

Wavelet변환을 이용한 초음파 잡음신호의 제거에 관한 연구

박익근*, 이정순**

A Study on Suppression of Ultrasonic Background Noise Signal using Wavelet Transform

Ik Keun Park*, Jeong Soon Lee**

Abstract

Recently, advanced signal analysis which is called "Time-Frequency Analysis" has been developed. Wavelet and Wigner Distribution are used to the method. Wavelet transform(WT) is applied to time-frequency analysis of waveforms obtained by an ultrasonic pulse-echo technique. The Gabor function is adopted as the analyzing wavelet. Wavelet analysis method is an attractive technique for evaluation of material characterization evaluation. In this paper, the feasibility of suppression of ultrasonic background noise signal using WT has been presented. These results suggest that ultrasonic background noise signal can be suppressed and enhanced even for SNR of 20.8 dB. This property of the WT is extremely useful for the detecting flaw echos embedded in background noise.

Keywords : Wavelet transform(Wavelet 변환), Background noise(잡음신호), Ultrasonic pulse echo method(초음파펄스에코법), STFT(Short time fourier transform: 단시간푸리에변환), Time-frequency analysis(시간-주파수해석), Materials evaluation(재료평가), SNR(Signal to noise ratio:신호잡음비)

1. 서론

초음파에 의한 결함검출 및 재료평가를 음파물성론으로 고려하면 각각 음파와 결함과의 상호작용 및 음파와 전파 매체의 미세조직에 의한 상호작용을 수학적 모델링으로

이해할 수 있다. 이 때 음파의 산란현상, 흡수현상 등의 기본적인 메커니즘을 이용하여 초음파의 전파과정을 모델 화하고, 수신된 초음파에 포함되어 있는 정보로부터 결함 및 전파매체의 미세조직의 기하학적 형상·크기 및 그 분 산을 정량적으로 구한다.

* 서울산업대학교 기계공학과

** 서울산업대학교 대학원

디지털 파형측정기기 및 컴퓨터 등의 발전과 함께 초음파 펄스 파형을 A/D 변환에 의해 디지털적으로 계측하고, 여러 종류의 신호처리를 함으로써 속도나 감쇠계수의 주파수의존성을 계산하는 방법이 연구되고 있다^[1-2]. 파형 데이터해석법으로는 단시간푸리에변환(STFT)이나 Wigner-Ville 분포 등의 시간-주파수해석법이 알려져 있다.^[2-3] 시간-주파수해석법이란 파형데이터를 분해하여 시간과 주파수의 2차원 평면상에 파형의 에너지분포를 구하는 해석방법으로 음향신호의 해석 등에 널리 적용되고 있다.^[4-5] 탄성파의 데이터 해석에 시간-주파수해석법을 적용하면 탄성파의 전파거동을 각주파수성분마다 분해할 수 있기 때문에 분산관계를 용이하게 분석할 수 있을 것으로 기대된다. 탄성파의 데이터해석에 대한 시간-주파수해석법의 적용례는 그리 많지 않다. Wahl 등^[6]은 Wigner-Ville 분포를 적용하여 붕의 종충격과 횡충격에 대한 응답의 시간-주파수해석을 하였다. 그러나, 단시간푸리에 변환은 시간-주파수분해능이 일정하기 때문에 광범위한 주파수에 대한 해석에는 불편하고, 또, Wigner-Ville 분포는 정확한 시간-주파수분포를 얻기 위해 평활화 처리가 필요하는 등 단점이 있다.

본 연구에서는 최근 급속도로 발전하고 있는 초음파 에코파형에 발생하는 저면노이즈 제거에 Wavelet 변환에 의한 시간-주파수해석 방법을 실험적으로 검증하기 위해 다양한 크기의 횡구멍(Side-drill hole; SDH)을 가진 SM20C 원통형 강블럭의 저면을 거칠게 가공하여 저면노이즈를 임의로 발생시키고 초음파 에코파형의 잡음제거 방법의 유용성 유무를 검토하였다.

