

리셋 와인드업 방지법에 기초한 상태 제한이 존재하는 제어 시스템의 보상 방법

Anti-Reset Windup Based Compensation Method for State Constrained Control Systems

박종구
(Jong-Koo Park)

Abstract : An anti-reset windup (ARW) based compensation method for state constrained control systems is studied. First, a linear controller is constructed to give a desirable nominal performance ignoring state-constraints of a plant. Then, an additional compensator is introduced to provide smooth performance degradation under state-constraints of the plant. This paper focuses on the effective design method of the additional compensator. By minimizing a reasonable performance index, the proposed compensator is expressed in terms of the plant and controller parameters. The resulting dynamics of the compensated controller exhibits the dominant part of the linear closed-loop system which can be seen from the singular perturbation model reduction theory. The proposed method guarantees total stability of overall resulting systems if linear controllers were constructed to meet certain condition.

Keywords : state constrained system, anti-reset windup, singular perturbation theory

I. 서론

플랜트의 내부에 제한요소가 존재하는 경우, 다원체형의 상태제한이 있는(polyhedral or ellipsoidal constraints on the states) 상태방정식으로 시스템의 동특성을 기술할 수 있다. 이 경우 기존의 선형 제어기 설계법은 이 시스템에 그대로 적용할 수 없다. 왜냐 하면, 시스템이 상태 제한에 걸리는 경우에 플랜트의 동특성은 실질적으로 제어기와 단절된 상태가 되기 때문에, 전체 루우프의 특성은 당초에 설계된 시스템의 특성과 괴리가 발생되어 부적절한 출력 특성을 보일 수 있기 때문이다.

대부분의 연구자들은 시스템에 상태 제한이 있을 때 이를 제어기 설계 시 고려하여 제한 최적화(constrained optimization) 문제로 구성한 다음, 이를 최적화 기법을 사용하여 만족시키는 제어기를 구성하여 시스템이 상태 제한에 걸리지 않도록 하는 방법을 사용해 왔다[14]. 최근에는 볼록 최적화(convex optimization) 알고리즘의 발달과 컴퓨터의 계산 능력의 확장에 힘입어 제어공학 분야에서 LMI(Linear Matrix Inequalities) 기법이 개발되었고, 이를 이용하여 상태 제한이 존재하는 시스템에서의 제어기를 LMI 도구를 사용하여 설계하는 방법이 제시 되었다[2][3]. 그러나 이러한 방법으로 제어기가 설계된 시스템은 상당히 제한적인 조건을 충족시키도록 구성되기 때문에 안정도는 보장되나 성능은 만족스럽지 않은 경우가 흔하며, 상태 제한 조건이 달라지거나 제어환경이 변경되는 경우 제어기를 재설계하여야 하는 어려움이 있다. 본 논문에서는 이런 점에 유의하여 상태 제한이 존재하는 시스템에 대한 새로운 접근 방법을 취하도

록 한다. 즉 제어 입력의 제한이 존재하는 시스템에서의 제어기 설계 개념을 도입하여 상태 제한이 존재하는 시스템을 효과적으로 다루도록 한다.

제어 입력 신호의 포화 현상을 다루는 데에는 크게 두 가지 접근 방법이 있다. 하나는, 제어기 설계 과정에서 제어 한계(control bounds)를 고려하여, 결코 제어기의 출력이 제한된 값을 넘지 못하도록 하는 방법이며[12][17][19], 다른 방법으로는 제어기 설계의 첫 단계에서는 포화 현상을 고려하지 않고 설계한 다음, 포화 현상으로 인한 부정적인 영향을 보상하기 위하여 적절한 보상 구조를 채택하는 방법이 있다. 후자의 방법은 포화 시스템에 있어서 '2단계 설계 기법(two-step design technique)'이라 한다[4][6][7][11][14]-[16][20]. 실제적으로는 후자의 방법, 즉 2단계 설계 기법이 광범위하게 사용되고 있으며, 이러한 접근 방법으로 설계된 제어 시스템을 ARW(Anti-Reset Windup) 구조가 포함되어 있다고 한다.

본 논문에서는 상태 제한이 존재하는 시스템에 ARW 설계법을 적용한 새로운 접근 방법을 시도한다. 즉 플랜트의 상태 제한이 존재하지 않는다는 가정아래 먼저 선형 제어기를 전체적 안정도와 성능을 고려하여 설계한 후, 상태 제한으로 인한 안정도 훼손을 복구하고 성능 저하를 완화할 수 있는 추가적인 보상기를 설계하는 접근 방법을 취한다. 이 과정 중에서 선형 제어기는 기존의 알려진 설계 기법으로 잘 구성되어 있다는 전제아래 추가적인 보상기의 설계에 초점을 맞추도록 한다.

이러한 논문방향에 따라 2절에서는 상태 제한이 존재하는 제어 시스템을 기술하고, 이에 대한 새로운 보상구조를 제안한 후, 보상기 설계에 대한 제어 목표를 설정한다. 3절에서는 제어기의 상태변수를 매개로 한 성능평가함수를 최소화하는 보상기를 유도한 후, 제시된 보상

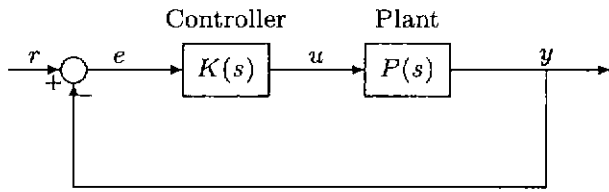


그림 1. 출력 되먹임 제어 시스템.
Fig. 1. Output feedback control systems.

방법의 실제적인 의미를 4절에서 살펴봄으로써 그 타당성을 기술한다. 보상된 전체 시스템이 전체적으로 안정할 조건을 5절에 언급하며, 제시된 조건이 만족되도록 제어기를 쉽게 구성할 수 있음을 보인다. 제시된 보상 방법의 유용성을 예제를 통해 6절에서 살펴본다. 끝으로 7절에 본 논문의 결론을 실었다.

II. 상태 제한이 존재하는 제어 시스템에 대한 보상 구조와 문제의 설정

그림 1에 일반적인 출력 되먹임 제어 시스템을 도시하였다. 여기서 플랜트는 상태 제한이 존재하는 시스템이다. 플랜트와 제어기는 다음과 같은 최소의(minimal) 상태 방정식으로 나타낼 수 있다.

