

# 비한정 $Q$ 를 갖는 EALQR의 주파수역 특성 해석

## Frequency Domain Properties of EALQR with Indefinite $Q$

서 영 봉, 최 재 원

(Young Bong Seo and Jae Weon Choi)

**Abstract** : A study which develops a controller design methodology that has flexibility of eigenstructure assignment within the stability-robustness constraints of LQR is required and has been performed. The previously developed control design methodology, namely, EALQR(Eigenstructure Assignment/LQR) has better performance than that of conventional LQR or eigenstructure assignment but has a constraint for the weighting matrix in LQR, which could be indefinite for high-order system. In this paper, the effects of the indefinite  $Q$  in EALQR on the frequency domain properties are analyzed. The robustness criterion and quantitative frequency domain properties are also presented. Finally, the frequency domain properties of EALQR has been analyzed by applying to a flight control system design example.

**Keywords** : frequency characteristics, indefinite  $Q$ , LQR, eigenstructure assignment, flight control system

### I. 서론

일반적으로 다변수 LQR 문제에서의 주파수역 특성은 저주파수대역에서는 명령 추종 및 외란 제거 성능이 좋으며, 고주파수대역에서는 센서잡음에 대한 저감도 성능이 좋다. 또한, 단일입출력 시스템이 되면 이득여유 (gain margin)와 위상여유(phase margin)가 각각 1/2에서  $\infty$ , -60도에서 60도의 공칭안정도를 보장한다. 즉, LQR 제어시스템은 어떠한 개루프 시스템에 대해서도 시스템이 안정가능(stabilizable)하고 검출가능(detactable)하기만 하면 공칭안정도가 보장된다[1].

이러한 LQR의 장점을 활용하여 극점배치기법의 건설성을 확보하기 위한 연구가 많은 연구자들에 의해 진행되었고[2]-[6], 최근에 Choi와 Seo[7]-[8]는 고유구조(고유치/고유벡터) 지정기법이 고려할 수 없었던 건설특성을 LQR의 장점을 활용하여 제어시스템 설계시 고려할 수 있는 EALQR(Eigenstructure Assignment/LQR) 제어기를 제안하였다. 제시한 제어방법은 임의의 고유구조를 지정하지 못하는 LQR의 단점을 고유구조 지정기법[9]-[12]을 결합하여 보완하는 반면에, 일부 시스템에서는 상태가중행렬의 구속조건인 양의 반한정(positive semi-definiteness) 조건이 깨지는 경우를 발생시킬 수 있다.

이미 몇몇 연구자들[2]-[4]에 의해 이와 같은 문제점에 대한 연구 즉, 비한정  $Q$ 가 시스템의 제어특성에 어떤 영향을 미치는지에 대한 연구가 수행되었다. 그들의 연구결과에 의하면 비한정 상태가중행렬이 주어질 경우 Riccati 방정식의 해의 유일성에는 영향이 없고[2], 주파수역 부등식은 만족하지 않으며[3]. 이 경우에도 페루프 시스템의 전체 성능은 떨어지지 않는다고 보고되어 있다

[4]. 이는 시스템의 응답속도는 고유치에 의해 결정되고 응답형태는 고유벡터에 의해 결정되기 때문이며, LQR의  $Q$ 에 대한 구속조건은 해가 존재하기 위한 충분조건이기 때문에 파악할 수 있다[1].

그렇지만, 주파수역 부등식이 만족하지 않는다면 LQR의 장점을 취하는 의미가 퇴색되므로 비한정  $Q$ 가 사용된 경우에 최소한 보장가능한 수정된 주파수역 특성을 해석할 필요가 있다. 따라서, 본 논문에서는 비한정  $Q$ 를 갖는 EALQR의 주파수역 특성을 분석하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 본 논문의 II장에서는 다루어야 될 문제를 설정하고, III장에서는 LQR을 통하여 임의의 고유구조를 지정할 때  $Q$ 가 비한정으로 결정되는 경우에 시스템의 주파수역 특성을 해석하기 위한 기준을 제시하고, 정량적으로 해석한다. IV장에서는 비행제어시스템의 실제문제를 통해 해석결과를 검증하고, 타당성을 고찰한다. 마지막으로 V장에서 결론을 맺는다.

### II. 문제 설정

다음과 같이 주어지는 선형 시불변 다변수 가제어 시스템(linear time-invariant multivariable controllable system)을 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$u = -Kx \quad (2)$$

여기서,  $x$ ,  $u$  는 각각  $n$ ,  $m$ 차원의 상태변수 및 제어입력벡터이며,  $A$ ,  $B$ 는 각각 시스템행렬과 제어입력행렬이며,  $K$ 는 피드백 이득행렬을 나타낸다. 이러한 시스템에 대한 최적제어문제는 다음과 같은 목적함수를 최소로 하는 제어기를 설계하는 문제로 정의된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3)$$

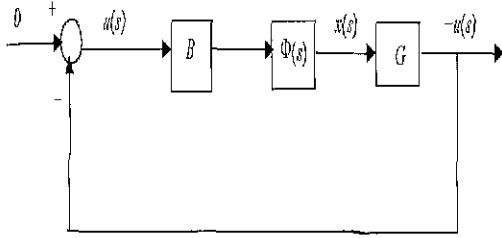


그림 1. LQR 제어시스템의 구조.  
Fig. 1. LQR control system structure.

