방출전산화단층촬영술을 위한 통계학적 영상재구성법

이 수 진*
(*배재대 전자공학과 교수)

본 논문에서는 핵의학에 있어서 중요한 임상정보를 제공하는 방출전산화단층촬영술의 원리와 이를 이용한 투영데이터로부터 단면영상을 재구성할 수 있는 알고리즘에 관하여 고찰한다. 이를 위해 방출전산화단층촬영술의 원리를 이해하고, 이로부터 영상재구성을 위한 효율적 알고리즘의 모델을 분석한다. 특히, 광자방출에서 검출에 이르기까지 발생되는 물리적 현상을 통계학적 차원에서 모델링함으로써 유도되는 통계학적 영상재구성법을 소개하고 기존의 비통계학적 방법과의 장·단점을 비교한다. 최근에 활발히 연구가 진행중인 통계학적 영상재구성법의 장·단점과 향후 개선책에 관하여도 체계적으로 논한다.

1. 방출전산화단층촬영술의 개요

방출전산화단층촬영술(Emission Computed Tomography, ECT)은 체내 대사와 장기 기능 등을 비침습적(noninvasive)으로 2차원 단면영상을 통해 정량적으로 관찰할 수 있도록 하는 핵의학 영상 기법이다. 이는 인체내의 해부학적 영상을 제공하는 자기공명영상 또는 X-선 단층영상 등과는 달리 체내의 생리적기능영상을 제공한다[1,2]. 즉, ECT에서는 인체에 방사성의약품을 투여하고 이것이 생화학적 특성에 따라 체내의 특정위치에 분포된 뒤 방출되는 감마선을 체외에서 검출함으로써 체내에 위치한 특정 방사성의약품의 화학적 특성에 따른 분포도를 간접적으로 관찰할 수 있도록 하는 기본 데이터를 형성한다.

ECT는 사용되는 방사성의약품의 종류와 감마선의 검출방식에 따라 양전자방출단층촬영술(Positron Emission Tomography, PET)과 단일광자방출전산화단층촬영술(Single-Photon Emission Computed Tomography, SPECT)로 구분된다. PET에서는 기본적으로 ^{11}C, ^{13}N, ^{15}O, ^{18}F 등과 같은 양전자 방사성물질로부터 방출되는 감마선을 검출한다. 체내의 조직에서 방출된 양전자는 전자와 상호작용을 함으로써 에너지를 잃고 소멸하게 되는데, 이때 한 개의 양전자가 소멸되면서 511 kev의 높은 에너지를 갖는 한 쌍의 광자를 생성하고 이들은 상호 반대 방향 (180° ±0.25°)으로 진행되면서 그림 1과 같이 원형으로 배열된 검출기에 의해 검출된다. 즉, 상호 반대방향에 위치한 한 쌍의 검출기 마다 일정시간의 폭을 갖는 전자게이트회로가 설치되어 있어 주어진 짧은 시간 (4~10ns) 내에 상호 반대방향으로 진행된 한 쌍의 광자만이 검출될 수 있도록 한다[3]. 이와 같이 한 쌍의 검출기에 의해 일정시차 내로 검출되는 것을 "coincidence event"라 하는데, 이를 이용하여 특정방향으로 진행되는 광자의 개수를 축적할 수 있다. PET의 경우 360° 에 걸쳐 배열된 검출기 중 각 한 쌍은 하나의 coincidence event를 기록하기 위한 것이므로 사실상 180° 에 걸쳐 축적된 광자의 개수를 사용하여 영상을 재구성하게 된다. PET의 경우 사용되는 방사성의약품들의 반감기가 매우 짧으므로 인체에 투여되기 직전에 가속기를 통해 제조되어야 하는 단점이 있으나, 각종 종양은 물론, 간질, 노인성치매 등의 진단을 위한 중요한 임상정보를 제공한다는 점에서 오늘날의 핵의학에 있어서 매우 중요한 위치를 차지하고 있다.

한편, SPECT에 사용되는 방사성물질에는 ^{99m}Tc, ^{201}Tl, 등이 있는데, 이들로부터 방출되는 감마선은 PET의 경우와는 달리 임의의 한 방향으로 방출되는 단일광자로 이루어져 있다. 따라서, SPECT용 방사성물질로부터 방출되어 동시에 임의의 방향으로 진행되는 다수의 광자들 중 한 방향으로만 진행되는 광자들을 검출하기 위해서는 별도의 조준기(collimator)가 필요하다 (그림 2). 조준기는 여러 개의 가는 관으로 구성되어 있어 검출기로 하여금 미세각도 내로 진행되는 광자들을 검출할 수 있도록 한다. SPECT의 경우 이러한 조준기를 통해 순차적으로 광자를 수집하므로 PET에서 요구되는 coincidence event의 감지를 위한 전자게이트회로가 필요 없다. PET에 비해 SPECT의 장점중의 하나는 위에 언급된 SPECT용 방사성물질의 반감기가 매우 길므로 별도의 부가적인 가속기 없이도 손쉽게 이들을 구입

하여 환자에 투여할 수 있다는 것이다. 예를 들면, PET에서 사용되는 ^{11}C의 경우 반감기가 약 20.5분인 반면, SPECT용 ^{99m}Tc로부터 방출되는 광자의 에너지 세기는 140 kev 이고 반감기가 약 6.02시간이다[1]. 이러한 장점으로 인해 SPECT는 현재 각종 종양은 물론 뇌혈류(regional cerebral blood flow: rCBF)를 측정하는데도 유용하게 사용되고 있다[4].