(가) 플랜트 $P(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu(t), \tag{1}$$

$$y(t) = C\mathcal{S}(x_p(t)) + Du(t), \quad \mathcal{S}(x_p(t)) \in \Psi_{R^r}. \tag{2}$$

(나) 제어기 $K(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_c(t) = Fx_c(t) + Ge(t), \tag{3}$$

$$v(t) = Hx_c(t) + Le(t). \tag{4}$$

$$e(t) = r(t) - y(t). \tag{5}$$

여기서 $r(t) \in R^n$ 는 기준 입력, $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력, $y(t) \in R^n$ 는 출력, $x_p(t) \in R^p$ 는 플랜트의 상태 변수, 그리고 $x_c(t) \in R^q$ 는 제어기의 상태 변수이며, 상수 행렬 A, B, C, D, F, G, H , 그리고 L 은 적절한 차수를 갖는다. Ψ_{R^r} 는 R^r 공간상의 유한한 부분집합(bounded subspace of R^r space)으로서 그 기하학적인 모양은 타원체 형태 등을 취할 수 있으며, $\mathcal{S}(\cdot): R^p \rightarrow \Psi_{R^r}$ 는 연속대응(continuous mapping)이다. 만약 $x_p(t) \in \Psi_{R^r}$ 이면, $\mathcal{S}(x_p(t)) = x_p(t)$ 이다. 그러나 $x_p(t) \notin \Psi_{R^r}$ 이면, $\mathcal{S}(x_p(t))$ 의 일부 요소는 Ψ_{R^r} 경계값을 가지고 그 나머지 원소는 내부값을 가지거나, 모든 원소들이 경계값을 가질 수 있다.

포화 비선형이 내재된 제어 시스템의 효과적인 보상 방법으로서 ARW (Anti-Reset Windup) 방법이 있다. 이 방법은 2단계 제어기 설계기법으로서, 첫 단계에서는 포화 요소를 고려하지 않고 제어기를 설계한 후, 추가적인 보상기를 도입하여 포화 요소로 인한 부정적인 효과를 감소시키는 과정을 따른다. 최근의 ARW 연구 결과들은 대개 [1]의 관측자 구조로 재정돈 할 수 있다[20]. 관측자 구조는 원하는 제어 입력인 제어기의 출력과 실

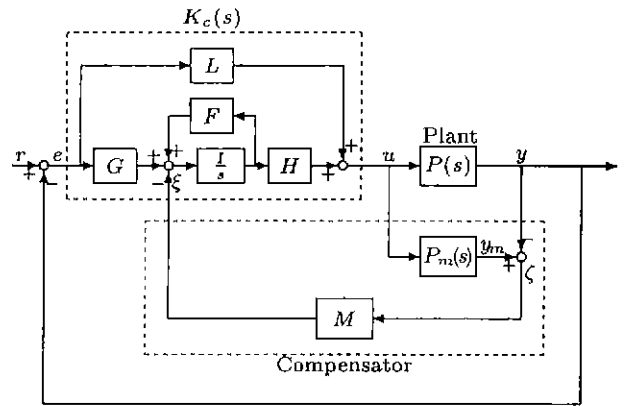


그림 2. 상태 제한이 존재하는 시스템의 보상구조.
Fig. 2. Compensation structure of state-constrained control systems.

제로 플랜트에 인가되는 제어 입력 사이에 포화 현상으로 인하여 차이가 발생할 때, 제어기를 보상하는 구조로서 되먹임 행렬 보상 방법을 이용한다. 이러한 구조는 포화 보상 시스템의 표준적인 것으로 인식되고 있다.

본 논문에서는 포화 요소를 가진 제어 시스템에서의 보상 개념을 상태 제한이 존재하는 시스템에 적용하여 효과적인 제어기 설계기법을 제시하고자 한다. 그림 2에 ARW 보상 개념을 적용한 보상 구조를 도시하였다. 여기서 $P_m(s)$ 는 상태 제한이 없는 플랜트 모델로서 동특성은 다음과 같다.

(다) 플랜트 모델 $P_m(s)$ 의 동특성:

$$x_m(t) = Ax_m(t) + Bu(t), \tag{6}$$

$$y_m(t) = Cx_m(t) + Du(t). \tag{7}$$

보상된 제어기의 동특성은 다음과 같다.

(라) 보상된 제어기 $K_c(s)$ 의 동특성.

$$x_c(t) = Fx_c(t) + Ge(t) - M(y_m(t) - y(t)), \tag{8}$$

$$u(t) = Hx_c(t) + Le(t). \tag{9}$$

여기서 M 은 보상행렬로서 전체 시스템의 안정도와 보상된 시스템의 성능향상을 위해 적절히 선정되어야 할 설계변수이다. 실제 플랜트에 외부교란(disturbance)이 있는 경우 그림 2에서의 출력변수 $y(t)$ 는 추정을 통하거나 수학적 모델링을 통하여 얻을 수 있다. 플랜트가 상태 제한에 걸리지 않는 경우 그림 2는 순수한 선형 시스템으로 동작하게 된다. 제시된 보상구조의 목적은 플랜트에 상태제한이 존재하더라도 원래의 선형 시스템이 보이는 응답 특성을 가능한 한 근사하게 유지하도록 하는 것이다.

실제 플랜트에 외부교란(disturbance)이 있는 경우 그림 2에서의 출력변수 $y(t)$ 는 추정을 통하거나 수학적 모델링을 통하여 얻을 수 있다고 가정한다. 또한 일반성을 헤치지 않고 행렬 C 가 완전 행 랭크 (full row rank) 행렬이라고 가정한다. 행의 수가 행렬 랭크(rank)보다 크

다면, EC를 완전 행 랭크 (full row rank)로 만드는 완전 행 랭크 행렬 E가 항상 존재한다. 이 경우에는 위의 (2)와 (7)은 이 이후의 논문 전개에 있어서 다음과 같이 표현되어 있다고 간주한다.

$$\bar{y}(t) = \bar{C} \mathcal{S}(x_p(t)) + \bar{D}u(t), \quad (10)$$

$$\bar{y}_m(t) = \bar{C}x_m(t) + \bar{D}u(t), \quad (11)$$

여기서 $\bar{y}(t) := Ey(t)$, $\bar{y}_m(t) := Ey_m(t)$, $\bar{C} := EC$, 그리고 $\bar{D} := ED$ 이다.

III. 보상기의 설계

포화 시스템에서 ARW 보상기의 설계 개념은 다음과 같다: 제어 입력 신호의 제한으로 인한 성능 저하는 제어기의 상태 변수들이 포화 요소가 없는 선형 시스템에서의 그것과 다르다는 것에 기인한다. 왜곡된 제어기의 상태 변수들은 부적절한 제어 신호를 발생시키고, 결국 폐루프 시스템의 성능을 저하시키게 되는 것이다. 그러므로 제어 입력 신호의 포화 현상이 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우의 시간에 따른 시스템의 상태 변수 차이를 성능 평가의 척도(performance index)로 삼아 이를 최소화하는 추가적인 ARW 보상기를 도입함으로써 성능향상을 도모할 수 있다.

