

Torque Characteristics Analysis of Harmonic Side Drive Motor by Conformal Mapping

尹瑞珍* · 李殷雄** · 李東周***
 (Seo-Jin Yun* · Eun-Woong Lee** · Dong-Ju Lee***)

Abstract - In order to design and predict the performance of the harmonic side drive motor, it is necessary to analyze the torque generated by the structure. In this paper, an analytical model is proposed for design. Conformal mapping is used to model the capacitance and torque of the motor as a function of the rotor angular position with two-dimensional approximation. Then the result of conformal mapping analysis is verified with F.E.M result.

Key Words : harmonic side drive motor, dynamic eccentric motion, reduction gear ratio, conformal mapping, bilinear transform.

1. 서 론

최근 관심이 모아지고 있는 MEMS의 여러 분야 중 전동기 부분은 IC공정 기술을 적용한 정전형 전동기를 중심으로 연구되고 있다. 그 중 하모닉 모터(harmonic side drive motor)는 고정자-회전자의 편심 구조(eccentric structure)에 의해 감쇄 기어비(reduction gear ratio)가 존재하며 단위 체적당 발생 토크가 매우 커서, 실용화에 적합하기 때문에 많은 연구가 진행중 이다. 그러나, 근본적으로 회전자가 고정자 내경면을 구르는 동적 편심 운동을 하기 때문에, 이에 대한 특성을 정확히 해석하기 어렵다.

지금까지 이 하모닉 모터의 편심 구조에서 발생하는 토크 특성을 근사적으로 해석하는 연구가 있었다[1-3]. 본 연구에서는 하모닉 모터의 기본 구동 원리를 명확하게 정립하고, 등각사상(conformal mapping)을 이용하여 8개의 전극으로 이루어진 고정자와 회전자측에 절연층을 입힌 모델을 선정, 고정자-회전자간 각 변위에 의해 발생하는 토크를 정식화하고, 유한 요소법으로 정식화의 타당성을 검증하고자 한다.

2. 하모닉 모터의 구조 및 구동원리

2.1 하모닉 모터의 구동원리

그림 1은 하모닉 모터의 구동원리를 나타내고 있다. 그림 1(a)와 같이 고정자 측 전극 A를 여기시키면 정전력에 의해

서 회전자와 전극 A는 접촉하게 되고, 다음 순간, 그림 1(b)와 같이 전극 B를 여기시킬 경우 회전자가 전극 B에 접촉하게 되어 회전자도 반대 방향으로 매우 작은 각도를 자전하게 된다. 같은 방법으로 전극 C, 전극 D, ..., 전극 G, 전극 H를 순차적으로 여기시키면, 여기 전극에서 흡인력이 발생하여 회

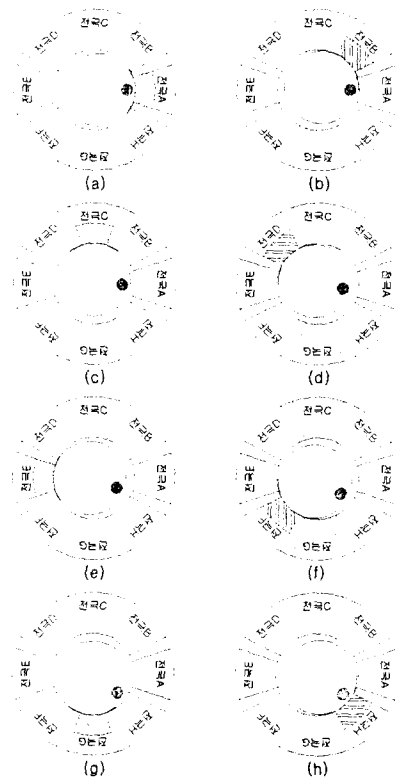


그림 1 하모닉 모터의 구동원리
 Fig. 1 Driving principle of harmonic side drive motor

* 準 會 員 : 忠南大 工大 電氣工學科 碩士課程
 ** 正 會 員 : 忠南大 工大 電氣工學科 教授
 *** 正 會 員 : 忠南大 工大 電氣工學科 博士課程
 接受日字 : 1998년 11월 9일
 最終完了 : 1999년 2월 2일

전자가 고정자 내경면을 여기 순서 방향의 반대 방향으로 구르는 운동을 하고, 이로 인해 회전자 중심은 여기 순서 방향과 같은 방향으로 고정자 중심을 회전하게 된다. 이때 구름 운동으로 회전자가 자전한 각은 회전운동으로 회전자가 공전 한 각보다 작은 각을 회전하게 된다.