2. 관련이론

2.1 초음파 에코파형의 Wavelet 해석

WT의 기본적인 아이디어는 당초 Morlet 등^[7]이 인공 지진파를 이용한 지질탐사의 파형해석에 도입하였다. 그 후 1990년대 전반까지 수학자들에 의해 Wavelet 변환의 이론이 체계화됨과 동시에, 다양한 목적에서 그 유용성이 확인되었다.

Wavelet으로 잘라낸 신호의 부분은 각각 시간축상에서의 위치와 그 부분의 국소적인 주파수를 나타낸다. 주파수를 나타내는 좌표축을 새로 설정하고 시간축과 주파수축으로 하는 2차원면을 생각한다. 이것을 시간-주파수평면(Time-frequency plane) 또는 신호평면(Signal

plane)이라 부른다. 이 신호평면 위에 각각의 성분을 배치하여 보면 Fig. 2.1과 같이 된다. 이 그림의 Wavelet 성분으로부터 본래의 신호가 신호의 각 부분에서 주파수가 어떻게 분포하고 있는가를 잘 알 수 있다.

푸리에변환에 근거하여 사용되는 지수함수 $e^{-i\omega t}$ 는 시간영역에서 무한히 넓기 때문에 푸리에변환에서는 신호의 시간적 정보가 상실된다. 이 결점을 보완하기 위해 창함수 $w(t)$ 를 사용하여 $w(t)e^{-i\omega t}$ 와 같이 국부적으로 존재하는 함수를 만든다. 이것을 사용하여 수정한 푸리에변환을 단시간푸리에변환이라 부른다. Gabor는 1946년 창함수로 가우스함수 e^{-t^2} 을 사용하여 다음과 같은 단시간푸리에변환을 고려하였다.

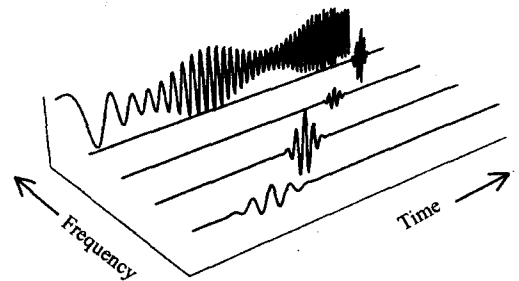


Fig. 2.1 Signal plane expressed in a parallel

$$\mathcal{F}(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-b)^2}{\sigma^2}} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (1)$$

여기서 실수 σ 는 미리 선정하여 놓는다. 이것을 Gabor변환이라 부르고, $\mathcal{F}(\omega, b)$ 는 신호 $f(t)$ 의 신호평면에 표현된다. 그러나, Gabor변환에서는 창의 폭이 주파수에 의존하지 않고, σ 에 고정되고 앞에서 기술한 신호의 최소단위의 관점에서 효율이 나쁘고 이 결점을 회피하기 위한 Mother-Wavelet은 다음과 같다.

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} e^{-it} \quad (2)$$

이 함수 ψ 를 Gabor의 Mother-Wavelet라 부른다. 함수 $f(t)$ 의 Mother-Wavelet $\psi(t)$ 에 의한 시간의 함수 $f(t)$ 의 적분Wavelet변환은 다음 식으로 정의된다^[2].

$$(W_{\phi}f)(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega b} \overline{\widehat{\psi}(a\omega)} d\omega \quad (3)$$

여기서, $a > 0$, ψ 는 $\psi(t)$ 의 복소공역을 나타낸다. 함수 $\psi(t)$ 는 허용조건은

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (4)$$

를 만족하는 함수이고 기본Wavelet라 불린다. 여기서, ψ 는 $\psi(t)$ 의 푸리에변환을 나타내고,

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

이다.