(3)과 같이 주어진 목적함수를 최소화하는 되먹임 이득행렬  $K$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$K = R^{-1}B^T P \quad (4)$$

이 때, 행렬  $P$ 는 다음과 같은 대수 Riccati 방정식 (algebraic Riccati equation)을 풀어서 구하게 된다.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (5)$$

다음의 그림 1은 LQR 제어시스템의 일반적인 구조를 나타내는 블록선도이다. LQR의 루프 전달함수행렬  $G_{LQ}(s)$ , 감도 전달함수행렬  $S_{LQ}(s)$ , 그리고 페루프 전달함수행렬  $C_{LQ}(s)$ 는 각각 다음과 같다.

$$G_{LQ}(s) = G\Phi(s)B \quad (6)$$

$$S_{LQ}(s) = [I + G_{LQ}(s)]^{-1} \quad (7)$$

$$C_{LQ}(s) = [I + G_{LQ}(s)]^{-1} G_{LQ}(s) \quad (8)$$

여기서,  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ .

LQR 문제에서 Riccati 방정식에서 유도된 주파수역 등가식[13]은 다음과 같다.

$$[I + G_{LQ}(-s)]^T R [I + G_{LQ}(s)] = R + H(s) \quad (9)$$

여기서,  $G_{LQ}(s) = R^{-1}B^T P(sI - A)^{-1}B$ ,

$H(s) = [(-sI - A)^{-1}B]^T Q [(sI - A)^{-1}B]$ .

$Q \geq 0$ 이면,  $H(s)$  역시 양의 반한정행렬이다. 따라서, 다음의 주파수역 부등식이 성립한다.

$$[I + G_{LQ}(-s)]^T R [I + G_{LQ}(s)] \geq R \quad (10)$$

(10)의 주파수역 등가식에서  $R = \rho I$ ,  $\rho > 0$ 이라고 가정하면, 다음 식이 성립한다.

$$[I + G_{LQ}(-s)]^T [I + G_{LQ}(s)] \geq 1 \quad (11)$$

그러면, 다음과 같은 LQR 제어시스템의 주파수역 특성을 나타내는 부등식이 성립한다.

$$\sigma_{\min}[I + G_{LQ}(s)] \geq 1 \quad (0 \text{ [dB]}) \quad (12)$$

그러나  $Q$ 의 고유값 중에 음의 값이 있으면 즉,  $Q$ 가 비한정인 경우에는  $H(s) \geq 0$ 임을 보장할 수 없다. 이것은

$Q$ 가 비한정이면  $H(s)$ 의 모든 고유값들이 양수 또는 0임을 보장할 수 없다는 얘기가 된다. 이 경우  $H(s)$ 는  $\sqrt{H(s)}^T \sqrt{H(s)}$ 로 분리할 수 없으므로  $\sqrt{H(s)}$ 의 최대특이값을 구할 수 없게 된다. 따라서, (12)의 주파수역 부등식의 성립을 보장하지 못하므로, LQR 시스템의 주파수역 특성을 보장할 수 없게 된다. 고유구조에 대한 임의 지정이 가능하다 하더라도 주파수역 특성에 대한 보장이 없다면 LQR의 장점을 취하는 의미가 퇴색된다.

본 논문의 III장에서는 비한정  $Q$ 가 시스템의 주파수역 특성에 어떤 영향을 미치는지를 고찰하기 위하여 주파수역 부등식을 유도하는 과정으로부터 수정된 주파수역 부등식을 제시한다.  $H(s)$ 가 양의 반한정 행렬임을 보장하지 못한다 하더라도 주파수역 부등식의 방향이 바뀌지 않는 한 주파수역 특성은 크게 바뀌지 않는다는 것을 보이기 위해  $Q$ 의 고유값 중 양인 것과 음인 것을 각각 스펙트랄 분해(spectral decomposition)[14]하여  $H(s)$ 에 대입하고  $H(s)$ 를 양의 고유값과 음의 고유값 두 부분으로 나누는 후, 각각의 특이값을 구한다. 이 특이값의 차이를 정량적으로 계산하여 (12)를 수정하여 주파수역 특성이 어떻게 바뀌는지 고찰해 봄으로써 EALQR의 주파수역 특성을 알아본다.

### III. 비한정 $Q$ 를 가진 EALQR의 주파수역 특성 해석

본 장에서는 LQR 제어시스템의 고유구조를 임의로 지정하고자 할 때, 일부 시스템에서 구해질 수 있는 비한정  $Q$ 에 의한 EALQR의 주파수역 특성 변화를 해석하고 그 한계(bound)를 정량적으로 제시한다.