실제로 이러한 설계방법은 ARW 구조의 설계에 있어서 표준적인 개념이며, 우수한 성능향상을 가져다 준다. 여기서 상태제한이 존재하는 시스템을 생각해 보자. 플랜트에 상태 제한이 존재하는 경우 플랜트의 출력 특성은 왜곡되고, 이에 따라 제어기는 왜곡된 출력 특성을 바탕으로 부적절한 제어신호를 발생시키게 되어 전체 시스템의 성능은 저하되게 된다. 이는 입력 포화요소가 존재할 때 플랜트에 왜곡된 제어 신호가 전달되어 플랜트의 출력 특성이 왜곡되고, 이 왜곡된 출력 신호를 바탕으로 부적절한 제어신호를 생성해내는 메카니즘과 유사하다. 따라서 본 논문에서는 입력신호제한이 있는 시스템에서의 제어기 보상 개념을 상태제한이 존재하는 시스템에 적용하도록 한다. 즉 플랜트의 상태가 제한되어 출력이 왜곡 현상을 일으키는 경우 그림 2의 구조에서 제어기의 상태 변수 값들을 상태 제한이 있는 시스템의 그것에 최대한 비슷하게 유지시키도록 한다.

Park과 Choi[14]는 시스템의 성능은 상태 변수의 궤적과 관계되며 상태 변수의 궤적은 평형점과 관계가 있으며, 이와 같은 상태 공간 상의 평형점의 위치 변화가 시스템의 성능 저하를 유발시키는 요인 중의 하나라는 사실을 파악한 후, 포화된 시스템과 포화되지 않은 시스템의 평형점 사이의 거리를 근접시키는 방법을 통한 ARW 보상방법을 제시한 바 있다.

이러한 보상 개념을 그림 2의 보상 구조에서 보상 행렬 M을 설계하는데 적용하도록 하자. 이를 위한 사전 작업으로서 플랜트의 동특성 (1), 플랜트 모델의 동특성 (6), 그리고 보상된 제어기의 동특성 (8)을 플랜트 상태 제한의 존재여부에 따라 통합하여 다시 기술한다.

(가) 상태 제한이 존재하지 않을 때의 폐루프 시스템의 동특성: 앞의 (1), (2), (8), (9), 그리고 $x_p(t) = \mathcal{S}(x_p(t))$ 로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 r(t), \quad (12)$$

여기서 $x(t) := (x_c^T(t), x_p^T(t))^T$ 이고

$$A_1 := \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B_1 := \begin{bmatrix} T \\ U \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} G[I - D(I + LD)^{-1}L] \\ B(I + LD)^{-1}L \end{bmatrix}$$

$$P = F - GD(I + LD)^{-1}H$$

$$Q = -G[I - D(I + LD)^{-1}L]C \quad (14)$$

$$R = B(I + LD)^{-1}H$$

$$S = A - B(I + LD)^{-1}LC$$

이다

(나) 상태 제한이 존재할 때의 폐루프 시스템의 동특성: 앞의 (1), (2), (6)-(9)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_{m1} \tilde{x}(t) + B_{m1,1} \mathcal{S}(\tilde{x}_p(t)) + B_{m1,2} r(t), \quad (15)$$

여기서 $\tilde{x}(t) := (\tilde{x}_c^T(t), \tilde{x}_m^T(t), \tilde{x}_p^T(t))^T$ 이고

$$A_{m1} := \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ \Pi & A \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B_{m1,1} := \begin{bmatrix} MC - G[I - D(I + LD)^{-1}L]C \\ -B(I + LD)^{-1}LC \\ -B(I + LD)^{-1}LC \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$B_{m1,2} := \begin{bmatrix} G[I - D(I + LD)^{-1}L] \\ B(I + LD)^{-1}L \\ B(I + LD)^{-1}L \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\Theta := \begin{bmatrix} F - GD(I + LD)^{-1}H - MC \\ B(I + LD)^{-1}H & A \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Pi := [B(I + LD)^{-1}H \quad 0] \quad (20)$$

이다. 기호 “~”는 해당 변수가 플랜트의 상태 제한이 존재할 때의 변수라는 것을 의미한다.

플랜트가 상태 제한에 걸리는 경우 시스템의 출력 응답은 플랜트에 가해지는 제어 입력에 관계없는 양상을 보이게 된다. 즉 되먹임 루프가 실질적으로 끊어지게 되는 것이다. 이때 플랜트 자체가 개루프적으로 불안정하다면 시스템은 결코 광역적(global)으로 안정화시킬 수 없다. 따라서 본 논문에서는 개루프적으로 불안정한 플랜트만을 다루기로 한다. 그 외에 보상 행렬 M을 설계하는 데 필요한 몇 가지 가정을 한다.

A1) 플랜트 P(s)는 안정하다. 즉 (1)에서 시스템 행렬 A는 안정한 고유치를 갖는다.

A2) 플랜트의 상태 제한이 없는 경우에 선형 제어 시스템의 안정도를 보장하면서 만족할 만한 성능을 제공하

는 제어기 $K(s)$ 가 설계되어 있다.

A3) 상태 제한이 없는 경우의 페루우프 플랜트의 시스템 행렬 $S = A - B(I+LD)^{-1}LC$ 는 안정한 고유치를 갖는다.

가정 A1)과 A2)는 이런 종류의 문제들에서 표준적인 것이다. 가정 A3)는 기술적인 이유에서 필요로 하는 것으로서, 보상기를 설계하기 전에 이 조건을 쉽게 검증할 수 있다. 가정 A3)는 그림 1에서 제어기 $K(s)$ 대신 그것의 직접 이득 행렬 (direct transmission matrix) L 만을 대입한 시스템이 안정해야 된다는 조건과 동일하다. 제어기의 동특성이 어떤 제어 환경에 의하여 멈춰지는 경우 이러한 상황이 전개될 수 있다. 따라서 실제적인 측면에서 보면 가정 A3)가 만족되도록 제어기 $K(s)$ 를 설계하는 것이 바람직 하다. 만약 대상 시스템이 가정 A1)-A3)를 만족하지 않는 경우 제어기를 조정하거나 재설계한다.

상태 제한이 없는 시스템의 제어기의 평형점과 상태 제한이 존재하는 시스템의 제어기의 평형점 사이의 거리를 최소화 하도록 보상 행렬 M 을 설계하도록 한다. $(\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T$ 를 (12)의 평형점이라 하고, $(\bar{x}_c^T, \bar{x}_m^T, \bar{x}_p^T)^T$ 를 (15)의 평형점이라 하자. 이제 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 1 : 그림 2와 같은 플랜트의 상태 제한이 존재하는 보상 구조에서, 시스템이 가정 A1)-A3)을 만족시킨다 하자. 그러면 성능 평가 척도

$$\min_M J = \|\bar{x}_c - \bar{x}_c^*\|^2 \tag{21}$$

를 최소화시키는 보상 행렬 M^* 는 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$\begin{aligned} M^* &= G[I - D(I+LD)^{-1}L] \\ &+ G[I - D(I+LD)^{-1}L]C \\ &\times [A - B(I+LD)^{-1}LC]^{-1} \\ &\times B(I+LD)^{-1}L. \end{aligned} \tag{22}$$

증명 : 상태 제한이 없는 경우에 페루우프 시스템의 평형점 $\bar{x} = (\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T$ 는 (12)로부터

$$\bar{x} = -A_i^{-1}B_i r \tag{23}$$

이다. 여기서 A_i, B_i 은 (13), (14)에 각각 기술되어 있다.