본 연구에서는 기본Wavelet로 다음 식의 Gabor함수^[2]을 채택하였다.

$$\psi_g(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{\omega_0}{\gamma}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0 t}{\gamma}\right)^2\right] \exp(i\omega_0 t) \quad (6)$$

$$\widehat{\psi}_g(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{\gamma}{\omega_0}} \cdot \exp\left[-\frac{\left(\frac{\omega_0 t}{\gamma}\right)^2}{2} (\omega - \omega_0)^2\right] \quad (7)$$

Gabor함수는 허용조건 식 (4)를 엄밀히는 만족하지 않지만 $\gamma = \pi\sqrt{2/\ln 2}$, $\omega_0 = 2\pi[\text{rad/s}]$ 로 하면 근사적으로 만족하여, 기본 Wavelet로 사용이 가능하고 본 연구에서도 이 값을 채택하였다. Wavelet변환은 1변수함수에서 2변수함수로 적분변환이고, 변수 t 가 시간을 나타내는 경우, 파라메타 b 는 시간, 파라메타 a 는 주기의 크기를 나타낸다. 적분핵의 함수 $\psi(t)$ 는 허용조건(Admissible condition)을 만족하는 함수이면 자유로 선택이 가능하고 ω_0/a 값은 각주파수 ω 의 값과 일치하도록 $\omega_0 = 2\pi$ 로 하였다

Wavelet 변환에 의한 분산성파동의 시간-주파수해석에 대해 고찰하기 위해 다음 식과 같이 약간 다른 각주파수 ω_1 과 ω_2 를 갖고, x방향으로 전파하는 조화진행파에 대해 고려해 본다.

$$u(x, t) = e^{-i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{-i(k_2 x - \omega_2 t)}$$

$$= 2 \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) e^{-i(k_c x - \omega_c t)} \quad (8)$$

여기서, k_1 과 k_2 는 각각 파수이고

$$k_c = (k_1 + k_2)/2, \quad \omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2 \quad (9)$$

$$\Delta k = (k_1 - k_2)/2, \quad \Delta \omega = (\omega_1 - \omega_2)/2 \quad (10)$$

이다. $\Delta \omega$ 가 충분히 작으면 각주파수 ω_c 에서 위상속도(phase velocity) c_p 와 군속도(group velocity) c_g 는 다음 식으로 정의된다.

$$c_p = \omega_c / k_c, \quad c_g = \Delta \omega / \Delta k \quad (11)$$

그리고, Gabor Wavelet을 이용한 경우 조화진행파 $u(x, t)$ 의 Wavelet변환의 절대값은 다음 식으로 표시된다.^[2]

$$|(Wu)(x, a, b)| = \sqrt{a} \{[\widehat{\psi}_g(a\omega_1)]^2 + [\widehat{\psi}_g(a\omega_2)]^2 + 2\widehat{\psi}_g(a\omega_1)\widehat{\psi}_g(a\omega_2)\cos(2\Delta kx - 2\Delta \omega b)\}^{1/2} \quad (12)$$

$\Delta \omega$ 가 충분히 작고 $\widehat{\psi}_g(a\omega_1) \approx \widehat{\psi}_g(a\omega_2) \approx \widehat{\psi}_g(a\omega_c)$ 로 간주하는 경우에는 식(12)은 다음 식으로 근사화 된다.

$$|(Wu)(x, a, b)| = \sqrt{2a} |\widehat{\psi}(a\omega_c)| \cdot [1 + \cos(2\Delta kx - 2\Delta \omega b)]^{1/2} \quad (13)$$

윗식으로부터 알 수 있듯이 Wavelet 변환의 절대값은 $a = \omega_0 / \omega_c$, $b = (\Delta k / \Delta \omega)x = x / c_g$ 에서 극대가 됨을 알 수 있다. 다시 말해, Wavelet변환의 절대값을 시간-주파수평면상에 플롯하면 군속도 c_g 로 전파하는 각 주파수 ω_c 의 파동이 위치 x 에 도달하였을 때 시간 b 에서 극대가 된다.