#### 1. 배경지식

주파수역 해석에 관하여 언급하기 전에 먼저 배경지식으로서 다음 식들을 살펴보자. 행렬 특이값은 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\alpha(A) = \sqrt{\lambda(A^*A)}, \quad \sigma^2(A) = \lambda(A^*A) \quad (13)$$

여기서,  $\sigma$ 는 특이값, 윗첨자 \*는 복소공역전치행렬을 나타내고,  $\lambda(A^*A)$ 는  $A^*A$ 의 고유값을 나타낸다. 그리고, 만약  $\alpha(A) = \sqrt{\lambda(A^*A)}$ 가 존재하면,  $A \geq 0$ 임을 보장한다. 비한정  $Q$ 를 양의 고유값과 음의 고유값 부분으로 나누기 위해 다음과 같은 스펙트랄 분해(혹은 고유값 분해)를 한다.

$$Q = \Phi \Lambda \Psi^T \quad (14)$$

여기서,  $\Phi$ 는 우측 모드 행렬(right modal matrix),  $\Psi$ 는 좌측 모드 행렬(left modal matrix), 그리고  $\Lambda$ 는  $Q$ 의 고유값으로 구성된 대각행렬이다.

(14)에서  $Q$ 는 Hermitian이므로 다음 정리가 성립한다.

정리 3.1 : (Hermitian 행렬에 대한 스펙트랄 정리)[14]

만약  $Q$ 가 실수이고 Hermitian이기만 하면(즉, 실수 대칭) 다음 식이 성립한다.

$$Q = \Phi A \Psi^T = \Phi A \Phi^T \tag{14}$$

여기서,  $\Phi \in M_n$ 은 일원(unitary)행렬이며,  $A \in M_n$ 는 실수 대칭 행렬이다.  $M_n$ 은  $n \times n$ 차원의 행렬을 나타낸다.

정리 3.1에 의해  $Q$ 를 분해하면 다음의 정리 3.2가 성립한다.

정리 3.2 : 만약  $Q = (X^T X + Y^T Y)$ 이면,

$$\lambda(X^T X + Y^T Y) = \lambda(X^T X) + \lambda(Y^T Y)$$

여기서,  $Q \in M_n$ 이고 실수 대칭이다.

증명  $Q$ 를 스펙트랄 분해하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} Q &= \Phi A \Phi^T \\ &= \sum_{i=1}^n \phi_i \lambda_i \phi_i^T \end{aligned}$$

전체의 고유값과, 합으로 표시된 각 요소의 고유값을 합한 결과는 같다.

$$\begin{aligned} \lambda(\Phi A \Phi^T) &= \lambda[\Phi \sqrt{\Lambda}^T \sqrt{\Lambda} \Phi^T] \\ &= \lambda[(\sqrt{\Lambda} \Phi^T)^T (\sqrt{\Lambda} \Phi^T)] \\ &= \lambda \left[ \sum_{i=1}^n (\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T)^T (\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i [(\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T)^T (\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T)] \end{aligned}$$

즉, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\lambda \left[ \sum_{i=1}^n \lambda(\phi_i \lambda_i \phi_i^T) \right] = \sum_{i=1}^n [\lambda(\phi_i \lambda_i \phi_i^T)]$$

$n=2$ 라고 가정하면,

$$\begin{aligned} \lambda \left[ \sum_{i=1}^2 (\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T)^T (\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T) \right] &= \lambda [(\sqrt{\lambda_1} \phi_1^T)^T (\sqrt{\lambda_1} \phi_1^T) + (\sqrt{\lambda_2} \phi_2^T)^T (\sqrt{\lambda_2} \phi_2^T)] \\ \sum_{i=1}^2 \lambda [(\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T)^T (\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T)] &= \lambda [(\sqrt{\lambda_1} \phi_1^T)^T (\sqrt{\lambda_1} \phi_1^T)] + \lambda [(\sqrt{\lambda_2} \phi_2^T)^T (\sqrt{\lambda_2} \phi_2^T)] \end{aligned}$$

2. 수정된 주파수역 부등식 유도

본 절에서는 위의 정리 3.1과 정리 3.2의 결과를 다음과 같이 주파수역 해석에 이용한다. 정리 3.1에 의해 분해된  $Q$ 를  $H(s)$ 에 대입하면 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} H(s) &= B^T (-sI - A)^{-1} \Phi A \Phi^T (sI - A)^{-1} B \\ &= \sum_{i=1}^n B^T (-sI - A)^{-1} \phi_i \lambda_i \phi_i^T (sI - A)^{-1} B \end{aligned} \tag{15}$$

(15)에서,  $H(s)$ 의 고유값은 분해된 각각의 고유값에 의해 나누어진 부분들의 고유값을 합한 것과 같다. 즉,

$$\begin{aligned} \lambda[B^T (-sI - A)^{-1} \Phi A \Phi^T (sI - A)^{-1} B] \\ = \sum_{i=1}^n \lambda[B^T (-sI - A)^{-1} \phi_i \lambda_i \phi_i^T (sI - A)^{-1} B] \end{aligned} \tag{16}$$

$A$ 의 모든 고유값이 양인 경우 (16)을 특이값 분해를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_i^2 [\sqrt{\Lambda} \Phi^T (sI - A)^{-1} B] = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 [\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T (sI - A)^{-1} B] \tag{17}$$

표준 LQR에서 (17)은 반드시 성립하며,  $\sigma_i^2 [\sqrt{\Lambda} \Phi^T (sI - A)^{-1} B] \geq 0$ 이고  $H(s) \geq 0$ 임을 보장한다