행렬 A_i 은 상태 제한이 없는 페루우프 시스템의 시스템 행렬에 해당되고, 가정 A2)에 의하여 안정 행렬이므로 A_i 의 역행렬은 존재한다. 또한 가정 A3)에 의하여 S 가 특이 행렬이 아니므로, Kailath[9]의 정리 A.22를 적용하면

$$A_i^{-1} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} X & -XQS^{-1} \\ -S^{-1}RX & W \end{bmatrix} \tag{24}$$

이고, 여기서

$$X := (P - QS^{-1}R)^{-1}, \tag{25}$$

$$W := S^{-1} + S^{-1}RXQS^{-1} \tag{26}$$

로 정의된다. 위의 (24)를 (23)에 대입하면

$$\begin{aligned} \bar{x}_c &= -XG[I - D(I+LD)^{-1}L]r \\ &+ XQS^{-1}B(I+LD)^{-1}Lr \end{aligned} \tag{27}$$

를 얻는다.

마찬가지로 상태 제한이 존재하는 페루우프 시스템의 평형점 $\bar{x} = (\bar{x}_c^T, \bar{x}_m^T, \bar{x}_p^T)^T$ 은 (15)로부터

$$\bar{x} = -A_{m1}^{-1}(B_{m1,1}\delta(\bar{x}_p) + B_{m1,2}r) \tag{28}$$

이다. 여기서 $A_{m1}, B_{m1,1}, B_{m1,2}$ 는 (16)-(18)에 각각 기술되어 있다.

위의 행렬 A_{m1} 에서 행렬 A 는 가정 A1)에 의하여 안정 행렬이므로 특이행렬(singular matrix)이 아니다. 잠정적으로 θ 가 특이행렬이 아니라 가정한다. 이런 가정 아래에서는 행렬 A_{m1} 이 역행렬을 갖는다는 것이 보장된다. 먼저 성능 평가 척도 J 를 최소화시키는 M^* 를 구한 다음, 이 특별한 해에 대하여 θ 가 특이행렬이 아니라는 것을 보이도록 한다.

Kailath[9]의 정리 A.22를 적용하면

$$A_{m1}^{-1} = \begin{bmatrix} \theta^{-1} & 0 \\ -A^{-1}\theta\theta^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \theta^{-1} &= \begin{bmatrix} F - GD(I+LD)^{-1}H - MC & \\ B(I+LD)^{-1}H & A \end{bmatrix}^{-1}, \\ &= \begin{bmatrix} Y & YMCA^{-1} \\ -A^{-1}B(I+LD)^{-1}HY & Y_1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} Y &:= [(F - GD(I+LD)^{-1}H) \\ &+ MCA^{-1}B(I+LD)^{-1}H]^{-1} \end{aligned} \tag{31}$$

$$Y_1 := A^{-1} - A^{-1}B(I+LD)^{-1}HYMCA^{-1}$$

이다. 위의 (27)를 (32)에 대입하면

$$\begin{aligned} \bar{x}_c &= \{-YMC + YG[I - D(I+LD)^{-1}L]C \\ &+ YMCA^{-1}B(I+LD)^{-1}LC\}\delta(\bar{x}_p) \\ &- \{YG[I - D(I+LD)^{-1}L] \\ &+ YMCA^{-1}B(I+LD)^{-1}L\}r \end{aligned} \tag{32}$$

을 얻는다.

위의 (35)와 (32)로부터

$$\bar{x}_c - \bar{x}_c^* = E_1 r + E_2 \delta(\bar{x}_p), \tag{33}$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} E_1 &:= YMC - YG[I - D(I+LD)^{-1}L]C \\ &- YMCA^{-1}B(I+LD)^{-1}LC, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 E_2 := & YG[I-D(I+LD)^{-1}L] \\
 & + YMCA^{-1}B(I+LD)^{-1}L \\
 & - XG[I-D(I+LD)^{-1}L] \\
 & + XQS^{-1}B(I+LD)^{-1}L
 \end{aligned} \tag{35}$$

와 같이 정의된다.
위의 (35)로부터

$$\begin{aligned}
 & YM_iC[I-A^{-1}B(I+LD)^{-1}LC] \\
 & = YG[I-D(I+LD)^{-1}L]C
 \end{aligned} \tag{36}$$

이 만족되면 E_2 는 0이 되고, 이러한 M_i 는

$$\begin{aligned}
 & M_iC \\
 & = G[I-D(I+LD)^{-1}L]C[A-B(I+LD)^{-1}LC]^{-1}A \\
 & = G[I-D(I+LD)^{-1}L]C[A-B(I+LD)^{-1}LC]^{-1} \\
 & \quad \times [A-B(I+LD)^{-1}LC+B(I+LD)^{-1}LC]
 \end{aligned} \tag{37}$$

로부터

$$\begin{aligned}
 M_i = & G[I-D(I+LD)^{-1}L] \\
 & + G[I-D(I+LD)^{-1}L]C \\
 & \times [A-B(I+LD)^{-1}LC]^{-1}B(I+LD)^{-1}L
 \end{aligned} \tag{38}$$

이다. 위의 (38)을 (31)에 대입하면

$$Y = (P - QS^{-1}R)^{-1} = X \tag{39}$$

이고, 위의 (37)과 (39)를 (33)에 대입하면 $E_1=0$ 을 얻는다. 따라서 (28)의 값은 $J=0$ 으로 성능 평가함수를 최소화시키는 M^* 이다.

이제 (22)과 같이 보상 행렬 M^* 가 설계되었을 때, 실제로 θ 가 특이 행렬이 아님을 증명하자. 가정 (A2)로부터 포화 요소가 없을 때의 페루우프 방정식 (12)의 시스템 행렬 A_i 은 안정 행렬이므로 특이 행렬이 아니다. 그리고 가정 (A3)에 의하여 S 는 특이 행렬이 아니다. 이때 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 \det(\theta) &= \det\left[\begin{array}{cc} F-GD(I+LD)^{-1}H - M^*C & \\ B(I+LD)^{-1}H & A \end{array}\right] \\
 &= \det\left(A_i \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\right) \\
 &= \det(A_i)\det(A)/\det(S) \neq 0.
 \end{aligned} \tag{40}$$

따라서 θ 는 특이 행렬이 아니다. ∇

제안된 (22)의 보상 행렬 M^* 은 플랜트의 상태 제한이 존재하는 시스템에서의 제어기의 안정상태 값(steady-state value)인 평형점을 상태 제한이 없는 선형 시스템에서의 안정 상태 값에 기준 입력 r 이나 상태 제한의 존재 형태와 관계없이 그대로 유지시키는 역할을 한다. 따라서 플랜트의 상태 제한이 없다고 가정한 상황에서 선형 제어기가 설계되어 있다면, 제안된 보상 행렬 M^*

는 직접적으로 구성된다. 그러나 상태 제한의 형태가 제한적일수록 시스템 자체의 성능 왜곡은 비례하여 더 심해지게 된다. 정리 1이 의미하는 것은 보상행렬의 형태는 제시된 바와 같이 항상 일정하다는 것이다.