이와 같이, 회전자가 고정자의 중심에 대해 회전하는 각도와 회전자의 중심에 대해 회전하는 각도사이에는 차이가 생겨 이로 인해 식 (1)과 같은 감쇄 기어비 n 이 성립하게 된다 [4].

$$n = \frac{R}{R-r} = \frac{\theta}{\psi} \quad (1)$$

여기서,

- θ : 고정자-회전자 접점과 여기 전극의 중심이 이루는 각
- ψ : 회전자가 회전한 각
- R: 고정자 반경
- r: 회전자 반경

따라서 본 연구의 하모닉 모터는 일반적인 동심 구조의 정전형 전동기와는 달리 회전자가 회전자의 중심축에 대해서 큰 토크를 가지고 매우 작은 각도를 회전할 수 있는 특징이 있다.

2.2 해석을 위한 모델 선정

실제의 모터는 3차원 분포를 형성하지만, 만약 모터의 축방향 길이가 고정자측 전극과 회전자 사이의 공극의 길이에 비해 충분히 크다면, 2차원 근사화를 사용할 수 있다. 그림 2는 해석을 위해 간소화한 하모닉 모터의 기하학적 형상이다.

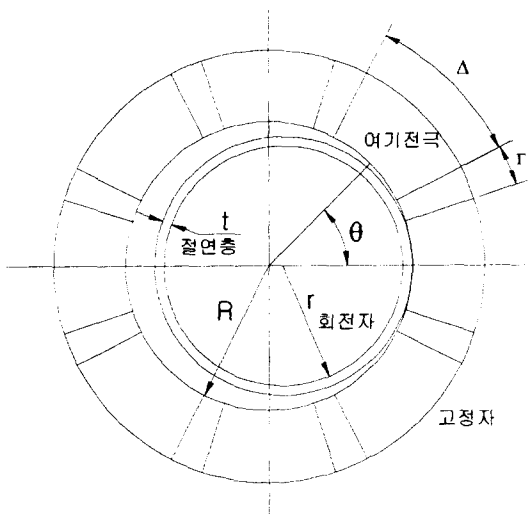


그림 2 해석을 위한 개략도
Fig. 2 Schematic for analysis

고정자를 기준으로 고정자 반경 R을 단위길이 1(unity)이라 할 때, 회전자 반경을 r, 고정자-회전자간 절연층의 두께는 t, 고정자 중심에 대해 고정자 측 전극의 너비 각은 Δ ,

전극간 공극의 너비 각은 Γ , 그리고 고정자-회전자 접점과 여기 전극의 중심이 이루는 각은 θ 이다. 구동 조건은 고정자측 여기 전극에 인가 전압은 V이고, 회전자와 여기전극을 제외한 나머지 고정자측 전극을 접지시켰다.

표 1 해석 모델의 설계 상수 값[1]
Table. 1 Design specification for analysis

R	r	Δ	Γ	t	공극의 유전율 ϵ_1	절연체의 유전율 ϵ_2
1	0.83	36°	9°	0.07	ϵ_0	5 ϵ_0

3. 하모닉모터의 토크 정식화

전극이 접지 상태일 때, 고정자 한 전극에 전위를 가해 모터가 여기된다고 하면, 쌍일차 변환(bilinear transform)은 편심인 회전자와 고정자를 회전자와 고정자가 동심인 기하학적 형상으로 바꾸고, 다시 대수 변환(logarithmic transform)은 동심인 기하학적 형상을 평행한 선분으로 변환하는데 사용되며, 이로부터 회전자-고정자간 정전용량을 쉽게 추정할 수 있다. 전극의 방사상 길이와 각너비의 비에 의해 방사상 방향으로 유한한 길이를 갖는 고정자 전극이 무한히 얇거나 두꺼운 길이를 갖는 전극으로 극사화된다. 고정자 전극의 위치에 따른 회전자-고정자 간 정전용량의 변화는 회전자에 미치는 토크를 유도하는데 사용된다.