이것을 이용하면 파동 데이터를 시간-주파수 해석함으로써 각주파수성분의 군속도의 분산관계를 조사할 수 있다.

2.2 초음파 에코파형의 노이즈 제거

초음파신호 $s(t)$ 는 두 요소의 합으로 나타낼 수 있다.

$$s(t) = y(t) + n(t) \quad (14)$$

$y(t)$ 는 노이즈 $n(t)$ 에 묻혀있는 초음파신호이다. 따라서, $s(t)$ 는 노이즈에 의해서 변형된 신호이다. 본 연구의 목적은 최대한 $y(t)$ 에 가까운 신호 $s^R(t)$ 를 구하는 것이다. 따라서, $n(t)$ 의 영향은 최소가 되어야한다.

신호처리이론에서 백색 가우시언 잡음(White gaussian noise)에 묻혀있는 펄스를 검출하는 최적수신필터는 검출된 펄스와 같은 형태의 펄스 응답을 가진 Mathed filter로 잘 알려져 있다. Matched filter는 다음의 주파수 응답을 갖는다.

$$h_{opt}(f) = K \frac{Y^*(f)e^{-j\omega T}}{N(f)} \quad (15)$$

K 는 상수, $Y(f)$ 는 검출된 펄스 $y(t)$ 의 주파수스펙트럼이다. T 는 도착펄스와 출력 피크 사이의 개별 시간지연이고, $N(f)$ 은 노이즈의 주파수 스펙트럼이다. 백색 가우시언 잡음 또는 랜덤잡음 $N(f)$ 은 주파수 범위 내에서 일정하고, 식 (15)은 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$H_{opt}(t) = K \cdot Y^*(f) e^{-f\omega T} \quad (16)$$

시간영역에서 이 결과는 다음과 같다.

$$h_{opt}(t) = K \cdot y(T-t) \quad (17)$$

식 (17)에서 $h_{opt}(t)$ 은 시간 T 로 이동된 것을 제외하면 펄스의 형태는 같다. 수신된 펄스의 성분은 수신되지 않은 펄스와 같은 상관관계를 갖기 때문에 백색 잡음안에서 펄스를 검출하는 최적의 방법은 그 자체의 펄스와 관련시키는 것이다. WT를 2차원의 상관관계를 나타낼 수 있고, 검출된 신호 $y(t)$ 의 신호 형태가 priori이면, $y(t)$ 의 모델이나 모사에는 mother wavelet 함수 $h(t)$ 를 사

용할 수 있다. 따라서, WT는 $H(a_f)$ 의 주파수응답을 가진 여러 개의 Matched filter를 사용할 수 있다. 입력신호 $s(t)$ 가 하나의 Matched filter로 검출될 때, 이것은 신호의 팽창계수 m 과 시간이동 b 를 나타낸다. 따라서, 선택된 mother wavelet이 그 신호를 효과적으로 나타낼 수 있다면, WT는 노이즈 감소도구로 사용될 수 있고, WT는 시간 분해능의 손실없이 신호의 SNR을 향상시키는 Matched filter처럼 사용될 수 있다.

3. 실험장치 및 방법

3.1 실험장치

Fig. 3.1은 본 연구에서 구성한 펄스반사식 초음파계측시스템을 나타내고 있다. 초음파계측시스템의 특징은 회로구성이 전부 디지털화되어 16bit CPU에 의해 제어된다. 따라서 송신펄스폭이 좁고 주파수대역폭이 넓으므로 50ns의 시간분해능으로 초음파의 전파시간 측정이 가능하고 사용이 간편하다. 실험에 사용한 초음파 탐촉자는 접촉면적이 78.43mm²인 B5C10N의 광대역 주파수 특성을 갖는 종파수직탐촉자를 사용하였다.