정리 1에 제시된 보상행렬 M^* 를 사용하는 경우 증명 과정으로부터 $\bar{x}_c = \bar{x}_c$ 임을 알 수 있다. 그러나 실제 시스템의 출력 성능은 플랜트의 상태에 관련이 깊으므로, 플랜트의 평형점 위치도 해석할 필요가 있다. 이에 대한 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 2 : 그림 2와 같은 플랜트의 상태 제한이 존재하는 보상 구조에서, 보상행렬이 정리 1에 제시된 데로 설계되어있다고 가정한다. 이때 $\bar{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 는 $\bar{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이기 위한 필요충분 조건이다.

증명 : 정리 1에 제시된 보상행렬 M^* 를 사용하는 경우, 전체 시스템의 안정 상태(steady state)에서 $\bar{x}_c = \bar{x}_c$ 이므로, 그림 1과 그림 2의 시스템에서 $\bar{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이면 $\bar{x}_p = \bar{x}_p$ 임은 명백하다. 따라서 $\bar{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이다. 또한 (23)으로부터

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_p &= (S^{-1}RXT - WU)r \\
 &= [-S^{-1}U + S^{-1}RX(T - QS^{-1}U)]r
 \end{aligned} \tag{41}$$

이며, M^* 를 사용하는 경우 (28)로부터

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_p &= -[-A^{-1}B(I+LD)^{-1}HY \\
 & \quad - A^{-1}B(I+LD)^{-1}YM^*CA^{-1} \quad A^{-1}] \\
 & \quad \times \left[\begin{array}{c} M^*C - G[I-D(I+LD)^{-1}L]C \\ -B(I+LD)^{-1}LC \\ -B(I+LD)^{-1}LC \end{array} \right] \mathcal{S}(\bar{x}_p) \\
 & \quad + \left[\begin{array}{c} G[I-D(I+LD)^{-1}L] \\ B(I+LD)^{-1}L \\ B(I+LD)^{-1}L \end{array} \right] r \\
 & = A^{-1}UC\mathcal{S}(\bar{x}_p) \\
 & \quad + [A^{-1}RX(T - QS^{-1}U) - A^{-1}U]r
 \end{aligned} \tag{42}$$

이다. 이때 \bar{x}_p 를 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_p &= \mathcal{S}(\bar{x}_p) + \mathcal{S}^c(\bar{x}_p), \\
 \mathcal{S}(\bar{x}_p) &\in \mathcal{P}_{R^p}, \quad \mathcal{S}^c(\bar{x}_p) \in R^p.
 \end{aligned} \tag{43}$$

(43)를 (42)에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(\bar{x}_p) &= -S^{-1}A\mathcal{S}^c(\bar{x}_p) \\
 & \quad + [-S^{-1}U + S^{-1}RX(T - QS^{-1}U)]r
 \end{aligned} \tag{44}$$

와 같이 변형된다. (41)과 (44)로부터

$$\bar{x}_p - \mathcal{S}(\bar{x}_p) = S^{-1}A\mathcal{S}^c(\bar{x}_p) \tag{45}$$

를 얻을 수 있다. 이로부터 $\bar{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이면, $\mathcal{S}^c(\bar{x}_p) = 0$ 이고, 따라서 $\bar{x}_p = \bar{x}_p$ 이므로 $\bar{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이다. ■

결과적으로 위의 증명과정으로부터 $\bar{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이면, $\bar{x}_p = \bar{x}_p$ 임을 알 수 있다. 이는 제시된 보상방법을 사용하는 경우, $\bar{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이면, 안정상태에서 $(\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T = (\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T$ 이며, 따라서 전체 시스템의 안정상태 특성이 유지됨을 의미한다.

플랜트 상태의 안정상태가 $\bar{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이면, 시스템 출력의 안정치(steady-state value)는 원하는 기준 안정치를 추종하지 못하게 된다. 이와 같은 시스템은 바람직하지 않으므로, 선형 제어기 설계시 $\bar{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 되게 구성하여야 한다.

IV. 제시된 보상 방법의 실제적인 의미

제안된 보상 방법은 시스템의 축소 차수 모델을 얻는 잘 알려진 방법 중의 하나인 섭동 모델 축소 이론(singular perturbational model reduction theory)[9][10][18]과 밀접한 관계가 있다. 섭동 모델 이론은 하나의 전체 근사 기법(approximate aggregation technique)이라 할 수 있는데, 그 기법이란 축소된 모델이 시스템에서의 주요 동작 모드(dominant mode)를 유지하도록 하는 방법이다. 먼저 섭동 모델 이론을 간략히 살펴보자.

다음과 같은 상태 방정식

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (46)$$

에서 x_2 의 동특성이 x_1 의 동특성보다 충분히 빠르다면 평형점에 빨리 도달하므로, $x_2(t) = 0$ 라 놓음으로써 축소된 모델을 얻을 수 있다. 축소된 모델은

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\bar{x}_1(t) \\ &+ (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u(t) \end{aligned} \quad (47)$$

와 같이 얻어진다. 여기서 “ $\bar{}$ ”는 축소된 모델에서의 해당 변수를 의미한다.

보상 행렬 M^* 가 정리 1과 같이 설계된 경우 포화된 시스템의 페루우프 동특성 (15)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_c(t) &= [F - GD(I + LD)^{-1}H] \hat{x}_c(t) \\ &- M^*C \hat{x}_m(t) + \{M^*C \\ &- G[I - D(I + LD)^{-1}L]C\} \mathcal{E}(\hat{x}_p(t)) \\ &+ G[I - D(I + LD)^{-1}L]r(t) \\ &= P \hat{x}_c(t) + QS^{-1}A \hat{x}_m(t) \\ &- QS^{-1}UC \mathcal{E}(\hat{x}_p(t)) + Tr(t), \\ \dot{\hat{x}}_m(t) &= B(I + LD)^{-1}H \hat{x}_c(t) + A \hat{x}_m(t) \\ &+ B(I + LD)^{-1}Lr(t) \\ &- B(I + LD)^{-1}LC \mathcal{E}(\hat{x}_p(t)) \\ &= R \hat{x}_c(t) + A \hat{x}_m(t) \\ &- UC \mathcal{E}(\hat{x}_p(t)) + Ur(t) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\quad (49)$$

위의 (49)를 (48)에 대입하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_c(t) &= (P - QS^{-1}R) \hat{x}_c(t) \\ &+ (T - QS^{-1}U)r(t) + QS^{-1} \dot{\hat{x}}_m(t). \end{aligned} \quad (50)$$

여기서 P, Q, R, S, T , 그리고 U 는 (13), (14)에 정의되어 있다.