3.1 등각사상에 의한 토크 정식화

3.1.1 w-평면으로의 사상

모터의 기하형을 복소평면 z에 투사한 것은 그림 3(a)와 같고, 식 (2)에 의한 쌍일차 변환에 의하여 z-평면에서 w-평면으로 사상되며[5], 이 사상에 의해 회전자 상 $|z+t+r-1| = r$ 은 식 (3)과 같은 반지름을 갖는 원 $|w| = R_0$ 로 사상된다.

$$w = \frac{z-a}{az-1} \quad (2)$$

여기서,

$$a = \frac{1+x_1x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1+x_2}$$

$$x_1 = 1-t, \quad x_2 = 1-t-2r$$

$$R_0 = \frac{1-x_1x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1-x_2} \quad (3)$$

여기서, $r < 1, -1 < x_2 < x_1 < 1$ 일 때 $a > 1, R_0 > 1$

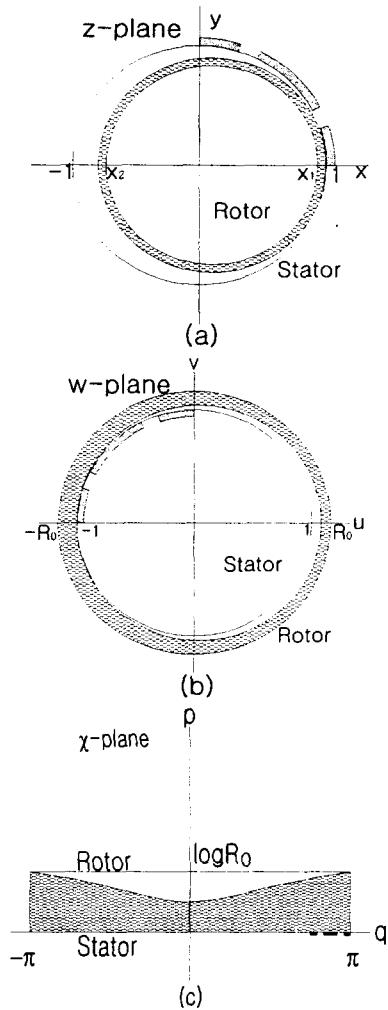


그림 3 (a) z-평면으로 투사, (b) w-평면으로 사상, (c) x-평면으로 사상
 Fig. 3 (a) Projection to z-plane, (b) Mapping to w-plane, (c) Mapping to x-plane

고정자 내경면의 상 $z = e^{j\theta}$ 는 w-평면 원점을 중심으로 $\phi_s(\theta)$ 만큼 회전하여 $w = e^{j\phi_s(\theta)}$ 로 사상된다.

여기서,

$$\phi_s(\theta) = \tan^{-1} \left(\frac{(a^2 - 1) \sin \theta}{2a - 1(a^2 + 1) \cos \theta} \right) \quad (4)$$

그러므로 고정자의 중심으로 이루는 각이 θ 이고, 각 너비가 Δ 인 전극은 w-평면에서 단위원 상의 호 $[\phi_s(\theta - \frac{\Delta}{2}), \phi_s(\theta + \frac{\Delta}{2})]$ 로 사상되며, 각 θ 에 대한 $\phi_s(\theta)$ 의 변화율은 식(5)와 같다.

$$\frac{\partial \phi_s(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1 - a^2}{a^2 - 2a \cos \theta + 1} \quad (5)$$

z-평면에서 좌표 원점 대해 ζ 만큼 이동한 중심을 갖고, 반지름 η 를 갖는 임의의 원 $z = \zeta + \eta e^{j\theta}$ 는 w-평면 상