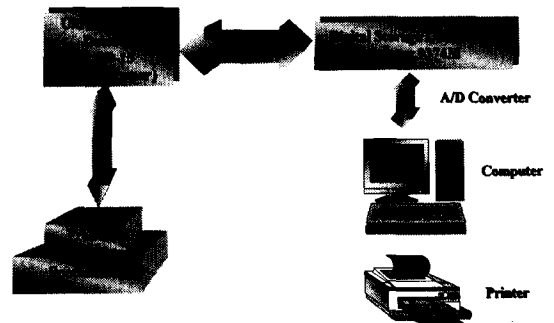


Fig. 3.1 Schematic diagram of measuring system

시험체에 탐촉자의 접촉압력이나 접촉상태, 접촉매질의 점성이나 음향임피던스, 접촉매질층의 두께 및 온도 등의 영향에 따라 변환특성이 달라질 수 있기 때문에 접촉매질은 독일제(ZG-F)를 사용하고 추를 사용하여 일정한 압력을 가하였다.

초음파 탐촉자에 수신된 초음파파형은 동시에 디지털스토포리지 오실로스코프에 RF-signal로 표시되고, 컴퓨터와

GAGE(사)의 CS 2125 고속A/D 변환기에 의해 인터페이스되고 Labview Ver. 4.0(S/W)에 의해 초음파 파형의 실시간 계측에 의해 초음파의 음속이나 감쇠, 스펙트럼 해석 등이 가능한 계측시스템을 구축하였다. Wavelet해석은 CS 2125 고속A/D 변환기에 의해 받은 초음파데이터를 MATLAB을 사용하여 초음파에코파형의 Wavelet해석이 가능한 알고리즘을 구성하고 그 유용성을 검증하였다.

3.2 시험편

WT에 의한 초음파 에코파형의 노이즈 제거 방법을 정량화하기 위해서 직경 50mm, 두께 35mm의 SN20C 원통형 강블럭에 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5mm 황구멍(side-drill hole: SDH)을 가공하였다. 저면 노이즈를 발생시키기 위해서 블록의 저면을 거칠게 가공하였다(평균표면거칠기 43.90 μ m).

4. 실험결과 및 고찰

4.1 컴퓨터 시뮬레이션을 이용한 노이즈제거

WT에 의한 초음파 에코파형의 노이즈 제거법의 유효

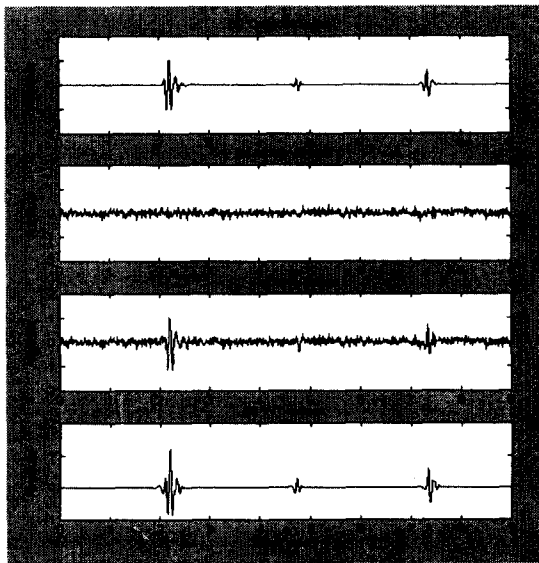
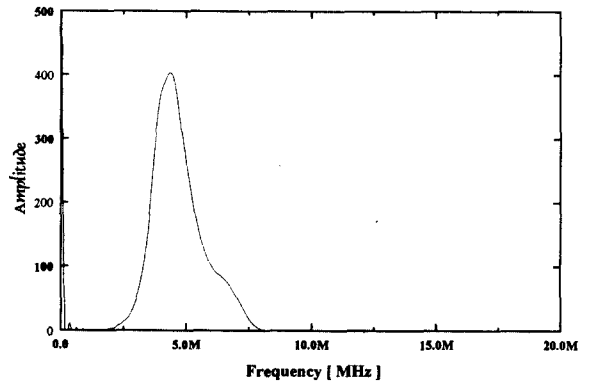