하지만, 비한정  $Q$ 의 고유값으로 구성된 대각행렬은  $A = \sqrt{\Lambda}^T \sqrt{\Lambda}$ 로 쓸 수 없으므로, 다음과 같이 양의 고유값과 음의 고유값 두 부분으로 나눈다.  $Q$ 가  $n \times n$ 의 정방행렬일 때,  $A$ 는 고유치들이 대각요소인 행렬이기 때문에 정리 3.1의 스펙트랄 정리를 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q = \phi_1 \lambda_1 \phi_1^T + \phi_2 \lambda_2 \phi_2^T + \dots + \phi_n \lambda_n \phi_n^T \tag{18}$$

만약  $r (\leq n)$  개의 고유치가 양의 고유치라면 (18)은 다음과 같이 된다.

$$Q = (\phi_1 \lambda_1 \phi_1^T + \dots + \phi_r \lambda_r \phi_r^T) + (\phi_{r+1} \lambda_{r+1} \phi_{r+1}^T + \dots + \phi_n \lambda_n \phi_n^T) \tag{19}$$

위 식에서  $r+1$ 부터  $n$ 까지의 고유치는 음이므로 정리 3.2의 양의 비한정 조건을 만족하지 않는다. 따라서, 정리 3.2를 적용하기 위해서 (19)를 다음과 같이 정리한다.

$$Q = (\phi_1 \lambda_1 \phi_1^T + \dots + \phi_r \lambda_r \phi_r^T) - (-\phi_{r+1} \lambda_{r+1} \phi_{r+1}^T - \dots - \phi_n \lambda_n \phi_n^T) \tag{20}$$

(20)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Q = \sum_{i=1}^r \phi_i \lambda_i \phi_i^T - \sum_{i=r+1}^n \phi_i (-\lambda_i) \phi_i^T \tag{21}$$

여기서, 1부터  $r$ 까지의 고유치에 대하여  $\lambda_i > 0$ 이고  $r+1$ 부터  $n$ 까지의 고유치에 대하여  $-\lambda_i > 0$ 이다. 따라서,  $Q$ 가 비한정일 때  $H(s)$ 의 고유값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda[B^T (-sI - A)^{-1} \Phi A \Phi^T (sI - A)^{-1} B] \\ = \sum_{i=1}^r \lambda[B^T (-sI - A)^{-1} \phi_i \lambda_i \phi_i^T (sI - A)^{-1} B] \\ - \sum_{i=r+1}^n \lambda[B^T (-sI - A)^{-1} \phi_i (-\lambda_i) \phi_i^T (sI - A)^{-1} B] \end{aligned} \tag{22}$$

여기서,  $r$ 은 양의 고유값의 갯수를 나타낸다. (22)의 우변은 특이값 정리에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 [\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T (sI - A)^{-1} B] \\ - \sum_{i=r+1}^n \sigma_i^2 [\sqrt{(-\lambda_i)} \phi_i^T (sI - A)^{-1} B] \end{aligned} \tag{23}$$

여기서,  $\sigma(\cdot)$ 는  $\lambda(\cdot)$ 의 특이값을 나타낸다. (23)이 양이면  $H(s)$ 가 양이라는 것을 알 수 있다. (23)이 음인 경우는  $Q$ 의 모든 고유값이 음이거나  $Q$ 의 음의 고유값의

합이 양의 고유값의 합보다 큰 경우이다. 즉, (23)이 양이기만 하면  $Q$ 가 비한정인 경우에도 표준 LQR 제어시스템( $Q=C^T C, R=\rho I$ )의 주파수역 특성을 그대로 보장한다. 또한 (23)이 음이어도 두 값의 차이가 극히 작다면 주파수역 특성에 크게 영향을 끼치지 않는다.

이제 (23)을 이용하여 주파수역 부등식을 수정하여 보자. (10)을 특이값 관계[13]에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_{\min}(\sqrt{R}[I+G_{LQ}(s)]) \geq \sigma_{\min}(\sqrt{R+H(s)}) \quad (24)$$

입력가중행렬을  $R \approx I$ 로 하여 제어기를 설계하면  $\sigma_{\min}(R) \approx 1$ 이므로, (24)를 다음과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$\sigma_{\min}(\sqrt{R}[I+G_{LQ}(s)]) \approx \sigma_{\min}(\sqrt{R}) \sigma_{\min}[I+G_{LQ}(s)] \quad (25)$$

또한,  $\sigma^2(\cdot) = \lambda(\cdot)$ [14]이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(\sqrt{R+H(s)}) &= \sqrt{\sigma_{\max}^2(\sqrt{R}) + \sigma_{\max}^2(H(s))} \\ &= \sqrt{\sigma_{\max}^2(\sqrt{R}) + \lambda(H(s))} \end{aligned} \quad (26)$$

(25)와 (26)을 (24)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_{\min}(\sqrt{R}) \sigma_{\min}[I+G_{LQ}(s)] \geq \sqrt{\sigma_{\max}^2(\sqrt{R}) + \lambda(H(s))} \quad (27)$$

여기서,  $\lambda(H(s)) = \sum_{i=1}^r \sigma^2[\sqrt{\lambda_i} \phi_i^T(sI-A)^{-1}B] -$

$$\sum_{i=r+1}^n \sigma^2[\sqrt{(-\lambda_i)} \phi_i^T(sI-A)^{-1}B] \text{ 이다.}$$