섭동 모델 축소 이론은 상대적으로 빠른 동특성을 소거함으로써 축소 모델을 얻는 방법이다. 본 논문에서 다루는 상태 제한 시스템의 경우 플랜트는 대개 제어기에 비하여 상대적으로 빠른 특성을 지니고 있게 된다. 플랜트의 동특성이 제어기에 비하여 상대적으로 느린 경우, 플랜트의 상태 값이 제한 값에 도달하는 경우가 많지 않으므로 상태 제한으로 인한 성능 왜곡현상이 심각하게 발생되지 않는다. 따라서 $\hat{x}_m(t)$ 의 동특성은 $\hat{x}_c(t)$ 의 동특성보다 빠르므로, 시스템의 전체 응답속도에 비하여 상대적으로 짧은 임의 시간 경과 후에 $\dot{\hat{x}}_m(t) \approx 0$ 로 플랜트의 동특성을 간주할 수 있다. 따라서 위의 (50)은

$$\dot{\hat{x}}_c(t) = (P - QS^{-1}R) \hat{x}_c(t) + (T - QS^{-1}U)r(t) \quad (51)$$

와 같고, 이는 플랜트의 상태 제한이 없을 때의 선형 페루우프 시스템에 섭동 모델 축소 이론을 적용하여 얻은 축소 모델의 형태이며, 따라서 섭동 이론에 의하여 $\bar{x}_c(t) \approx x_c(t)$ 이다. 참고로 상태 제한에 들어가는 순간에는 $\bar{x}_c(t) = x_c(t)$ 이다. 즉 제시된 방법으로 제어기를 보상하는 경우, 상태 제한이 존재하는 경우에도 제어기의 상태 변수들이 선형 시스템에서의 그것에 근사하게 유지됨으로서 플랜트에 가해지는 제어 입력이 덜 왜곡되고 따라서 플랜트 출력의 성능 향상을 기대할 수 있는 것이다.

주 1 : 제안된 보상 방법에서는 상태 제한이 존재하는 경우의 제어기의 평형점 \bar{x}_c 가 상태 제한이 존재하지 않는 선형 시스템의 제어기의 평형점 \bar{x}_c 와 일치하게 된다. 반면에 섭동 모델 축소이론에서의 \bar{x}_c 는 \bar{x}_c 를 근사화시킬 뿐이다. 따라서 (50)에서의 부가적인 항 $QS^{-1} \dot{\hat{x}}_m(t)$ 은 이에 대한 보충항이라 할 수 있다.

주 2 : 보상된 제어기의 동특성은 (51)에 기술된 바와 같이 대개 느린 동특성을 보이는데, 보상된 제어기의 동특성이 느리다면, 플랜트의 출력 $y(t)$ 에 관체된 측정 오차(measurement error)에 덜 민감한 특성을 갖게 된다. 이는 제안된 방법의 또다른 효율성을 말해주는 것이다.

V. 전체 시스템의 안정도 해석

플랜트의 상태 제한이 존재하는 제어 시스템에서의 안정도 문제란, 상태 제한 현상이 발생되었을 때 되먹임 루우프가 끊어지는 상태가 되는데, 플랜트 자체는 개루우적으로 안정하다고 가정했으므로, 제어기가 개루우적으로 불안정한 경우 (예를 들어, PI 제어기) 그것의 상태 변수들이 임의로 크게 발산해 하느냐에 초점을 맞출 수 있다. 따라서 본 논문에서 다루는 제어 시스템의 안정도를 다룰 때에는 플랜트 출력의 안정도 보다는 시스

템 내부의 상태 변수의 안정도 문제를 언급하는 것이 바람직하다. 이에 따라 전체적 안정도(total stability)[5]에 관해 언급한다. 전체적으로 안정된 시스템은, 제한된 에너지를 갖는 입력이 인가될 경우, 출력 뿐만 아니라 모든 상태 변수들이 제한된 에너지를 갖는다는 개념으로, 다른 말로하면 BIBS(Bounded-Input Bounded-State) 안정도에 해당된다.

본 논문에서 다루고 있는 시스템을 고려하자. 앞의 (12)과 (15)에 각각 상태 제한이 없는 그리고 존재하는 시스템에 대한 상태 변수 방정식을 기술하였다. 이러한 두 개의 식은 전혀 다른 시스템을 기술한 것이 아니라, 그림 2의 보상 구조에서 플랜트 상태 제한의 존재 여부에 따라 같은 대상 시스템을 다르게 표현한 것에 불과하다. 실제로 (15)는 $\delta(\tilde{x}_p(t)) = \tilde{x}_p(t)$ 인 경우 (12)와 동일한 식이 된다. 따라서 대상 시스템의 안정도 문제는 (15)로 표현된 상태 변수 방정식이 안정할 것인가 하는 문제에 귀결된다. 여기서 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 3 : 가정 (A1)-(A3)을 만족시키는 그림 2와 같은 제어 시스템을 고려하자. 이때 정리 1과 같이 보상 행렬 M^* 가 설계된 경우, 다음 식을 만족하면 이 제어 시스템은 전체적으로 안정(totally stable)하다.

$$Re\{\lambda_i(\Theta)\} = Re\left\{\lambda_i\left(A_i \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\right)\right\} < 0, \forall i. \quad (52)$$

여기서 A, S, A_i 은 모두 플랜트의 상태 제한이 존재하지 않을 경우에 정의되는 매개변수들로서 (1)과 (13)에 각각 정의되어 있다.

증명 : 그림 2에 있는 시스템의 방정식은 (15)로 주어지는데, $\delta(\cdot)$ 는 유계 함수이므로, $Re\{\lambda_i(A_{ii})\} < 0, \forall i$ 이면 시스템은 전체적으로 안정하다. 그런데 (16)에서 A_{ii} 의 고유치는 θ 와 A 의 고유치로 구성되고 M^* 를 θ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \theta &= \begin{bmatrix} F - GD(I+LD)^{-1}H - M^*C \\ B(I+LD)^{-1}H & A \end{bmatrix} \\ &= A_i \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (53)$$

이다. 따라서 가정 (A1)-(A3)에 의하여 (52)를 만족하면 시스템 (15)는 전체적으로 안정하다. ■

앞서 기술한 바와 같이, 그림 2와 같은 보상 구조에서 (22)과 같이 보상 행렬 M^* 를 선정한다면 (15)는 다음 식과 동등하다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_c(t) &= (P - QS^{-1}R)\tilde{x}_c(t) \\ &+ (T - QS^{-1}U)r(t) + QS^{-1}\dot{\tilde{x}}_m(t), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_p(t) &= A\tilde{x}_p(t) + R\tilde{x}_c(t) \\ &- UC\delta(\tilde{x}_p(t)) + Ur(t). \end{aligned} \quad (55)$$

그런데 $\tilde{x}_p(t)$ 와 $\tilde{x}_m(t)$ 는 안정하므로 (54)에서 $\tilde{x}_c(t)$ 가

안정하다면 이 시스템은 전체적으로 안정하다. 따라서 정리 3의 안정도 정리는 다음과 같이 변형할 수 있다.

