in [s_1, s_2]$ 에 의해 정의된 $(P_{(A, b+se_i, c)})$ 의 유일한 최적 해이므로, 적절한 양수 ϵ 에 대해 만일 $c' \in B(c, \epsilon)$ 이면 임계값과 최적해가 그대로 유지되는 ϵ 이 존재한다. 현재의 ($s=0$) 최적 해를 x^0 라고 정의하자. 또한 임의의 주어진 양수 δ 에 대해 이 ϵ 을 충분히 작게 잡아 주면, 모든 임계값 \bar{s} 에서

$$\left| \frac{c'x(\bar{s}) - c'x^0}{\bar{s}} - \frac{cx(\bar{s}) - cx^0}{\bar{s}} \right| < \delta$$

가 성립한다.

따라서 정리 3으로부터 $|f_i(c') - f_i(c)| < \delta$, $|g_i(c') - g_i(c)| < \delta$ 가 성립함을 알 수 있다. ■

이 절에서 세 부분으로 나누어 논의한 평균잠재가격의 안정성은 종합적으로 평균잠재가격이 현재의 계수들로부터의 작은 변동에 대해 연속함수적인 성격을 갖고 있음을 보인 것이라고 할 수 있다. 즉, 주어진 첫 모형에서 자료들 중 일부가 현재의 값들에서 작은 변동이 있을 경우에는 평균잠재가격이 그리 심각하게 변하지 않는 것임을 의미하는 것이다.

4. 결 론

이 논문에서는 경영의사결정의 관점에서 새롭게 개발된 평균잠재가격을 정수선형계획모형을 대상으로 논의하였다. 이는 기존의 한계분석을 벗어난 새로운 시도이지만 고전적인 미시경제학의 가정이 적용되는 상황에서는 전통적인 한계분석과 일치하는 일반성도 갖고 있다는 점도 설명하였다.

이 논문의 주 내용은 평균잠재가격의 안정성을 논증한 것인데, 이는 이미 계산된 평균잠재가격의 신뢰성을 위해 매우 중요한 주제이다. 이를 위해 모

형을 이루는 계수들을 가용 자원량에 해당하는 우변항과(b), 경영의 기술을 나타내는 계수인 기술계수행렬 A , 그리고 각 활동의 단위당 수익, 혹은 이익을 표현하는 목적함수의 계수 c 의 세트으로 나누고 각각의 작은 변동에 대한 평균잠재가격의 안정성을 논증하였다. 제 3절에서 제시한 남는 자원의 가정이 만족되는 상황하에서는 계수들 중 일부의 작은 변동에 대해 평균잠재가격이 그대로 유지되거나, 또는 계수들의 연속함수가 된다는 것을 논증하여 안정성을 설명하였다. 전제한 남는 자원의 가정은 (가정 3) 모형의 해를 전체가 적어도 한 개의 제약식에 대해서는 내점들이어야(interior points) 한다는 것이다. 물론 이는 선형계획모형에서는 불가능한 가정이다. 그러나 여기서는 정수계획모형의 의사결정의 이산성으로 인하여 이 논문에서 가정한 것들은 현실에서 얼마든지 나타날 수 있다.

이 논문에서는 모든 제약식들에 대해 등식으로 만족되는 정수 실행가능해가 존재하는 경우는 다루지 않았다. 이 경우 최적해에서 비속박적 제약식이 존재하더라도 적절한 결론을 얻기가 어려운 것으로 보인다. 정수계획모형의 계수변동 분석의 (parametric analysis) 이산성과 계산적 어려움 때문에 이 경우의 평균잠재가격의 변화에 대한 분석은 정수계획모형의 일반적인 민감도 분석, 또는 계수변동 분석에 대한 더 많은 이론적 발전을 요구하는 것으로 판단된다.

또한 이 논문에서는 모든 계수들의 변동이 연속적으로 변하는 경우만을 상정하였다. 현실적으로 어떤 계수의 변동이 오직 이산적으로만 가능할 경우 - 예를 들면, 추가적 자원의 확보는 계약에 의해 어떤 양 이상의 단위로만 구입할 수 있을 경우 - 이 논문의 안정성분석의 결과를 적용할 수 없다. 이 경우는 수학적으로 연속함수이외에의 다른 분석도구를 필요로 할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Avriel, M. *Nonlinear Programming : Analysis and Methods*, Prentice Hall(1976).
- [2] Cho, S.-C. "A Dual Problem and Duality Theorems for Average Shadow Prices in Mathematical Programming," *Journal of the Korean OR/MS Society*, Vol.18, No.2(1993), pp.147-156.
- [3] Cho, S.-C. and S. Kim, "Average Shadow Prices in Mathematical Programming." *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.74(1992), pp.57-74.
- [4] A. Crema, "Average Shadow Prices in a Mixed Integer Linear Programming Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol.85(1995), pp.625-635.
- [5] J. Gauvin, "Shadow Prices in Nonconvex Mathematical Programming," *Mathematical Programming*, Vol.19(1980), pp.300-312.
- [6] L.V. Kantorovich, "Mathematics in Economics : Achievements, Difficulties, Perspectives," *Mathematical Programming*, Vol.11 (1976), pp.204-211.
- [7] S. Kim and S.-C. Cho, "A Shadow Price in Integer Programming for Management Decision," *European Journal of Operational Research*, Vol.37(1988), pp.328-335.
- [8] T.C. Koopmans, "Concepts of Optimality and Their Uses," *Mathematical Programming*, Vol.11(1976), pp.212-228.
- [9] P.A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press(1948).
- [10] W.I. Zangwill, *Nonlinear Programming : A Unified Approach*, Prentice-Hall(1969).