(27)로부터 다음의 (28a) 또는 (28b)을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{\min}[I+G_{LQ}(s)] \geq \sqrt{\frac{\sigma_{\max}^2(\sqrt{R})}{\sigma_{\min}^2(\sqrt{R})} + \frac{\lambda(H(s))}{\sigma_{\min}^2(\sqrt{R})}} \quad (28a)$$

$$\sigma_{\min}[I+G_{LQ}(s)] \geq \sqrt{a+b} \quad (28b)$$

여기서,

$$a = \sigma_{\max}^2(\sqrt{R}) / \sigma_{\min}^2(\sqrt{R}), \quad b = \lambda(H(s)) / \sigma_{\min}^2(\sqrt{R}).$$

$a \geq 1$ 이고,  $Q$ 가 양의 반한정이거나, 비한정이다라든 (23)이 양이라면  $b \geq 0$ 이다. 만약 (23)이 음인 경우에도  $a+b > 0$ 을 만족하면 (28b)가 만족된다. 결론적으로, 비한정  $Q$ 가 사용된 EALQR 제어기의 주파수역 특성은 다음의 조건식을 만족하기만 하면 표준 LQR의 주파수역 특성과 유사하게 유지된다.

$$\frac{\sigma_{\max}^2(\sqrt{R})}{\sigma_{\min}^2(\sqrt{R})} + \frac{\lambda(H(s))}{\sigma_{\min}^2(\sqrt{R})} > 0 \quad (29)$$

감도 루프전달함수행렬  $S_{LQ}(s)$ 은  $[I+G_{LQ}(s)]^{-1}$ 이므로 다음과 같다.

$$\sigma_{\max}[S_{LQ}(j\omega)] \leq \frac{1}{\sqrt{a+b}} \quad (30)$$

(30)은 LQR 제어시스템의 감도 루프전달함수행렬의 최대특이값이 모든 주파수에서 항상  $20 \log_{10}(1/\sqrt{a+b})$ db 보다 작다는 것을 의미한다.

### 3. 안정도-견실성 영역 고찰

이제 다음의  $G_{LQ}$ 에 관한 관계식[13]들을 이용하여 LQR 제어시스템의 안정도-견실성이 보장되는 영역에 대하여 고찰한다.

$$(I+G_{LQ})^{-1} = ((G_{LQ}^{-1}+I)G_{LQ})^{-1} = G_{LQ}^{-1}(I+G_{LQ}^{-1})^{-1} \quad (31)$$

그리고

$$(I+G_{LQ}^{-1})(I+G_{LQ})^{-1} = I$$

혹은

$$(I+G_{LQ}^{-1})^{-1} + G_{LQ}^{-1}(I+G_{LQ}^{-1})^{-1} = I \quad (32)$$

(31)과 (32)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$(I+G_{LQ}^{-1})^{-1} = I - (I+G_{LQ})^{-1} \quad (33)$$

(33)으로부터 다음과 같은 특이값 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}[(I+G_{LQ}^{-1}(j\omega))^{-1}] \\ \leq 1 + \sigma_{\max}[(I+G_{LQ}(j\omega))^{-1}] \quad (34) \\ = 1 + \sigma_{\min}^{-1}[I+G_{LQ}(j\omega)] \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \end{aligned}$$

혹은

$$\sigma_{\min}[I+G_{LQ}^{-1}(j\omega)] \geq \frac{\sqrt{a+b}}{1+\sqrt{a+b}} \quad (35)$$

그리고 페루프 전달함수행렬에 관한 특이값 부등식을 유도하기 위하여 (31)을 이용하여 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} C_{LQ}(s) &= G_{LQ}(s)[I+G_{LQ}(s)]^{-1} \\ &= [I+G_{LQ}^{-1}(s)]^{-1} \end{aligned} \quad (36)$$

그러므로

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}[C_{LQ}(j\omega)] &= \sigma_{\max}[(I+G_{LQ}^{-1}(j\omega))^{-1}] \\ &= \sigma_{\min}^{-1}[I+G_{LQ}^{-1}(j\omega)] \end{aligned} \quad (37)$$

이제 (35)와 (37)로부터 다음의 안정도-견실성에 관한 특이값 부등식을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{\max}[C_{LQ}(j\omega)] \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \quad (38)$$

(38)은 LQR 제어시스템의 페루프 전달함수 행렬의 최대 특이값이 모든 주파수대역에서  $1+1/\sqrt{a+b}$ 보다 작다는 것을 의미한다.

$a = \sigma_{\max}^2(\sqrt{R}) / \sigma_{\min}^2(\sqrt{R}), \quad b = \lambda(H(s)) / \sigma_{\min}^2(\sqrt{R})$ 이므로 비한정  $Q$ 에 의해  $b$ 의 크기가 변하게 된다. (28b)에서  $a+b > 0$ 를 만족하면 주파수역 부등식의 부등호 방향은 바뀌지 않는다. 그러나, 이 경우에 한해서 비한정  $Q$ 로 인한 영향으로 LQR의 감도 전달함수행렬의 최대 특이값과 LQR 제어시스템의 페루프 전달함수 행렬의 최대특

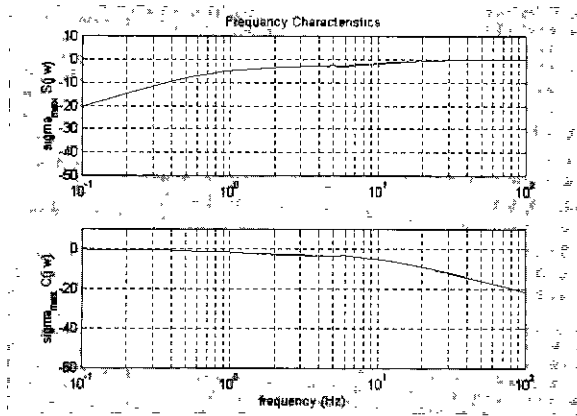


그림 2. 표준 LQR 제어시스템의 주파수 특성.  
Fig. 2. Frequency characteristics of standard LQR control system.