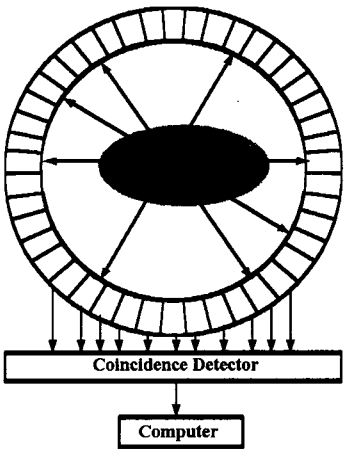


그림 1. Positron Emission Tomography

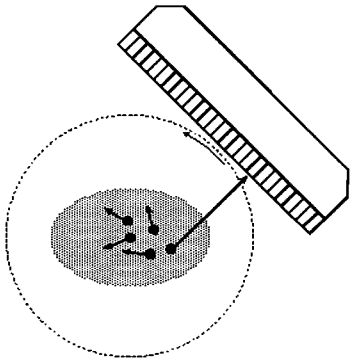


그림 2. Single-Photon Emission Computed Tomography

2. 광자방출의 물리적 현상에 의한 영향

방출된 광자가 검출기에 도달될 때 까지 여러 물리적 현상을 겪게 되나 이 중에서 최종적으로 영상의 질에 크게 영향을 미치는 몇 가지 물리적 현상을 PET과 SPECT의 경우에 구분하여 나열하면 다음과 같다.

PET의 경우 511 kev에서 발생될 수 있는 광자간의 상호작용으로 광전기적 흡수 (photoelectric absorption) 와 콤프톤 산란 (Compton scatter) 등이

있다. 그러나, 이중에서 체내에서 발생되는 511 kev에서의 광전기적 흡수작용은 거의 무시될 수 있다. 콤프톤 상호작용의 경우 광자가 외곽의 전자와 상호작용을 함으로써 그 진행방향이 변경되고 일부 에너지를 잃게 된다. 이때 대부분의 광자들은 산란되므로 coincidence event로 감지되지 못하여 검출기에 기록되지 못한다. (그림 3 (a)) 이러한 현상을 감쇠(attenuation)라 한다. SPECT의 경우에도 이와 같은 감쇠현상이 있으나, 이는 광전기적 흡수작용에 의한 것으로 PET의 경우와 근본적으로 다르다. 즉, SPECT의 경우 방출된 광자들이 인체에 흡수되거나 높은 에너지의 광자들이 조준기의 각도에 어긋나는 방향으로 산란됨으로써 감쇠현상이 나타난다. PET과 SPECT의 감쇠현상의 정도를 비교하기 위해 10cm 두께의 조직을 통과하는 광자들의 투과비율을 보면, PET의 경우 511 kev에서 약 40%에 이르나 SPECT의 경우 140 kev에서 약 20%에 지나지 않는다. 따라서 감쇠현상이 미치는 영향은 SPECT가 PET에 비해 심각하다. 광자방출의 물리적 현상 중 PET 또는 SPECT 영상의 질에 가장 크게 영향을 미치는 요소는 감쇠현상으로서 영상재구성시 이 현상을 무시할 경우 물체의 중앙부분이 바깥부분에 비해 매우 어둡게 나타난다[2].

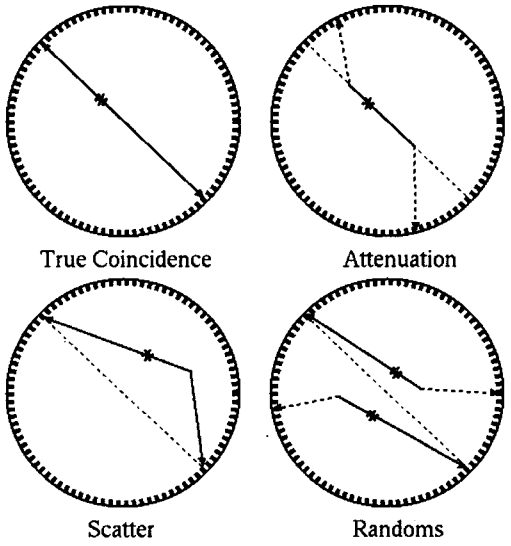


그림 3. PET에서 영상의 질에 영향을 미치는 주요 물리적 현상

ECT에서 영상의 질에 영향을 미치는 주요 물리현상 중 또 다른 요소는 콤프톤 산란 (Compton scatter) 효과이다. PET의 경우 양전자가 전자와의 상호작용을 통해 에너지를 잃고 소멸하면서 방출하는 한 쌍의 광자들이 180° 반대방향으로 진행하던 중 콤프톤 상호작용에 의해 산란될 경우 대부분 coincidence event로 감지되지 않는다. 그러나, 그림 3(b)에 나타난 바와 같이 산란 이후에 우연히 일직선상에 놓임으로써 정상적인 coincidence event처럼 검출되는 수가 있는데, 이를 coincidence event와 구분하여 산란 event라 한다. SPECT의 경우도 이와 유사하게 단일광자의 진행방향이 산란에 의해 변경됨으로써 원래의 위치에서 벗어난 다른 위치의 조준기를 통해 광자가 검출되는 수가 있다. PET과 SPECT 공히 이러한 산란효과는 콤프톤 상호작용

에 의해 광자 에너지의 일부를 잃으면서 발생되므로 위에 언급된 감쇠현상의 경우와는 달리 콤프톤 산란을 통해 검출된 광자의 에너지는 원래의 정상경로를 통해 검출된 광자의 에너지 보다 낮다. 따라서, 검출 시에 일정 에너지레벨 이하의 광자들을 제외시킬 경우 콤프톤 산란의 영향을 줄일 수 있다. 그러나, 대부분의 경우 에너지 분해성능에 한계가 있으므로 정확하게 콤프톤 산란에 의한 광자들만을 제외시키는 것이 용이하지 않다. 일반적으로, 영상재구성시 콤프톤 산란효과의 보정이 없을 경우 재구성된 영상에 번짐 현상이 나타난다[2].