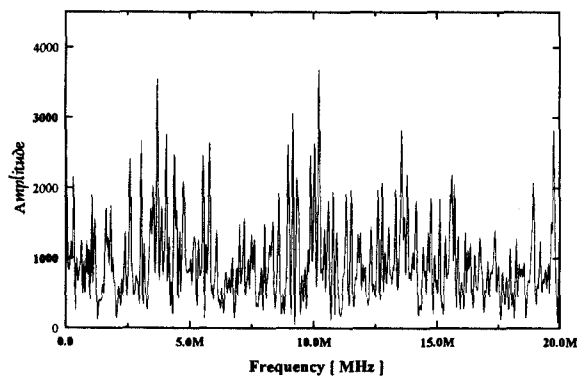
Fig. 4.1 Result of computer simulation of the specimens with side-drill hole

성을 검증하기 위해서 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 이 컴퓨터 시뮬레이션에서는 SM20C 원통형 강블럭의 저면을 거칠게 가공하기 전에 검출한 신호 $y(t)$ 에 발생시킨 백색 가우시언 잡음 $n(t)$ 를 합하는 방법을 사용하였다. Fig. 4.1(a)는 황구멍(SDH)을 가진 시험체에서의 초음파 신호를 나타내며, 이 신호에 백색 가우시언 잡음 $n(t)$ 를 발생시킨 신호가 Fig. 4.1(b)이다. Fig. 4.1(c)는 $y(t)$ 에 $n(t)$ 를 더한 신호 $s(t)$ 이다. 노이즈에 의해서 변형된 신호 $s(t)$ 를 wavlet변환 후 필터링해서 재구성한 결과가 Fig. 4.1(d)이다.

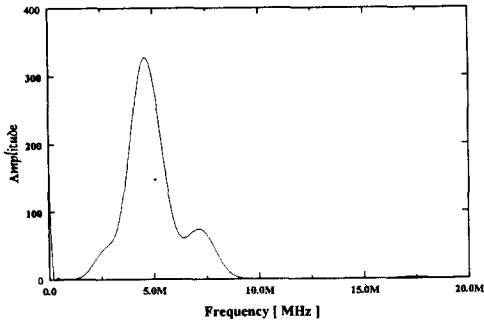
시뮬레이션 결과 노이즈로 인해서 변형된 $s(t)$ 에서는 제 2저면에코 B_2 및 결합에코의 식별이 어렵지만 Wavelet변환 후에는 B_1 , B_2 및 결합에코를 명확하게 볼 수 있다.



(a) Original signal $y(t)$



(b) Signal & noise $s(t)$



(c) WT output

Fig. 4.2 Power spectrum density of (a) the original signal $y(t)$, (b) $s(t)$ added to noise $n(t)$, (c) WT output

Fig. 4.2는 초음파 에코파형의 주파수 분석 결과이다. Fig. 4.2(a)는 원신호 $y(t)$ 에서는 저주파 영역(중심주파수 5MHz)에서 제한적으로 주파수가 분포하는 반면, Fig. 4.2(b)에서는 노이즈를 포함한 $s(t)$ 의 주파수는 넓은 영역에 걸쳐서 분포하고, 노이즈로 인해서 원신호의 주파수 특성을 알기 어렵다. 반면, 4.2(c)의 WT 출력의 주파수 분포는 $s(t)$ 가 WT에 의해서 거의 원신호 $y(t)$ 에 가깝게 재구성되었음을 알 수 있다.

입력신호의 SNR이 -6.8dB인 신호 $s(t)$ 는 WT 후에 SNR이 12.3dB로 증가하는 것을 알 수 있다.