에 좌표 원점을 중심으로 w_0 만큼 이동하고, 반지름이 ρ 인 원 $w = w_0 - \rho e^{j\theta}$ 로 사상된다.

$$\begin{aligned} \text{여기서, } w_0 &= \frac{(\zeta - a)(a\zeta - 1) - a\eta^2}{(\zeta - 1)^2 - a^2\eta^2} \\ \rho &= \frac{\eta(a^2 - 1)}{(\zeta - 1)^2 - a^2\eta^2} \end{aligned}$$

z-평면상의 유전체 경계면은 w-평면에서 $\zeta = 1 - r - t$, $\eta = r + t$ 인 원으로 나타난다.

3.1.2 x-평면으로 사상

변환 $x = \log(w)$ 에 의해 w-평면상의 회전자와 고정자는 x-평면상의 평행 선분으로 사상되며, 원 $w = w_0 - \rho e^{j\theta}$ 는 식 (6)으로 사상된다.

$$w_0 \cos q = \sqrt{\rho^2 - w_0^2} \sinh(p - c) \quad (6)$$

여기서 p, q : x의 실수와 허수부

식 (6)에서 c는 $\rho > w_0$ 인 경우에 식(7)과 같다.

$$c = \frac{1}{2} \log[\rho^2 - w_0^2] \quad (7)$$

회전자측 절연층의 경계면을 나타내는 원에 대해, ρ 는 $\rho > w_0$ 와 $1 < \rho < R_0$ 를 만족하므로, 변환을 위한 모터기하형상의 주요부분은 $\log R_0 \ll 1$ 질수록 $t \ll 1$ 이고, r은 단위길이 1에 가까워져, $p - c \ll 1$ 이므로 식 (6)에서 p를 식 (8)로 근사할 수 있다.

$$p \approx \frac{1}{2} \log[\rho^2 - w_0^2] + \frac{w_0}{\sqrt{\rho^2 - w_0^2}} \cos q \quad (8)$$

그러므로, 식 (8)에 의해 w-평면상의 절연층 경계면의 상은 식 (9)로 근사된다.

$$p_{ir} \approx p_{or} + p_{mr} \cos q \quad (9)$$

여기서,

$$p_{or} = \frac{1}{2} \log \left[\frac{(a + 1) - (x_1 + x_2)}{(a + 1) - a(x_1 + x_2)} \right]$$

$$p_{mr} = p_{or}$$

3.2 정전용량과 토크 계산

3.2.1 절연층의 유전율을 고려하지 않은 경우

x-평면에서 고정자와 회전자 전극사이의 정전용량은 식 (10)과 같이 근사화 될 수 있다.

$$C(\theta) = \frac{\phi_s(\theta + \frac{\Delta}{2}) - \phi_s(\theta - \frac{\Delta}{2})}{\log R_0} \quad (10)$$

식 (4)를 식 (10)에 대입하고 각 θ 에 대하여 미분하면 절연층의 유전율을 고려하지 않은 차원을 갖지 않는 표준화된 토오크 $\tau(\theta)$ 를 식 (11)과 같이 얻을 수 있다.

$$\tau(\theta) = \frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{(a^2-1)}{\log R_0} \times \left[\frac{4a \sin(\theta) \sin(\frac{A}{2})}{(1-2a \cos(\theta - \frac{A}{2}) + a^2)(1-2a \cos(\theta + \frac{A}{2}) + a^2)} \right] \quad (11)$$

식 (11)에 의해 회전자에서 발생하는 토오크 T_r 은 식(12)와 같다.