PET의 경우 위에 언급된 감쇠 및 콤프톤 산란현상 외에 또 하나의 주요 물리현상이 있다. 이는 랜덤(randoms) 현상으로서 그림 2에 나타난 바와 같이 서로 다른 위치에서 발생된 광자쌍 중 산란에 의해 서로 무관한 광자들 간에 우연히 180° 의 일직선이 형성되어 검출기에 기록되는 경우를 의미한다.

SPECT의 경우 PET과는 달리 한 방향으로 진행되는 광자들을 검출하기 위해 조준기를 사용하므로, 제한된 조준기 직경에 의한 검출기응답 (detector response)에 의해 영상의 질이 제한된다. 검출기응답은 특정 위치의 조준기를 통해 검출되는 광자의 개수를 임펄스응답으로 표현한 것으로서, 조준기의 기하학적 구조 및 위치에 따라 결정되는 space-variant point spread function (PSF)이 된다. 이러한 검출기응답은 광자방출의 시작점에서 검출기에 이르는 거리의 함수로 표현되어 SPECT의 분해능을 결정하며, 일정 폭을 갖는 PSF에 의해 영상의 선명도가 저하된다.

위에 언급된 광자방출의 물리적 현상에 의해 발생되는 PET 또는 SPECT의 감쇠, 산란, 랜덤, 및 검출기 응답 등의 효과는 영상의 질을 저하시키는 요인이 되므로, 영상재구성시 사용되는 알고리즘이 이러한 요인들을 효율적으로 보정할 수 있는지의 여부가 그 알고리즘의 성능을 좌우하게 된다.

3. 투영 데이터로부터 단면영상의 재구성

체내에 투여되어 특정 위치에 농인 방사성물질로부터 일정시간 동안 방출되는 광자의 개수는 그 특정 위치에 있는 방사성물질의 농도에 비례한다. 따라서, 방출되는 광자들의 개수를 외부의 검출기를 통해 측정하여 수치화할 경우 이는 체내에 위치한 특정 방사성 의약품의 화학적 특성에 따른 분포도를 간접적으로 관찰할 수 있도록 하는 기본 데이터를 형성하게 된다. ECT의 기능은 이러한 원리를 이용하여 3차원 공간상의 특정 단면을 따라 분포된 방사성의약품의 분포를 간접적으로 측정하여 이를 2차원의 영상으로 가시화하는 것이다. 그런데, 한 단면을 따라 방출된 광자들을 검출하여 그 개수를 수치화할 경우 2차원 단면상에 분포된 여러 위치의 광자들이 1차원 상에 투영되어 2차원상의 위치정보가 유실되므로, ECT를 위한 단면영상재구성법에서는 360° 에 걸쳐 얻어진 여러 개의 1차원 투영 데이터를 사용하여 2차원 단면의 영상을 복원한다.

복원하고자 하는 2차원 단면영상을 $f(x,y)$로 표현할 경우 그림 4에 나타난 바와 같이 임의의 각도 θ로 투영시킨 결과는 다음과 같은 선적분으로 표현되며 이를 라돈변환 (Radon transform)이라 한다[4].

$$g_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)dxdy \qquad (1)$$

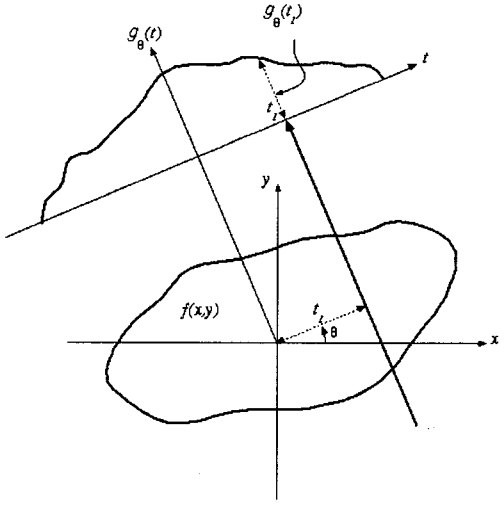


그림 4. 일정 각도의 선을 따른 투영

식 (1)에서 투영된 g는 주어진 각도 θ에 대하여 t에 관한 함수로 주어진다. 따라서, 영상재구성이란 식 (1)에서 $f(x,y)$를 구하는 것이다. 영상재구성을 위한 가장 단순한 방법으로 Filtered backprojection (FBP) 방법이 있는데, 이는 $f(x,y)$ 의 2차원 푸리에변환 $F(\xi,\eta)$과 $g_\theta(t)$의 1차원 푸리에변환 $G_\theta(\omega)$ 사이의 다음과 같은 관계식을 이용한 것이다[4].

$$F(\xi,\eta)|_{\xi=\omega\cos\theta,\,\eta=\omega\sin\theta} = G_\theta(\omega) \qquad (2)$$

따라서, 윗식의 양변에 역푸리에변환을 취함으로써 쉽게 $f(x,y)$를 구할 수 있다. 이 경우, $f(x,y)$는 다음과 같은 식으로 주어진다.