이값이 증가하게 되어서 모델링 오차에 대한 안정도-견실성 여유가 감소하게 된다. 즉, 모든 주파수대역에서 임의의 곱셈형 모델링 오차에 대하여 가질 수 있는 안정도-견실성 여유는 다음과 같다.

$$\sigma_{\max}[E(j\omega)] < \frac{\sqrt{a+b}}{1+\sqrt{a+b}} \quad (39)$$

여기서,  $E(j\omega) = G^{-1}(j\omega)[G_A(j\omega) - G(j\omega)]$ .  $G_A(j\omega)$ 와  $G(j\omega)$ 는 각각 실제 시스템과 공칭 시스템을 나타낸다.

그림 2는 (30) 그리고 (39)로 표시되는 LQR 제어시스템의 주파수 특성을 도시한 것으로서 IV장의 비행제어시스템에 표준 LQR( $Q = C^T C$ ,  $R = I$ )를 적용한 결과이다.

IV. 비행제어시스템 설계에의 응용

본 논문의 비행제어시스템에 적용한 제어알고리즘의 설계는 참고문헌 [7]의 설계지침을 따른다. 참고문헌 [7]의 비행제어시스템 설계에서는 원하는 좌고유벡터로 이루어진 좌모드 행렬을 임의로 정하였다. 이 경우에는  $Q$ 는 비한정이고,  $R$ 은 양의 한정이지만 일반적인 형태 ( $R \neq \rho I$ )로 구해져서, III장에서 제시한 주파수역 해석을 적용할 수 없다. 이것은 원하는 좌고유벡터들로 확장된 부분공간을 LQR의 획득가능한 고유벡터의 부분공간을 고려하지 않고 임의로 선정하였기 때문에 설계 자유도가 부족하였기 때문이었다. 본 장에서는 원하는 좌고유벡터들을 제어력을 효과적으로 전달[10]할 수 있도록 구성하고, 블록 형태의 제어기로의 변환행렬을 수정하여  $R \approx \rho I$ 로 만들어서 III장에서 제시한 주파수역 해석을 적용할 수 있도록 하였다. 비한정  $Q$ 에 의한 영향만을 알아보기 위하여  $R \approx \rho I$ ,  $\rho > 0$ 에서  $\rho$ 의 영향은 고려하지 않고  $R \approx I$ 로 해서 적용하였다.

다음과 같은 두 개의 입력을 가진 4차의 연속 가제어 시스템(전투기 모델)[6]을 고려한다. 전투기는 고도( $h$ ) 10,000[ft]에서 받음각(angle of attack)은  $\alpha = 0.86$  [deg], 마하수(Mach number) 1.5로 순항하고 있다고

가정하였다. 선형화된 측면 방향 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.493 & 0.015 & -1 & 0.020 \\ -61.176 & -7.835 & 4.991 & 0 \\ 31.804 & -0.235 & -0.994 & 0 \\ 0 & 1 & -0.015 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.002 & 0.002 \\ 8.246 & 1.849 \\ 0.249 & -0.436 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{df} \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

여기서,  $\beta$ ,  $p$ ,  $r$ 과  $\phi$ 는 각각 옆미끄럼각(sideslip angle), 롤변화율(roll rate), 요변화율(yaw rate), 그리고 롤각(roll angle)이고,  $\delta_{df}$ 와  $\delta_r$ 은 각각 차동 보조익(differential flap)과 방향타(rudder)의 편향각이다.

이 때, 이 시스템의 개루프 고유값은 다음과 같이 구해진다.

$$A = [-0.7555 \pm 5.8067i, -7.8181, 0.0070]$$

원하는 페루프 시스템의 고유값은 -8(roll mode), -0.05(spiral mode),  $-4.88 \pm 3.66i$ (dutch roll mode)로 선정하였다

$$A^d = [-8, -4.88 \pm 3.66i, -0.05]$$

좌 및 우모드행렬의 상호 수직조건  $\Psi^a = (\Phi^a)^{-T}$ 을 이용하여 참고문헌 [7]의 성능지표 함수를 최소화하는 좌모드 행렬을 지정한다. 원하는 좌모드 행렬  $\Psi^d$ 와 이를  $\psi_i^T \psi_i = \delta_{ij}$  관계를 이용하여 정규화한 행렬  $\Psi_{nor}^d$ 를 참고문헌 [7]의 설계지침에 따라 제어력을 효과적으로 전달할 수 있도록 구성하면 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\Psi^a = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 + 0.6i & 0.6 - 0.6i & 0.8737 \\ 0.4 & 0.4 + 0.4i & 0.4 - 0.4i & 0.1263 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{nor}^d = \begin{bmatrix} 0.8321 & 0.5883 + 0.5883i & 0.5883 - 0.5883i & 0.9897 \\ 0.5547 & 0.3922 + 0.3922i & 0.3922 - 0.3922i & 0.1431 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이 경우 획득가능한 정규화된 좌모드행렬  $\Psi_{nor}^a$ 를 구해보면 최소자승의 관점에서 다음과 같이 구해진다.