$$T_r(\theta) = \frac{\epsilon_1 L V^2}{2} n \tau(\theta) \quad (12)$$

여기서, L: 모터의 축방향 길이

V: 전극 여기 전압 ϵ_1 : 유전체의 유전율

$$n = \frac{(1-t)}{(1-t-r)}: \text{감쇄 기어비}$$

3.2.2 절연층의 유전율을 고려한 경우

실제로 모터는 회전자 외경면에 유전율이 ϵ_2 이고 두께가 t 인 유전체로 절연되어 있으므로, 실제 유효 공극(effective gap)의 길이를 보정해야 한다. χ -평면에서 절연체의 유전율을 고려한 고정자-회전자 사이의 표준화된 정전용량은 식 (13)과 같다.

$$C(\theta) = \int_{\phi_s(\theta + \frac{A}{2})}^{\phi_s(\theta - \frac{A}{2})} \frac{da}{\log R_0 - \alpha p_{ir}} \quad (13)$$

$$\text{여기서, } \alpha = 1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

그리고 식(5)를 이용하여 각 θ 에 대하여 미분하면 식 (14)과 같은 표준화 토오크를 구할 수 있다.

$$\tau_{ir}(\theta) = f_{ir}(\theta + \frac{A}{2}) - f_{ir}(\theta - \frac{A}{2}) \quad (14)$$

여기서,

$$f_{ir}(\phi) = \frac{(a^2-1)}{\lambda_r(a^2 - 2a \cos \phi + 1) + \gamma_r(2a - (a^2+1)\cos \phi)}$$

$$\lambda_r = (1-a) \log R_0 - \alpha p_{or}$$

$$\gamma_r = \alpha p_{mr}$$

따라서, 회전자에서 발생하는 토오크는 식 (15)와 같다.

$$T_r(\theta) = \frac{\epsilon_1 L V^2}{2} n \tau_{ir}(\theta) \quad (15)$$

그림 4는 절연층의 유전율을 고려하지 않은 표준화 토오크 식 (11)과 절연층의 유전율을 고려한 표준화 토오크식 (14)에 의한 토오크 특성 곡선이다.

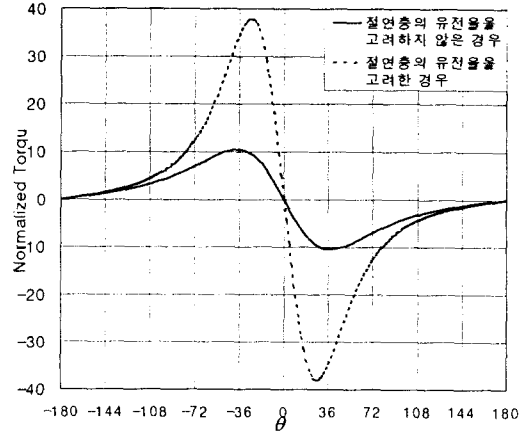


그림 4 절연층의 유전율을 고려하지 않은 경우와 고려한 경우의 표준화 토오크 곡선

Fig. 4 Normalized torque curves, when permittivity of insulating layer is ignored and considered.

4. 유한 요소 해석

등각사상으로 정식화한 토오크의 타당성 검토를 위해 표 1의 모델을 유한 요소법으로 해석하였다. 라플라스 방정식으로부터 해석을 위한 영역별 경계의 지배 방정식은 식 (16), (17), (18)과 같고, 그림 5에 도시하였으며[6], 지배 방정식 (16)을 유한 요소법에 의해 정식화한 전체 요소 계수 행렬은 식 (19)와 같다. 유한요소법에 의한 표준화 정전용량은 식(20)이고, 가상 변위 원리에 의한 토오크는 식 (21)과 같다.