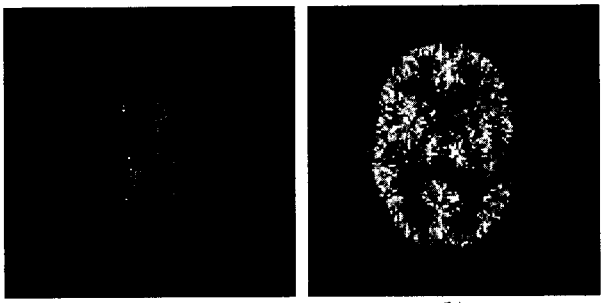
$$f(x,y) = \int_0^{\pi} Q_\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)d\theta, \qquad (3)$$

여기서 $Q_\theta(t)$는

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\omega)|\omega|\exp(j2\pi\omega t)d\omega \qquad (4)$$

로 정의되며 이는 $g_\theta(t)$를 램프필터(ramp filter) $|\omega|$로 필터링한 뒤 푸리에변환을 한 것이다. 따라서, $Q_\theta(t)$를 "filtered projection"이라 하며, 식 (3)에서 $Q_\theta(t)$를 backprojection함으로써 $f(x,y)$를 구할 수 있다. 그림 5(b)는 PET 영상재구성의 한 예를 나타낸 것으로서, 그림 4에서 θ를 180° 에

걸쳐 336 등분하고 t를 191등분하여 얻은 투영데이터에 감쇠 및 랜덤효과에 대한 보정작업을 거친 뒤 (그림 5(a)) FBP방법으로 이를 재구성한 것이다.



(a) (b)

그림 5. FBP방법을 사용한 PET 영상재구성
(a) 투영데이터 (수평축: 검출기 t 방향, 수직축: 각도 θ 방향), **(b)** FBP 영상재구성 (128×128).

FBP 영상재구성법은 알고리즘이 매우 단순하고 계산시간도 비교적 적으므로 현재 일반적인 임상적용에 널리 실용화되어 사용되고 있다. 특히, 식 (4)의 $|\omega|$에 Hanning 또는 Hamming 윈도우와 같은 저역통과 필터를 포함시킴으로써 잡음을 쉽게 감소시킬 수 있는 장점이 있다. 그러나, FBP 영상재구성법은 광자방출의 물리적·통계적 특성에 의한 영향을 무시하고 투영과정의 수학적 역변환을 사용하는 "deterministic" 방법이므로 정량적 면에서 재구성된 영상의 질이 매우 저조하다. 또한, backprojection시 투영데이터에 포함된 잡음이 영상을 구성하는 각 화소에 그대로 전달되어 그림 5(b)에 나타난 바와 같이 방사선 형태의 잡음이 전 영역에 걸쳐 강하게 나타난다. 한편, 저역통과 필터를 사용하여 잡음을 감소시킬 경우 고주파성분을 갖는 미세영역에 대한 정보가 유실될 수 있을 뿐 아니라, 재구성된 영상내의 각 화소 값이 원래의 값에서 편향(bias)되는 경향이 있어 정량적 측정을 통한 진단에 오류를 발생시킬 수 있는 단점이 있다.

4. ML-EM을 사용한 통계학적 영상재구성

위에 언급된 FBP 영상재구성법의 단점을 극복하기 위해 지난 10년여에 걸쳐 활발히 진행되고 있는 새로운 영상재구성법에 관한 연구의 대표적 예로써 광자의 방출에서 검출에 이르는 모든 물리적 절차를 통계학적 차원에서 모델링한 통계학적 영상재구성법을 들 수 있다. 즉, ECT의 영상에 내재하는 잡음의 주된 원인이 검출기에 도달하는 광자 개수의 변화에 있으므로 이를 수학적으로 묘사할 수 있는 확률분포함수를 설정하여 이로부터 영상재구성 알고리즘을 유도하게 된다.

일정시간 동안 방사성물질로부터 방출되는 광자의 개수를 랜덤변수 (random variable) N으로 표현할 경우, N은 다음과 같은 Poisson 분포를 따르게 된다[5].

$$\Pr(N=n)=\frac{\mu^n\exp(-n)}{n!} \tag{5}$$

식 (5)에서 $\Pr(N=n)$은 일정시간 동안 방출된 광자의 개수가 n일 확률을 나타내며, 이때 평균값이 μ임을 나타낸다. 그러므로, 구하고자 하는 단면 f를 2차원 격자(lattice)로 표현할 경우 특정 위치 (i,j)에서의 방사성물질의 농도 f_{ij}는 식 (5)의 μ에 해당된다.

그림 4에서 광자들이 검출기의 특정위치 t로 검출되는 사건들은 독립적이므로, 투영데이터의 형성과정을 묘사하는 ECT 시스템의 likelihood 분포함수는 Poisson 랜덤과정으로 묘사되는 광자 방출-검출의 과정으로부터 유도되어 다음과 같은 독립 Poisson 분포함수로 표현된다[6].

$$\Pr(G=g|f)=\prod_{t\theta}\frac{\bar{g}_{t\theta}^{\,g_{t\theta}}\exp(-\bar{g}_{t\theta})}{g_{t\theta}!} \tag{6}$$

식 (6)에서 $g_{t\theta}$는 (t,θ)로 표시되는 특정 검출기에 축적된 광자의 개수 즉, 투영 값이며, $\bar{g}_{t\theta}$는 특정 검출기 (t,θ)에 축적된 광자 개수의 평균값으로서 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{g}_{t\theta}=\sum_{ij}H_{t\theta,ij}f_{ij} \tag{7}$$

또한, G는 투영 값 g의 랜덤필드 이다.