4.2 초음파 에코파형의 노이즈제거

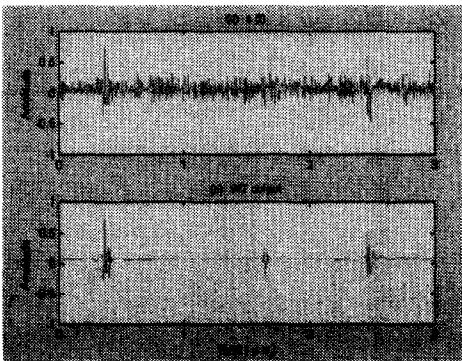
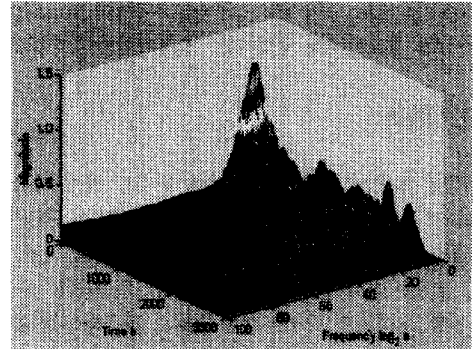
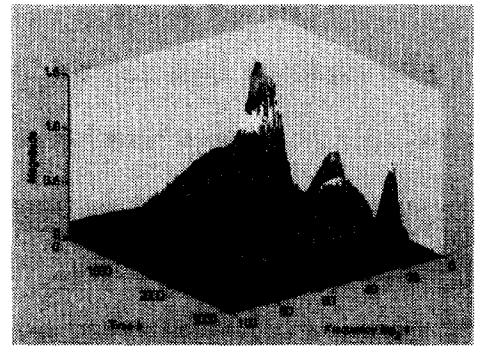


Fig. 4.3 (a) Ultrasonic RF-signal of $s(t)$ and (b) it's WT output

음향노이즈는 초음파의 반사 또는 산란에 의해서 발생하게 되는 것으로서 초음파 탐상에 의한 결함검출이나 재료특성 평가시 계면노이즈와 같은 후방 산란 초음파의 간섭성 산란을 분리하여 해석하는 것이 중요한 과제로 되어 있다.



(a) $s(t)$



b) WT output

Fig. 4.4 Results of (a) 2-D Wavelet transform of $s(t)$ and (b) it's WT output

Fig. 4.3(a)는 SM20C 원통형 강블러의 저면을 거칠게 가공해서 얻은 초음파 에코펄스 $s(t)$ 를 나타내고, Fig. 4.3(b)는 그 초음파 에코펄스 $s(t)$ 의 WT 결과를 나타낸다. 노이즈로 인해서 식별이 어려운 정도인 결함에코드 WT 후에는 매우 명확하게 볼 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 4.4은 $s(t)$ 와 그 $s(t)$ 의 WT에 의한 노이즈 제거 후 신호를 시간-주파수 평면에 나타낸 것으로, 각 시간과 주파수에 의존하는 신호의 정보를 정확히 알 수 있으며, Fig. 4.4(b)에서는 노이즈에 의해서 변형된 신호에서

노이즈 성분을 제거하여 정확하게 원신호 $s(t)$ 를 재구성한 것을 알 수 있다. 2차원 WT의 각 포인트 WT(a, b)는 입력신호와 mother wavelet $h(t)$ 를 이동, 팽창시킨 것 사이에 밀접한 관계가 있음을 나타내고 있다.