$$\Psi_{nor}^a = \begin{bmatrix} -0.5473 & 0.1086 + 0.0454i & 0.1086 - 0.0454i & 0.9897 \\ -0.0820 & 0.1029 - 0.0032i & 0.1029 + 0.0032i & 0.1431 \\ 0.6540 & 0.6936 - 0.7005i & 0.6936 + 0.7005i & 0 \\ -0.5158 & 0.0454 - 0.0400i & 0.0454 + 0.0400i & 0 \end{bmatrix}$$

이 경우 원하는 페루프 고유값은 정확하게 지정된다. 그리고 되먹임 이득행렬  $K$ 와 가중행렬  $R$  및  $Q$ 는 각각 다음과 같이 구해진다.

$$K = \begin{bmatrix} -1.5459 & -0.0592 & 4.1769 & -0.6326 \\ -2.9178 & 0.2789 & -17.0252 & 4.3767 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} -363.2 & 17.2 & -1145. & 292.7 \\ 17.2 & -0.4 & 7. & -0.3 \\ -1145. & 7. & 396.1 & -87.4 \\ 292.7 & -0.3 & -87.4 & 19.6 \end{bmatrix}.$$

가중행렬 Q의 고유값을 구해 보면 다음과 같다.

$$\lambda(Q) = \{-1218.7, 1270.2, 1.9, -1.4\}$$

음의 고유값이 있으므로 Q는 비한정이다. 이 경우에 감도 전달함수행렬과 페루프 전달함수행렬의 최대 특이값은 각각 전 주파수역에 걸쳐 다음의 한계를 가진다.

$$\sigma_{\max}[S_{LQ}(j\omega)] \leq \frac{1}{\sqrt{a+b}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.0434}} = 1.0224$$

$$= 0.1927 \text{ [dB]}$$

$$\sigma_{\max}[C_{LQ}(j\omega)] \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{a+b}} = 2.0224 = 6.1173 \text{ [dB]}$$

그리고, 곱셈형 모델링 오차에 대한 안정도-강인성 한계는 다음과 같다.

$$\sigma_{\max}[E(j\omega)] < 0.4945$$

전 주파수역에서  $\lambda(H(s))$ 의 최대크기가  $-0.0434$ 로 음수이지만, 1에 비해서 극히 작기 때문에 전주파수역에서 주파수역의 저감도 특성이 표준 LQR에 비해 거의 떨어지지 않는다. 그림 3은 설계된 비행제어시스템의 주파수역 특성을 도시한 것이다. 그림 3에서 보면 각각의 최대특이값이 각각의 한계치 이하에서 변하고 있음을 알 수 있다. 또한, 저주파에서 외란 제거 성능과 명령 추종 성능 및 고주파에서 센서잡음에 대한 저감도 성능이 좋다. 이 예제의 경우 LQR 시스템의 획득가능한 부분공간에 고유구조의 획득가능한 부분공간이 모두 속하지 않으므로 비한정 Q의 음의 고유값을 모두 양으로 만드는 것은 불가능하지만, 주파수역 특성을 해치지 않을 만큼 작게 만드는 것은 가능하다. 다시 말하면, LQR 제어시스템의 상태가중행렬과 임의의 고유구조 사이에 절충이 이루어짐을 알 수 있다.

위의 설계결과에 대하여, 모든 초기조건을 0이라 가정하고 페루프 시스템의 임펄스 응답을 살펴보면 그림 4에서 도시한 바와 같이 개루프 상태에서 모든 상태들이 발산하는데 비해 페루프 시스템의 모든 상태변수들은 재빨리 수렴하는 것을 볼 수 있다

**V. 결론**

LQR과 고유구조 지정기법을 결합하여 제어하는 목적은 임의의 고유구조를 지정함으로써 시스템 성능 및 안정도-강인성에 관한 설계사양을 직접 설계과정에서 고려하고, 기존의 고유구조 지정기법에서 반영할 수 없었던 견실특성을 LQR로써 해석하기 위함이다.

본 논문에서는 일부 시스템에 고유구조 지정기능을

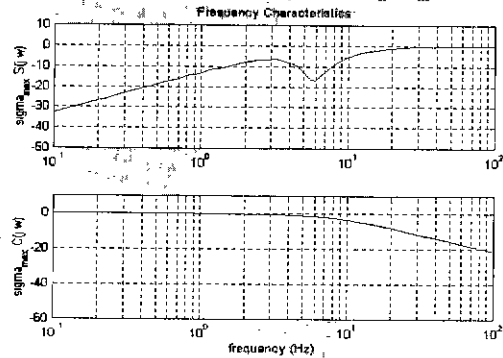


그림 3. 비행제어시스템의 주파수 특성.  
Fig. 3. Frequency characteristics of flight control system.