통계학적 영상재구성법 중 가장 기본적인 유형은 maximum likelihood (ML) 추정법인데, 이는 다음과 같은 식으로 요약된다.

$$\hat{f}=\arg\max_{f}\ \Pr(G=g|f) \tag{8}$$

즉, likelihood ($\Pr(G=g|f)$)를 최대화하는 f를 추정함으로서 복원하고자 하는 영상 $\hat{f}$를 얻는 것이다. 그런데, 식 (6)으로 표현되는 likelihood를 직접 최대화하는 것이 거의 불가능하므로 기대값 최대화 (Expectation Maximization, EM)를 통하여 간접적으로 식 (7)의 해 $\hat{f}$를 구하는 방법이 큰 실효를 거두어 이에 관한 연구가 최근에 활발히 진행되어 왔다. 이러한 방법을 ML-EM이라 하며, 이는 Shepp 과 Vardi[7]에 의해 ECT를 위한 영상재구성분야에 응용되었다. ML-EM은 디지털 컴퓨터를 사용하기에 매우 적합한 알고리즘으로서 통계학적 영상재구성법에 매우 유용하게 응용되고 있다.

ML-EM을 사용한 영상재구성법에서는 관측된 투영데이터를 "불완전"(complete) 데이터로 간주하고 식 (6)에 표현된 likelihood를 직접 최대화하는 대신 관측이 불가능하나

수학적으로 표현 가능한 "완전"(complete) 데이터 C에 대한 조건부 기대값 $E_C[\log \Pr(C=c|f)|G=g,\hat{f}]$을 최대화시킴으로써 간접적으로 likelihood를 최대화하여 식 (8)의 해인 $\hat{f}$을 구한다. 여기서, 관측된 투영데이터가 불완전하다는 의미는 그림 4에 나타난 바와 같이 투영데이터를 형성하는 (t,θ)에서의 g는 서로 다른 위치로부터 방출된 f의 합이므로 관측된 g가 실제로 x,y 평면상의 어느 위치에 기인하는가에 관한 정보가 이미 상실되었음을 나타낸다. 한편, 완전 데이터라 함은 x, y 평면상의 특정위치(x,y)에서 광자가 방출하여 검출기의 특정위치 (t,θ)에 도달된 것을 나타내는 비가시적 데이터를 의미한다. 따라서, 완전 데이터 C는 수학적 표현이 가능하여 EM 알고리즘에 사용될 수 있을 뿐 실제로 관측이 가능한 것은 아니다. ML-EM에서는 $\hat{f}$에 임의의 초기 값을 설정하고, 관측된 투영데이터 g와 함께 반복적으로 조건부 기대값 $E_C[\cdot]$를 계산함으로써 수렴된 $\hat{f}$를 구한다.

ML-EM 의 유도과정은 참고문헌 [7,11]에 상세히 서술되어 있으므로, 여기서는 최종 식의 물리적 의미를 분석하기로 한다. ML-EM 을 위한 최종식(update equation)은 다음과 같다.

$$\hat{f}^{n+1}=\frac{\hat{f}_{ij}^{\,n}}{\sum_{t\theta}H_{t\theta,ij}}\cdot\sum_{t\theta}\frac{g_{t\theta}H_{t\theta,ij}}{\sum_{kl}H_{t\theta,kl}\;\hat{f}_{kl}^{\,n}} \tag{9}$$

식 (9)에서 n은 특정 반복회수를 의미하며, 두 번째 항의 분모 $\sum_{kl}H_{t\theta,kl}\;\hat{f}_{kl}^{\,n}$은 식(7)과 비교하여 n번째 계산된 $\hat{f}$의 projection이다. 또한, 이를 $r_{t\theta}^{n}=\sum_{kl}H_{t\theta,kl}\;\hat{f}_{kl}^{\,n}$로 정의하여 식 (9)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\hat{f}^{n+1}=\frac{\hat{f}_{ij}^{\,n}}{\sum_{t\theta}H_{t\theta,ij}}\cdot\sum_{t\theta}H_{t\theta,ij}\left[\frac{g_{t\theta}}{r_{t\theta}^{n}}\right]$$

윗식에서 $\sum_{t\theta}H_{t\theta,ij}[g_{t\theta}/r_{t\theta}^{n}]$는 $g_{t\theta}/r_{t\theta}^{n}$의 "backprojection"에 해당된다. 따라서, ML-EM 알고리즘에서는 $r_{t\theta}^{n}$을 구하기 위한 projection과 $\sum_{t\theta}H_{t\theta,ij}[g_{t\theta}/r_{t\theta}^{n}]$의 계산을 위한 backprojection의 반복연산을 요함을 알 수 있다.