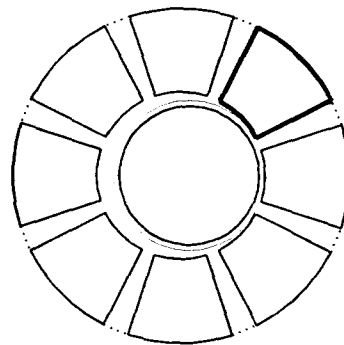


그림 5 유한 요소 해석을 위한 경계조건
Fig. 5 Boundary conditions for the F.E.M

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = 0 \text{ (공극부분)} \quad (16)$$

$$v = 0 \text{ (--- 영역)} \quad (17-a)$$

$$v = V \text{ (— 영역)} \quad (17-b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ (..... 영역)} \quad (18)$$

$$[V_i][C_i] = 0 \quad (19)$$

$$\frac{C}{\epsilon_0} = \int \frac{E^2}{V^2} ds \quad (20)$$

$$T(\theta) = \frac{1}{2} V^2 \frac{\Delta C(\theta)}{\Delta \theta} \quad (21)$$

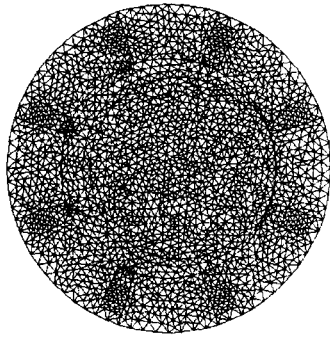


그림 6 유한 요소 해석 모델의 요소 분할 (결점: 2129, 요소: 4179)
Fig. 6 Meshes of the F.E.M model (nodes:2129, elements:4179)

θ 변화에 따른 유한 요소 해석을 시행하여 대표적인 θ 위치에 대한 등전위선 분포를 그림 7에 나타내었으며, 그림 8은 $\theta=45^\circ$ 일 때 해석 모델의 등전위선 분포를 확대한 것이다. 회전자와 여기 전극 사이의 공극에 강한 전계가 형성되며, 중심 형상을 갖는 자성체를 이용한 모터와 달리 여기전극과 회전자 사이에 매우 작은 공극을 이루면서도 포화영역이 발생하지 않으므로 여기 전극 모서리 끝 부분에서 전계가 공극의 전계에 비해 상대적으로 매우 강하게 형성된다.

유한 요소 해석 결과를 표준화하여 그 결과를 식 (14)에 의해 얻은 결과와 동시에 그림 9에 도시하였다. 유한요소 해석과 등각사상에 의한 해석으로부터 얻은 토크 특성 곡선은 거의 일치하며, 두 해석 결과는 $\theta=45^\circ$ 에서 최대 4.9%의 오차가 존재하였으나 등각사상에 의한 해석은 충분한 정밀도를 갖추었다.

5. 모터 설계 상수 변화에 따른 토크 특성 해석

그림 10은 표 1의 기본 모델에서 t 를 0.02 간격으로 변화시켰을 때 t 변화에 따른 각 모델의 표준화 토크 곡선이다. t 가 증가하면 최대 토크 구간이 좁아 지면서 토크가 급격히 증가하고, t 가 감소하면 토크의 변화율이 완만해 지면서 크기가 감소함을 보인다. 이는 공극이 작아지게 되면 절연층에 형성되는 전계는 강해지지만, 절연층을 제외한 회전자의 주요 부분이 여기 전극을 선회할 때 강한 전계가 형성되는 전극 모서리와 모서리 끝 부근을 선회하게 되는 길이가 짧아져 토크의 급격한 변화를 가져오게 된다.

그림 11은 표 1의 기본 모델에서 \angle 를 3° 간격으로 변화시켜 극호비를 변화시켰을 때 극호비의 변화에 따른 각 모델의 표준화 토크 곡선이다. \angle 가 증가하면 여기 전극의 길이가 길어져 전계가 형성되는 길이 역시 길어지며, 토크의 크기가 선형적으로 변화함을 보인다.

6. 결 론

본 연구에서는 하모닉 모터의 기하학적 형태에 따른 정전 용량과 발생 토크를 등각사상법을 이용하여 해석적으로 구

하였다. 이를 유한요소해석을 통해 타당성을 검증하였으며 등각사상법에 의한 해석은 충분한 정밀도를 갖음을 확인하였다. 또한 유한 요소 해석을 통한 해석결과를 토대로 등각사상을 이용한 해석 방법으로 모터의 설계상수인 t 와 극호비의 변화가 토크 특성에 미치는 영향을 고찰하였다. 등각사상을 이용한 해석은 이상적으로 간소화된 기하형상에 적용하여, 모터 설계 상수를 구하는 데 편리하며, 유한 요소 해석으로 등각사상법에 의한 해석의 타당성 검증과 함께 실제 하모닉 모터 특성을 해석하는 데 사용하면 될 것이다.