Fig. 4.5는 결함크기에 따른 노이즈를 포함한 신호 $s(t)$ 의 SNRIN과 WT의 출력 SNROUT을 비교한 것이 이다. 양의 SNR값은 노이즈보다 크기가 더 크다는 것을 나타내기 때문에 이때는 노이즈와 신호를 분리하는 것이 가능하며, SNR 6dB은 안정된 검출(POD \approx 1.0, PFI \approx 0.0)을 나타내기 때문에 이 값은 작은 결함도 검출할 수 있다고 볼 수 있다. Fig. 4.5에서 WT의 출력 SNROUT이 노이즈를 포함한 신호 $s(t)$ 의 SNRIN보다 평균 20.8dB 증가하였음을 알 수 있다. 이러한 SNR의 증가로 노이즈와 신호를 명확하게 구분 할 수 있기 때문에 노이즈에 의해서 변형된 신호를 WT로 노이즈를 제거하면, 노이즈의 간섭을 받지 않고 고정도의 결함검출이 가능함을 알 수 있다.

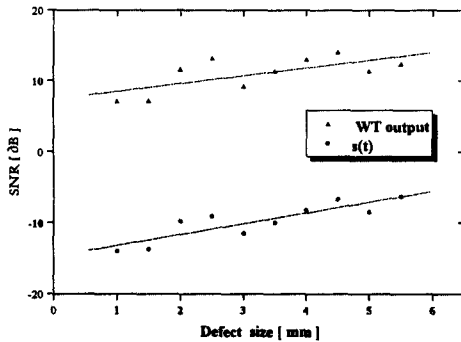


Fig. 4.5 Plot of the SNR as a function of the hole diameters for (○) the input signal and (△) the processed WT output

5. 결론

Wavelet변환에 의한 초음파 에코파형의 시간-주파수해석 방법의 유용성 유무를 실험적으로 검증하고자 초음파 신호의 노이즈 제거실험을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 다양한 크기의 황구멍(SDH)을 가진 SM20C 원통형 강블럭의 저면을 거칠게 가공하여 저면노이즈를 임의로 발생시키고 초음파 에코파형에 발생하는 저면노이즈 제거에 Wavelet변환에 의한 시간-주파수해석 방법이 유용함을 알 수 있었다.

2. WT의 출력 SNROUT이 노이즈를 포함한 신호 $s(t)$ 의 SNRIN보다 평균 20.8dB 증가하였음을 알 수 있었다. 이러한 SNR의 증가로 노이즈와 신호를 명확하게 구분 할 수 있기 때문에 노이즈에 의해서 변형된 신호를 WT로 노이즈를 제거하면, 노이즈의 간섭을 받지 않고 고정도의 결함검출이 가능하였다.

후 기

" 이 논문은 서울산업대학교 교내 학술연구비로 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다."

참 고 문 헌

- [1] H. Inoue, "Experimental wavelet analysis of flexural waves in beams", *Experimental Mechanics* 36(3), 1996, pp. 212-217
- [2] 井上 裕嗣, 中西智明, 岸本喜久雄, 涉谷壽一, "ウェーブレット変換による分散性応力波の時間-周波数解析(群速度の同定と超音波材料評価への応用)" *日本機械學會論文集, A編*, 61 (581), 1995, pp. 153-160
- [3] P.Flandrin, "Nondestructive evaluation in the time-frequency domain by means of the Wigner-Ville Distribution", *Signal Processing and Pattern Recognition in Nondestructive Evaluation of Materials*, edited by C. H. Chen, Springer-Verlag, 1988 36(3), 1996, pp. 212-217
- [4] C. H. Chen and J. C. Guey, "On the use of Wigner distribution in ultrasonic NDE", in *Review of Quantitative NDE*, Vol. 11A, Plenum Press, 1992
- [5] 武捨貴昭, 川浦淳一, "ウィグナー分布とその超音波非破壊評価への応用", *非破壊検査*, 40(9), 1991, pp. 587-591
- [6] Wahl, T. J. and Bolton, J. S., *J. Sound Vib.*, 163-1, 1993
- [7] J. Morlet, G. Arens, E. Fourgeau and D. Giard: *Wave Propagation and sampling theory -Part I, Complex signal and scattering in multilayered medis*, *Geophysics*, 47(2), pp 203-221, 1982