ECT 영상재구성을 위해 ML-EM방법을 사용할 경우 광자방출의 Poisson 특성이 그대로 보존될 뿐 아니라, 식 (9)의 $H_{t\theta,ij}$에 ECT의 각종 물리적 특성을 포함할 경우 FBP에서 요구되는 별도의 물리적 현상을 위한 보정작업 없이 영상재구성 과정에서 이들을 보정할 수 있는 큰 장점이 있다. 최근에 Hudson과 Larkin[8]은 반복연산을 요하는 ML-EM 방법을 고속화시키기 위해 투영데이터를 몇 개의 블록으로 나누어 블록단위로 projection과 backprojection을 수행하도록 하는 "ordered subsets" EM (OS-EM) 알고리즘을 제안하였다. 그러나, 알고리즘의 수행속도를 증가시키기 위해 블록의 개수를 증가시킬수록 ML추정의 해로부터 멀어져 영상의 질이 점차 저하되는 단점이 있다.

ML-EM은 위에 언급된 여러 면에서 기존의 FBP에 비해 정량적으로 양질의 영상을 제공하는 우수한 알고리즘으로 알려져 있다. 그러나, ML 추정법에 근거한 알고리즘은 수렴된 해를 얻기 위해 반복계산의 정확한 횟수를 예측할 수 없는 큰 단점이 있다. 즉, ML-EM 영상재구성법 사용시 반복횟수가 어느 정도 이상이 될 경우 알고리즘이 발산하므로 이때부터 영상의 질이 급격히 저하된다. 알고리즘의 발산 원인은 기본적으로 Poisson likelihood를 최대화함으로써 Poisson 잡음이 반복회수를 거듭할수록 증폭되어 발생된다. 투영데이터로부터의 영상재구성을 수학적으로 분석하면 "ill-posed problem"에 해당되는데, 이는 부가적인 제약조건이 없을 경우 해가 불안정하여 발산하는 경우를 의미한다. 즉, ML-EM에서는 Poisson 잡음으로 표현되는 likelihood를 최대화하므로 반복회수를 어느 이상 증가시킬 경우 시스템 잡음 (즉, Poisson 잡음)으로 인해 해가 발산하는 것이다.

5. Bayesian 영상재구성

Bayesian 방법은 ML-EM의 확장형으로서 수학적으로 ill-posed 형태인 ML-EM 알고리즘에 안정자(stabilizer)를 추가함으로써 영상재구성을 "well-posed problem"으로 변환한 것이다. 투영데이터의 랜덤필드를 G라하고, 복원하고자 하는 원 영상(underlying image)의 랜덤필드를 F라 할 경우, 다음과 같은 Bayes 관계식을 쓸 수 있다[9,10,11].

$$\Pr(F=f|G=g)=\frac{\Pr(G=g|F=f)\Pr(F=f)}{\Pr(G=g)} \tag{10}$$

식 (10)에서 $\Pr(G=g|F=f)$는 likelihood, $\Pr(F=f)$는 prior, $\Pr(G=g)$는 관측된 투영데이터의 확률분포 이다. 또한, 식 (10)에서 $\Pr(G=g)$는 관측된 투영데이터로부터 얻어진 항이므로 다른 항들과는 달리 상수항이 된다. Likelihood 항에 있어서 식 (10)과 (8)의 차이점은 ML-EM의 경우 복원하고자 하는 영상 f 가 랜덤필드가 아닌 반면, Bayesian 방법의 경우 이를 랜덤필드로 간주하는 것이다. 즉, likelihood 항에 f 대신 f 의 랜덤필드 F 가 사용된다. 이는 Bayesian 방법에서 복원하고자 하는 영상 자체를 랜덤필드로 모델링함으로써 원영상에 관한 사전정보(prior)를 확률분포함수 $\Pr(F=f)$로 표현하기 위함이다.

ML-EM에서는 likelihood 항을 최대화하는 반면, Bayesian 방법에서는 식 (10)으로 표현되는 posterior를 최대화함으로써 f 를 구하는 것이다. 따라서, 식(10)의 양변에 -log를 취하여 최대화를 최소화로 변형하여 다시 쓰면,

$$\hat{f} = \arg\max_{f} \Pr(F=f|G=g) \quad (11)$$
$$= \arg\min_{f} [-\log \Pr(F=f|G=g)]$$
$$= \arg\min_{f} -[\log \Pr(G=g|F=f) + \log \Pr(F=f)]$$

가 된다. 식 (10)의 상수항 $\Pr(G=g)$는 f에 관한 함수가 아니므로 식 (11)에서 제외되었다. 식 (11)은 posterior를 최대화하는 것이므로 이는 maximum *a posteriori* (MAP) 추정에 해당된다. MAP 방법에 있어서 가장 중요한 항은 사전정보를 표현하는 prior 항이다. 즉, 식 (11)에서 prior 항은 ML-EM에서의 식 (8)에 부가적인 항으로서 ML-EM의 불안정성을 해소시키기 위한 안정자의 역할을 한다. 결과적으로 이러한 안정자를 포함하는 Bayesian 영상재구성 알고리즘을 사용할 경우 ML-EM과 달리 반복회수가 증가하여도 발산되지 않는 매우 안정적인 해를 얻을 수 있다.