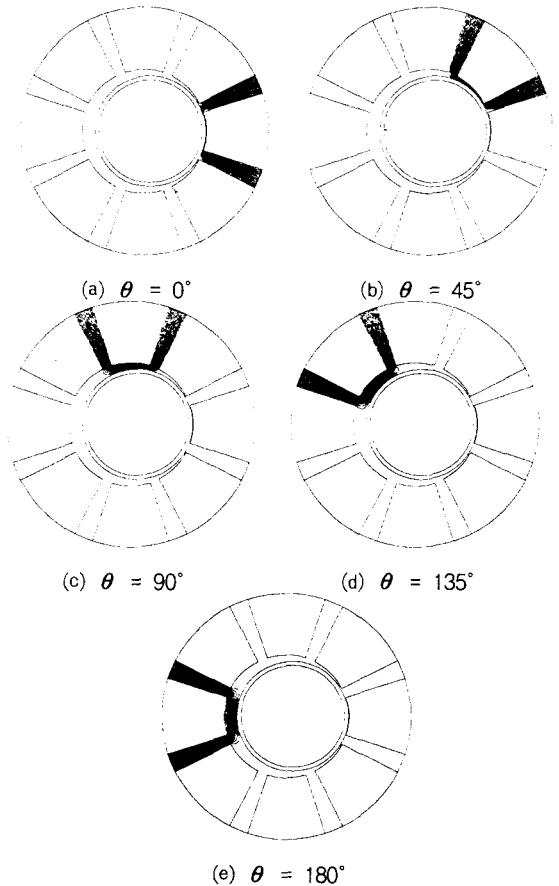


그림 7 θ 변화에 따른 등전위선 분포
Fig. 7 Distribution of equipotential line, depending on variation of θ

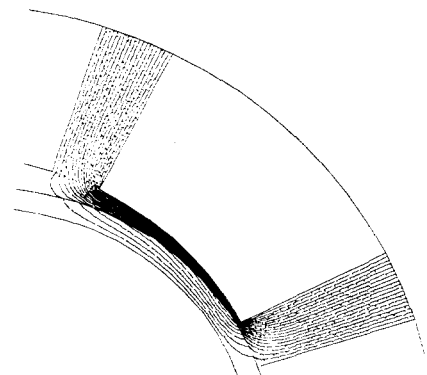


그림 8 하모닉 모터의 등전위선 분포
Fig. 8 Distribution of harmonic side drive motor equipotential line

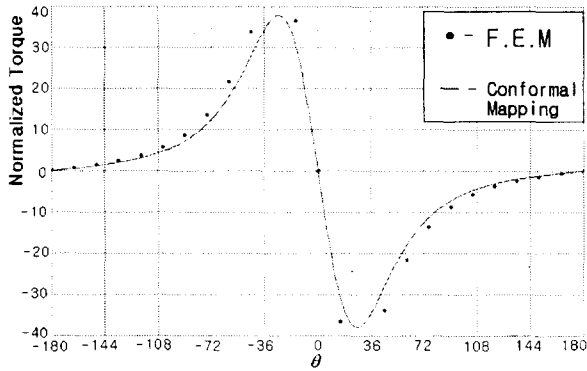


그림 9 등각사상 해석과 유한요소법을 이용한 토크 해석 결과 비교
 Fig. 9 Comparison of torque analysis results by conformal mapping and F.E.M