정리 4 : 가정 (A1)-(A3)을 만족시키는 그림 2와 같은 제어 시스템을 고려하자. 이때 정리 1과 같이 보상 행렬 M^* 가 설계된 경우, 다음 식을 만족하면 이 제어 시스템은 전체적으로 안정(totally stable)하다.

$$Re\{\lambda_i(P - QS^{-1}R)\} < 0, \forall i. \quad (56)$$

여기서 P, Q, R , 그리고 S 는 모두 플랜트의 상태 제한이 존재하지 않을 경우에 정의되는 매개변수들로서 (13)에 정의되어 있다.

플랜트의 상태 제한이 없는 선형 시스템의 상태 변수 방정식 (12)은 섭동 모델 이론을 적용할 수 있는 양상에 잘 부합된다. 다시 말해서, 제어기의 동특성 $x_c(t)$ 는 플랜트의 동특성 $x_p(t)$ 에 비하여, 적분기 등을 가지고 있기 때문에 상대적으로 느린 동작 특성을 갖게 된다. 제어기의 동특성이 플랜트의 그것에 비하여 빠르거나 유사한 경우 플랜트의 상태 제한으로 인한 성능 왜곡현상 자체가 심각하게 일어나지 않는다. 따라서 섭동 모델 축소 이론에 의하여, 제안된 방법대로 보상 행렬 M^* 가 선정되는 경우, 가정 (A3)에서 언급한 바와 같이 선형 페루우프 플랜트의 시스템 행렬 $S = A - B(I+LD)^{-1}LC$ 가 안정 행렬이라면, $P - QS^{-1}R$ 의 고유치는 (12)의 처음 q 개의 고유치를 근사화시키게 된다[10][11][22]. 그런데 δ 가 안정 행렬이라는 조건은 잘 설계된 대부분의 제어 시스템이라면 만족시킬 수 있는 것이므로, 제안된 보상 방법으로 선정된 시스템은 대부분 안정도를 만족시키게 된다.

VI. 시뮬레이션 예제

본 절에서는 시뮬레이션을 통하여 제시된 보상 방법의 유용성을 살펴도록 한다. 그림 2와 같은 구조에서 다음의 전달 함수로 표현된 플랜트 $P(s)$ 를 고려하자.

$$P(s) = \frac{2s+10}{s^2+5s+10}$$

이러한 플랜트에 대하여 상태 제한이 없다고 가정한 상황에서, 안정도와 시간 출력 특성을 고려하여 다음과 같은 선형 PI 제어기 $K(s)$ 가 설계되어 있다고 가정한다.

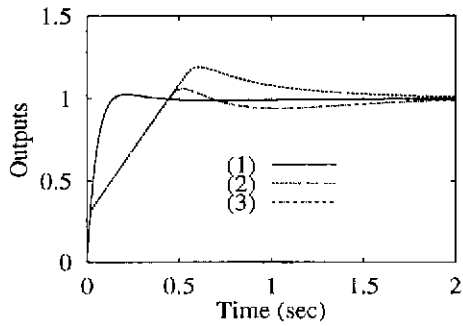
$$K(s) = \frac{10s+20}{s}$$

플랜트는 다음과 같은 상태 공간 방정식으로 표현할 수 있다.

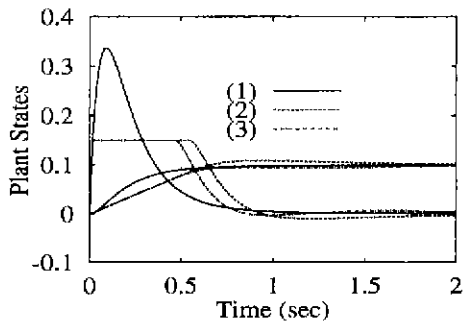
$$\dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [2 \ 10] x_p(t).$$

여기서 플랜트의 상태는 ± 0.15 로 제한되어 있다고 가정한다. 즉, $\|x_p\|_\infty \leq 0.15$ 라 가정한다. 마찬가지로 제어기의



(a)



(b)

그림 3. 시스템의 응답 특성 : (1) 선형 시스템, (2) 상태 제한 시스템, (3) 보상된 상태 제한 시스템. (a) 시스템 출력 $y(t)$. (b) 플랜트의 상태 $x_p(t)$.

Fig. 3. The responses of the system : (1) The linear system, (2) The state constrained system, (3) The state constrained system with compensation. (a) Outputs $y(t)$. (b) Plant states $x_p(t)$.

상태 공간 표현식은 다음과 같다.

$$\dot{x}_c(t) = e(t), \quad u(t) = 20x_c(t) + 10e(t).$$

기준 입력은 $r(t) = 1, t \geq 0$ 라 하였다. 그림 3에 상태 제한이 존재하지 않은 선형 시스템의 출력 $y(t)$ 와 플랜트의 상태 $x_p(t)$ 를 실선으로 도시하였는데 그림에서 알 수 있듯이 응답 특성은 기준 입력을 잘 추종한다 그런데 상태 제한이 존재하는 경우 플랜트의 상태 가운데 하나가 제한치를 상당히 상회하므로 시스템의 성능을 저하시키게 되는데, 이를 그림 3의 점선으로 도시하였다.

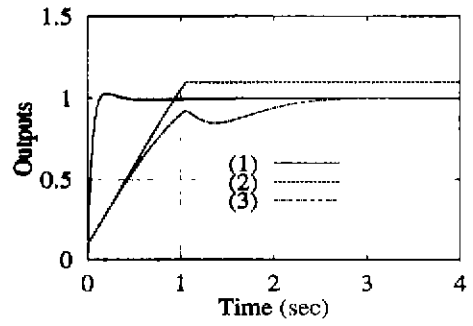
이제 이러한 시스템에 제시된 방법을 적용해 보자. 보상 행렬 M^* 는 (22)에 의하여

$$M^* = G + GC(A - BLC)^{-1}BL = 0.0909$$

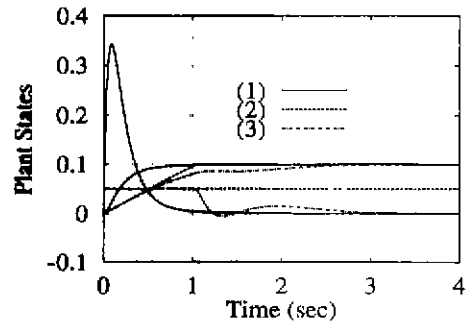
이다. 주어진 시스템은 가정 (A1)-(A3)을 만족한다. 또한 (13)으로부터

$$P = F = 0, \quad Q = -GC = [-2 \quad -10],$$

$$R = BH = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S = A - BLC = \begin{bmatrix} -25 & -110 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

그림 4. 시스템의 응답 특성 : (1) 선형 시스템, (2) 상태 제한 시스템, (3) 보상된 상태 제한 시스템. (a) 시스템 출력 $y(t)$. (b) 플랜트의 상태 $x_p(t)$.

Fig. 4. The responses of the system : (1) The linear system, (2) The state constrained system, (3) The state constrained system with compensation. (a) Outputs $y(t)$. (b) Plant states $x_p(t)$.