Bayesian 방법에서 주로 사용되는 prior 확률분포함수는 Markov 랜덤필드에 근거한 Gibbs 분포함수로서 이는 복원하고자 하는 단면영상을 2차원 랜덤필드로 표현할 경우 어느 특정 화소의 값이 인접한 주변화소와 유사함을 제약조건으로 한다. Gibbs 분포함수를 사용한 prior 확률분포함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\Pr(F=f) = \frac{1}{Z}\exp[-\lambda E_P(f)] \quad (12)$$

여기서, Z는 prior 확률분포함수의 전 구간에 걸친 적분값이 1이 되도록 하는 항이며, λ는 양의 상수, 그리고 $E_P(f)$는 인접화소간의 강도 차이로 인한 prior 에너지로서 단순한 형태의 에너지 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$E_P(f) = \sum_{ij}[(f_{i,j+1}-f_{i,j})^2 + (f_{i+1,j}-f_{i,j})^2] \quad (13)$$

즉, 영상에 잡음이 내재할 경우 어떤 화소 $f_{i,j}$를 중심으로 상, 하, 좌, 우 4 방향으로 인접한 화소간의 값 차이가 증가하여 $E_P(f)$가 증가한다. 따라서, 식 (12)와 (13)을 식 (11)에 대입하면 다음과 같은 에너지 함수를 최소화하는 형태로 된다.

$$E(f) = E_D(f) + \lambda E_P(f) \quad (14)$$

여기서 $E_D(f)$는 ML-EM에서 사용된 조건부 기대값 $E_C[\cdot]$에 음수를 취한 $E_D(f) = -E_C[\cdot]$ 이다. 이 경우 ML-EM의 기대값 최대화는 에너지 최소화문제로 변환된다. 따라서, Bayesian 방법을 사용한 영상재구성은 식 (14)에 정의된 전체 에너지함수 $E(f)$를 최소화하여 f 를 구하는 것이다. 식 (14)에서 $\lambda=0$인 경우 $E_D(f)$만을 최소화하므로 이는 ML-EM으로 압축된다. 한편, λ가 매우 큰 경우 식 (14)에서 $E_P(f)$의 비중이 커지므로 재구성된 영상은 prior에 치중된 결과를 초래하게 된다. 즉, 식 (13)과 같은 prior를 적용시 λ가 매우 클 경우 재구성된 영상은 oversmooth되어 미세부분에 대한 중요정보가 상실 될 수 있다. 따라서, Bayesian 영상재구성법에서는 prior의 선택 뿐 아니라 likelihood와 prior의 평형을 조절하는 상수 λ의 적절한 선택이 영상의 질에 큰 영향을 미치므로 이를 자동으로 추정하는 방법에 관한 연구도 매우 중요하다[12].

Bayesian 방법에서는 MAP에 근거한 전체에너지의 최소화 작업이 필수적이다. Likelihood 항에 해당되는 $E_D(f)$는 그 함수의 형태가 convex 이므로 단순히 $\frac{\partial E_D(f)}{\partial f_{ij}}=0$으로부터 쉽게 $\hat{f}$을 구할 수 있다. 그러나, 어떤 형태의 prior를 사용하느냐에 따라 전체에너지 (식 (14))의 최소화 방법이 결정된다. 즉, 식 (13)과 같은 quadratic [13] 형태의 prior는 $\frac{\partial E(f)}{\partial f_{ij}}=0$을 사용하여 최소화가 가능하나, 이 경우 영상내의 임상적으로 중요한 경계(edge)에 대한 정보가 손실되기 쉽다. 한편, 경계보존의 기능이 있는 nonconvex [10,11] 형태의 prior를 사용할 경우 식 (14)의 전체 에너지를 최소화하는 작업이 용이하지 않다. 즉, nonconvex 형태의 함수는 다수의 극값을 포함하므로 단순한 미분으로 최소값을 찾을 수 없다. 이 경우 simulated annealing[9] 또는 deterministic annealing[10]등을 통해 부분적인 극값이 아닌 전체함수의 최소값에 도달 할 수 있는 별도의 알고리즘이 필요하다. 최근에, 이러한 단점을 보완하기 위해 prior의 형태가 convex 이며 nonquadratic인 함수를 사용함으로써 경계보존기능 뿐 아니라 최소화의 용이성도 동시에 고려한 convex-nonquadratic [14] 형태의 prior에 관한 연구결과가 소개되고 있다.

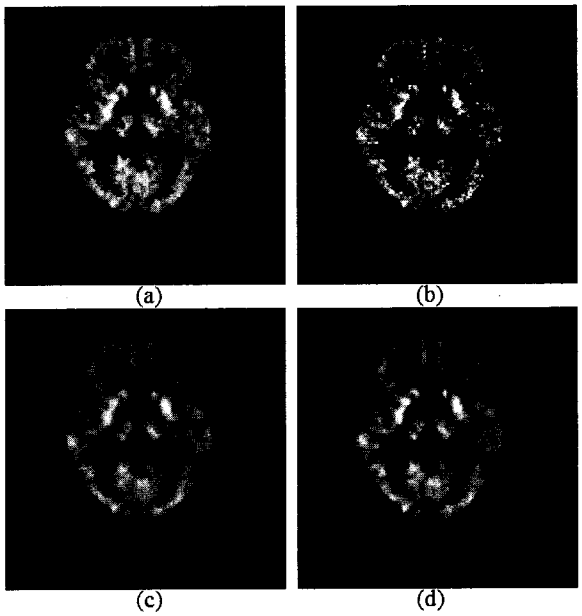


그림 6. PET 뇌영상재구성의 비교
(a)FBP (Hanning window 적용), (b)ML-EM (30 iterations), (c)Bayesian (quadratic prior 적용), (d)Bayesian (convex-nonquadratic prior 적용)

그림 6은 GE Advance PET scanner를 사용하여 뇌영상 재구성을 비교한 것이다. FBP 영상의 경우 Hanning window를 적용하였음에도 불구하고 방사선형태의 잡음이 영상전체에 걸쳐 강하게 나타날 뿐 아니라 미세부분의 명암대비가 통계학적방법에 비해 저조하다. ML-EM의 경우 30회의 반복연산을 한 결과 육안 상으로 가장 적절한 영상이 얻어졌으며 FBP의 결과에 비해 방사선형태의 잡음이 전혀 없고 명암대비도 개선되었다. 한편, Bayesian 방법 중 quadratic prior를 적용한 경우 Poisson 잡음이 현저히 감소되었으나 미세조직의 경계정보가 유실된 반면, convex-nonquadratic prior를 적용한 경우 Poisson 잡음을 감소됨은 물론 세부조직간의 경계도 양호하게 보존되었다.