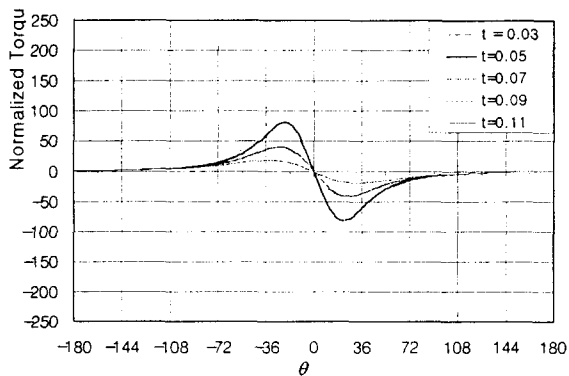


그림 10 t 변화에 따른 표준화 토크 곡선
 Fig. 10 Normalized torque curves, depending on variation of t

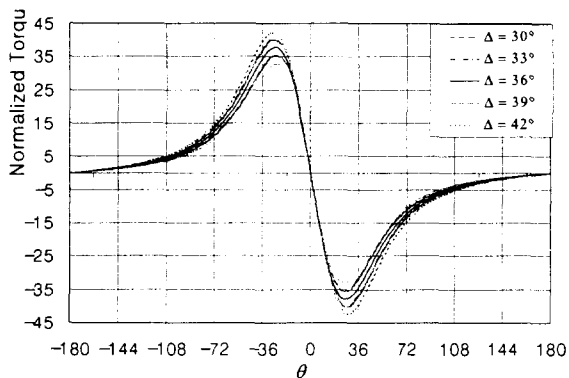


그림 11 각호비 변화에 따른 표준화 토크 곡선
 Fig. 11 Normalized torque curves, depending on variation of Δ and l ratio

[참고 문헌]

[1] S. C. Jacobsen et, "A Design Overview of an Eccentric - motion Electrostatic Micro- actuator(the Wobble Motor)", Sensors and Actuator, 20, 1989, pp. 1-16
 [2] S. C. Jacobsen et, "The wobble motor: An Electrostatic, Planetary-Armature, Microractuator", Proc. IEEE MEMS Workshop, Salt Lake City, Utah, Feb. 1989, pp. 17-24

[3] W. Trimmer and R. Jebens, "An Operational Harmonic Electrostatic Motor", Proc. IEEE MEMS Workshop, Salt Lake City, Utah, Feb. 1989, pp. 13-16
 [4] W. Trimmer and R. Jebens, "Harmonic Electrostatic Motors", Sensors and Actuators, 20, 1989, pp. 17-24
 [5] Ruel V. Churchill and James Ward Brown, Complex Variables and Applications, McGraw-Hill Book Company, New York, 1984
 [6] S. Wiak et "3D Computer Aided Analysis of the 'Berkeley' Electrostatic Micromotor", Tran. Magnetics Vol. 31. May. 1995, pp.2108-2111

저 자 소 개



윤 서 진(尹瑞珍)

1974년 11월 1일 생, 1997년 충남대학교 전기공학교육과 졸업, 1997년~현재 동대학교 대학원 전기공학과 석사과정, 1997년 9월~현재 울산공업고등학교 정보통신과 교사



이 은 응(李殷雄)

1944년 8월 14일 생, 1971년 한양대 공대 전기공학과 졸, 1974년 동 대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사), 1983년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박), 1982~1983년, 1985~1986년 캐나다 McGill 대학 방문교수, 1984~1985년 대한전기학회 대전 지부장, 1987년~현재 대한전기학회 평의원, 1989~현재 대한전기학회 편집위원(89~90), 학술이사(91~92), 편집이사(93~94), 편집위원장(95), 감사(96), 부회장(97~현재), 1995년 대한전기학회 전기기기 연구회 간사장, 1995~1995~1997년 충남대 공대 학장, 산업대학원장(96~97), 현재 충남대 전기공학과 교수, 대한전기학회 부회장.



이 동 주(李東周)

1973년 7월 31일 생, 1996년 충남대 전기공학과 졸업, 1998년 동 대학교 대학원 전기공학과 졸업, 현재 동 대학원 박사과정, 주관심 분야 LPM의 구동 특성 해석 및 micro step 제어, 유도 전동기의 고조파 해석, 각종 Servo 모터의 제어 분야.