이므로, $\lambda(P - QS^{-1}R) = -1.8182$ 이다. 따라서 정리 3에 의하여 보상된 시스템은 전체적으로 안정하다. 이때 보상된 시스템의 응답 특성은 그림 3에서 확인할 수 있는 바와 같이 설계된 시스템의 응답 특성을 보다 근접하게 추종한다.

동일한 시스템에 대하여 이번에는 $|x_p(1)| \leq 0.05, |x_p(2)| \leq 0.1$ 의 상태제한을 갖는다 하자. 이 경우에 대한 시뮬레이션 결과를 그림 4에 도시하였다. 상태제한이 없는 선형 시스템의 경우 $(\bar{x}_p(1), \bar{x}_p(2))^T = (0, 0.1)^T \in \mathcal{P}_R$ 이므로, 정리 2에 의하여 $(\bar{x}_p(1), \bar{x}_p(2))^T = (\bar{x}_p(1), \bar{x}_p(2))^T$ 가 보장되므로 그림에서 보는 바와 같이 보상된 제어 시스템의 출력의 안정상태 특성은 기준입력을 잘 추종한다. 그러나 이 경우 보상되지 않은 시스템의 출력의 경우 기준입력과 안정상태에서 오차를 보인다.

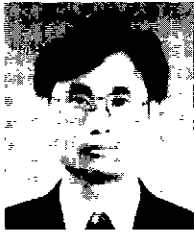
VII. 결론

본 논문은 플랜트에 상태 제한이 존재하는 시스템에 있어서 그로 인한 부정적인 영향을 감소시키기 위한 효과적인 보상기 설계 방법을 다루었다. 접근 방법은 포화 비선형을 다루는 실제적인 방법으로 유용한 리셋 와이드

일 방지 방법을 응용하였다. 즉 플랜트의 상태 제한이 존재하지 않는다는 가정 아래 먼저 선형 제어를 전체적 안정도와 성능을 고려하여 설계한 후, 상태 제한으로 인한 안정도 훼손을 복구하고 성능 저하를 완화할 수 있는 추가적인 보상기를 설계하는 접근 방법을 취하였다. 이 과정 중에서 선형 제어기는 기존의 알려진 설계 기법으로 잘 구성되어 있다는 전제 아래 추가적인 보상기의 설계에 초점을 맞추었다. 이에 따라 리셋 와인드업 방지 구조를 활용하기 위해서 상태 제한이 존재하는 시스템에 대해서 그림 2와 같은 새로운 구조를 제시하였고, 여기에서의 설계변수인 보상 행렬 M 을 효과적으로 결정하는 방법을 연구하였다. 보상기의 설계 개념은 보상된 제어기의 상태 변수를 상태 제한이 없었을 때 제어기의 그것에 가능한 한 비슷하게 유지되도록 하였다. 이를 실현하기 위해 제어기의 상태 변수는 평형점의 위치와 밀접한 관련이 있다는 사실로부터, 상태 제한이 존재하지 않는 그리고 존재하는 시스템에서의 제어기의 평형점 사이의 거리를 일치시킴으로써 보상 행렬을 명확히 구하였다. 유도 과정을 거쳐 제시된 보상기는 플랜트와 선형 제어기의 매개변수로 직접 구성되는 형태는 갖는다. 또한 섭동 모델 축소 이론을 적용하여 보상된 제어기의 동특성은 선형 페루우프 시스템의 동특성을 반영한다는 것을 보였으며, 이를 통해 보상된 제어기의 상태변수 전개는 선형 페루우프 시스템에서의 제어기의 그것과 근사하다는 것을 보임으로써, 제시된 보상 방법의 타당성을 검증하였다. 그리고 플랜트의 상태 제한이 존재하지 않는 경우에 대부분의 시스템이 쉽게 만족시킬 수 있는 어떤 조건을 충족시키도록 선형 제어기가 구성되어 있는 경우, 제안된 보상 방법을 적용함으로써 상태 제한이 존재하는 페루우프 시스템의 전체적 안정도는 보장될 수 있음을 기술하였다.

참고문헌

- [1] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems : Theory and Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [2] S. Boyd and C. Barratt, *Linear Controller Design : Limits of Performance*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, in Studies in Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia, PA, vol. 15, 1994.
- [4] P. J. Campo and M. Morari, "Robust control of processes subject to saturation nonlinearities," *Computers Chem. Engng.*, vol. 14, no. 4/5, pp. 343-358, 1990.
- [5] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- [6] C.-Y. Chen and M.-H. Perng, "Optimal anti-windup control of saturating discrete-time MIMO systems," *Int. J. Control*, vol. 67, no. 6, pp. 933-959, 1997.
- [7] R. Hanus, M. Kinnaert, and J. L. Henrotte, "Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method," *Automatica*, vol. 23, no. 6, pp. 729-739, 1987.
- [8] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [9] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design*. Academic Press, London, 1986.
- [10] P. V. Kokotovic, R. E. O'Malley, Jr, and P. Sannuti, "Singular perturbations and order reduction in control theory - An overview," *Automatica*, vol. 12, no. 3, pp. 123-132, 1976.
- [11] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, and C. N. Nett. "A unified framework for the study of anti-windup designs," *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 1869-1883, 1994
- [12] Z. Lin, A. Saberi, and A. A. Stoorvogel, "Semi-global stabilization of linear discrete-time systems subject to input saturation via linear feedback - an ARE-based approach," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, no. 8, pp. 1203-1207, 1996.
- [13] D. G. Luenberger, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. 2nd ed., Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.
- [14] J.-K. Park and C.-H. Choi, "A compensation method for improving the performance of multi-variable control systems with saturating actuators," *Control Theory and Advanced Technology*, vol. 9, no. 1, pp. 305-323, 1993.
- [15] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamic compensation method for multivariable control systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 9, pp. 1635-1640, 1995.
- [16] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamical anti-reset windup method for discrete-time saturating systems," *Automatica*, vol. 33, no. 6, pp. 1055-1072, 1997.
- [17] A. Saberi, Z. Lin, and A. R. Teel. "Control of linear systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 368-378, 1996.
- [18] V. R. Saksena, J. O'Reilly, and P. V. Kokotovic, "Singular perturbations and time-scale methods in control theory: Survey 1976-1983," *Automatica*, vol. 20, no. 5, pp. 273-293, 1984.
- [19] H. J. Sussmann, E. D. Sontag, and Y. Yang. "A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls." *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39, pp. 2411-2425, 1994.
- [20] K. S. Walgama and J. Sternby, "Inherent observer property in a class of anti-windup compensators," *Int. J. Control*, vol. 52, no. 3, pp. 705-724, 1990.

**박종구**

1964년생. 1987년 서울대 제어계측 공학과 졸업 동 대학원 석사(1989), 동 대학원 박사(1993). 1995년-현재 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부 부교수. 관심분야는 제어이론 및 응용, 컴퓨터 응용 제어 시스템, 추정이론, 가상현실 시스템 및 응용.