6. 결 론

통계학적 방법을 사용한 영상재구성은 영상의 질적 향상 뿐 아니라, 정량적 차원에서 매우 우수한 영상을 제공하는 것으로 알려져 있다. 특히, Bayesian 방법은 backprojection 시의 단순 smoothing이 아닌 통계학적차원에서의 잡음감소 기능을 제공하므로 FBP에서 우려되는 화소값의 편향현상으로 인한 오류를 현저히 감소시킬 수 있다.

이러한 Bayesian 영상재구성법의 우수성에도 불구하고 현재 실제 임상에 FBP방법이 주로 사용되고 있는 원인은 Bayesian 방법의 경우 반복연산을 요하므로 FBP에 비해 최종영상을 얻기까지 장시간이 소요되고 알고리즘에 내재하는 평형상수 (λ)의 추정이 용이하지 않기 때문이다. 그러나, 최근에 이러한 문제점들을 해결하기 위한 다양한 개선된 Bayesian 알고리즘에 관한 연구가 활발히 진행되고 있으며 실제로 몇 개의 주요 ECT 제조업체에서는 이미 Bayesian 영상재구성법을 상용화하려는 시도가 이루어지고 있다. 따라서, 통계학적방법에 근거한 Bayesian 영상재구성법의 발전은 양질의 영상 제공과 함께 진단의 정확도를 높이고 진료의 질을 향상시킬 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] R.J. Jaszczak, "Tomographic Radiopharmaceutical Imaging", *Proceedings of the IEEE*, 76, pp. 1079-1094, Sep. 1998.

[2] J.M. Ollinger and J.A. Fessler, "Positron-Emission Tomography", *IEEE Signal Processing Magazine*, 14(1), pp. 43-55.

[3] R.J. Ott, M.A. Flower, J.W. Babich, and P.K. Marsden, "The Physics of Radioisotope Imaging", In S. Webb, eds., *The Physics of Medical Imaging*, Chap. 6, pp. 142-318, Institue of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1998.

[4] A. Rosenfeld and A.C. Kak, *Digital Picture Processing*, vol. 1, Academic Press, New York, NY, 1982.

[5] E. Serge, *An Introduction to Nuclear and Subnuclear Physics*, W.A. Benjamin Inc., New York, NY, 1965.

[6] H.H. Barrett and W. Swindell, *Radiological Imaging*, vol. 2, Academic Press, New York, NY, 1981.

[7] L. Shepp and Y. Vardi, "Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography", *IEEE Trans. Med. Imaging*, MI-1, pp. 113-122, 1982.

[8] H.M. Hudson and R.S. Larkin, "Accelerated Image Reconstruction Using Ordered Subsets of Projection Data", *IEEE Trans. Med. Imaging*, MI-13(4), 601-609, Dec. 1994.

[9] S. Geman and D. Geman, "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images", *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6(6), pp. 721-741, Nov. 1984.

[10] S.J. Lee, A. Rangarajan, G. Gindi, "Bayesian Image Reconstruction in SPECT Using Higher Order Mechanical Models as Priors", *IEEE Trans. Med. Imaging, MI-14(4)*, pp. 669-680, Dec. 1995.

[11] T. Hebert and R. Leahy, "A Generalized EM Algorithm for 3-D Bayesian Reconstruction for Poisson Data Using Gibbs Priors", *IEEE Trans. Med. Imaging*, MI-8(2), pp. 194-202, Jun. 1989.

[12] S.J. Lee, G.R. Gindi, I.G. Zubal and A. Rangarajan,"Using Ground-Truth Data to Design Priors in Bayesian SPECT Reconstruction", Y. Bizais, C. Barillot, and R.D. Paola, eds., *Information Processing in Medical Imaging,* Kluwer Academic Publishers, 1995.

[13] S.J. Lee, I.T. Hsiao, G.R. Gindi, "The Thin Plate as a Regularizer in Bayesian SPECT Reconstruction", IEEE Trans. Nuclear Science, 44(3), pp. 1381-1387, Jun. 1997.

[14] S.J. Lee, Y. Choi, and G. Gindi, "Validation of New Gibbs Priors for Bayesian Tomographic Reconstruction Using Physically Acquired Data", In *Proc. IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference*, vol. 3, pp.1589-1593, Nov. 1998.

저 자 소 개

이수진(李秀鎭)

1960년 9월 11일생. 1984년 서강대 전자공학과 졸업. 1986년 동 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1995년 뉴욕주립대 대학원 전기공학과 졸업(공박). 1985년-1991년 금성통신(주) 연구소 선임연구원. 1995년-1996년 뉴욕주립대 의료영상처리 연구소 박사후 연구원. 1996년-1997년 KIST 선임연구원. 1997년 3월-현재 배재대 전자공학과 조교수.