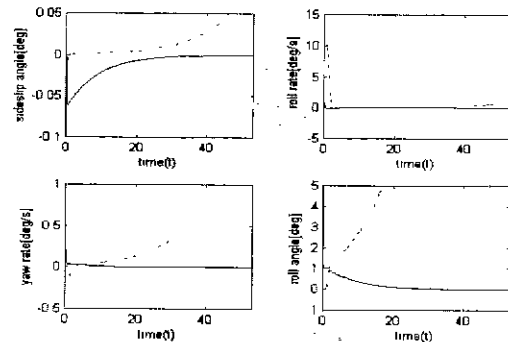


그림 4. 임펄스 응답. (점선 : 개루프, 실선 : 페루프).  
Fig. 4. Impulse responses (dashed line : open-loop, solid line : closed-loop).

갖는 LQR을 적용시 발생하는 비한정 Q가 시스템의 주파수역 특성에 미치는 영향에 대하여 해석하였고, 비한정 Q가 사용된 경우의 견실특성을 고찰하였다. 주파수역 시뮬레이션 결과 고유구조 지정기능으로 인한 이점과 비한정 Q로 인한 손실은 서로 절충될 수 있음을 알 수 있다.

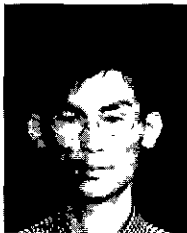
기존의 참고문헌들에서 다루어졌던 비행제어시스템 설계에 적용하여 타당성을 검증하였고, 더 발전된 설계지침을 제시하였다. 즉, 고유벡터와 상태가중행렬 사이의 관계에 근거하여 설계기준을  $R \approx \rho I$ 로 하여 설계함으로써 기존의 표준 LQR ( $R = \rho I$ )과 유사한 주파수역 해석을 가능하게 하였다.

앞으로 더 연구되어야 할 부분으로는 LQR의 획득가능한 부분공간과 설계자가 임의로 지정할 수 있는 고유구조의 획득가능한 부분공간 사이의 관계를 해석적으로 규명하여 제어목적에 따라 상태가중행렬의 비한정성을 최대한 줄이는 제어기법에 관한 연구가 요구된다.

**참고문헌**

[1] P. Dorato, C. Abdallah, and V. Cerone, *Linear Quadratic Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995.

- [2] B. P. Molinari, "The stable regulator problem and its inverse," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 26, no. 1, pp. 4-16, February, 1981.
- [3] H. Ohta, M. Kakinuma, and P. N. Nikforuk, "Use of negative weights in linear quadratic regulator synthesis," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, pp. 791-796, July, 1990.
- [4] F. M. Al-Sunni, and B. L. Stevens, "Negative state weighting in the linear quadratic regulator for aircraft control," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 5, pp. 1279-1281, Sept.-Oct., 1992.
- [5] Y. Ochi, and K. Kanai, "A new way of pole placement in LQR and its application to flight control," *Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Monterey, CA, USA, pp. 1295-1301, August 1993.
- [6] J. Luo, and C. E. Lan, "Determination of weighting matrices of a linear quadratic regulator," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 6, pp. 1462-1463, Nov.-Dec., 1995.
- [7] 최제원, 서영봉, "고유구조지정 기능을 갖는 LQR 설계 및 비행제어시스템에의 응용," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, 제4권, 제3호, pp. 280-288, 1998, 6.
- [8] J. W. Choi, and Y. B. Seo, "LQR design with eigenstructure assignment capability," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 35, no. pp. 700-708, 2, April, 1999.
- [9] G. M. Siouris, J. G. Lee, and J. W. Choi, "Design modern pitch pointing control system," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 31, no. 2, pp. 730-738, April, 1995.
- [10] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, "Design of an effective controller via disturbance accommodating left eigenstructure assignment," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 2, pp. 347-354, March-April, 1992.
- [11] J. W. Choi, "A simultaneous assignment methodology of right/left eigenstructures," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 34, no. 2, pp. 625-634, April, 1998.
- [12] J. W. Choi, "Left eigenstructure assignment via sylvester equation," *KSME International Journal*, vol. 12, no. 6, pp. 1034-1040, December, 1998.
- [13] 김종식, 선형 제어시스템 공학, 청문각, 1997.
- [14] R. A. Horn, and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, pp. 423-424, 1985.



#### 서 영 봉

1997년 부산대 기계설계공학과 졸업. 부산대 기계공학부 석사(1999), 1999-현재 부산대 기계공학부 박사과정, 1985. 5. 부산대학교 대학원 공학계열 학술상 수상. 관심분야는 최적제어이론, 건설제어이론, 고유구조 지정 및

응용, 자동차 현가 장치 제어.



#### 최 제 원

1987년 서울대 제어측정공학과 졸업. 동대학원 석사(1989), 동대학 박사(1995). 1995.2-1995.3 일본 NASDA /TKSC 방문연구원. 1995.9-1996.2 미국 USC 방문연구원. 1998. 1-1998.2 미국 LSU 방문연구원. 1996-현재 부산대학교 기계공학

부 조교수. 관심분야는 고유구조 지정 이론, 선형 시변 시스템 이론, 항법 및 유도제어 시스템, 자동차 현가장치 제어.