

A Study on the Second-order Iterative Learning Control Algorithm with Feedback

許 慶 茂*
(Kyung-Moo Huh)

Abstract - A second-order iterative learning control algorithm with feedback is proposed in this paper, in which a feedback term is added in the learning control scheme for the enhancement of convergence speed and robustness to disturbances or system parameter variations. The convergence proof of the proposed algorithm is given, and the sufficient condition for the convergence of the algorithm is provided. And it also includes the discussions about the convergence performance of the algorithm when the initial condition at the beginning of each iteration differs from the previous value of the initial condition. Simulation results show the validity and efficiency of the proposed algorithm.

Key Words : Iterative Learning Control, Feedback, Convergence Condition, Robustness, Disturbance, Initial Condition,

1. 서 론

복잡하면서도 빠른 동특성을 지닌 시스템에 대해 실시간 제어를 하기에는 기존의 적응제어 기법 등이 복잡하고 어려운 것으로 판단되는 경우가 많이 있어 왔는데, 이러한 불확실한 동적 시스템을 보다 단순하면서도 정밀하게 제어할 수 있는 방법으로서 학습 제어 방법이 많이 연구되고 있다. 이 방법은 반복적인 온라인 제어기법으로서 계산량이 적고 대상 시스템의 동특성에 대한 사전 정보가 많이 요구되지 않는 장점을 지니고 있다. 이러한 학습제어 방법을 이론적으로 체계화하고 구체화시킨 것은 Arimoto[1]에 의해 이루어졌다. 그 알고리즘의 형태는

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma \frac{d}{dt} e_k(t) \quad (1)$$

로서, 이때 $u_k(t)$ 는 k 번째 반복수행시의 제어 입력을 나타내고, $e_k(t)$ 는 $u_k(t)$ 에 대한 응답으로서의 실제 시스템출력 $y_k(t)$ 와 원하는 목표출력 $y_d(t)$ 와의 차이인 출력 오차를 나타내며 ($e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$), Γ 는 학습 제어 계수이다.(본 논문에서 $u_k(t)$, $e_k(t)$, $x_k(t)$, $y_k(t)$ 등의 표기는 모두 k 번째 반복시의 시간 t 일때의 값을 나타냄) 이와 같은 간단한 알고리즘을 불확실한 대상 시스템에 대해 계속 반복 적용시키면, 시스템 출력의 시간에 대한 미분치가 목표출력의 시간에 대한 미분치에 수렴한다는 것이 증명되었다. 이 학습제어 방식은 이후 여러가지 방법으로 보다 개선시키고 이론적으로

확장되어 가고 있다. Arimoto등은 [2],[3]에서 PID 형태의 반복 학습제어 알고리즘을 제안하였고, 또한 시간에 대한 미분기와 같은 비인과 연산을 피하기 위한 방법으로 Gu와 Loh는 [4]에서 디지털로 구현시 필요한 차등 연산을 사용하는 방법을 제안하였다. 그리고 Bondi, Casalino, Gambardella는 [5]에서 로봇 매니플레이터의 제어에 있어서 제어 입력을 매 반복시마다 개선시키는 데에 위치오차와 속도오차 그리고 가속도오차까지 사용하면서 각각의 학습제어 계수들을 페루프 궐 환이득과 같은 값으로 선택하는 방법을 제안하였다. 또한 Lee와 Bien은 [6]에서 이차원 시스템 이론에 기초한 반복 학습제어 알고리즘을 제안하였다. 한편 위에서 언급한 모든 알고리즘에 있어서는 제어입력 $u_{k+1}(t)$ 가 단지 k 번째 반복시의 정보량 ($u_k(t)$, $e_k(t)$)만을 사용하여 구해지고 있는 반면에, Huh와 Bien은 [7]에서 더 많은 과거 정보들을 사용하여 $u_{k+1}(t)$ 를 얻도록 함으로써 제어 성능의 향상을 이룰 수 있는 방법을 제안하였다. 한편 학습제어 시스템에서 '초기 조건의 오차 없음'이란 가정은 큰 제약 조건이지만, 로봇 운용에서 볼 수 있는 것처럼 만족시키는 경우도 있다. Lee 등 [9]은 초기 조건의 불일치에서 오는 어려움을 조사하였으며 이 조건이 완벽 추종의 필요 조건임을 밝혔다. Heinzinger 등 [10]은 초기 조건의 오차가 있는 경우의 학습제어의 강인성을 논하고 오차의 상한값을 유도한 바 있다.

그러나 이들 모두의 알고리즘은 제어입력 $u_{k+1}(t)$ 가 과거의 데이터에 의해서만 결정되므로 기본적으로 개루프형이다. 반복 학습제어 시스템이 외란에 강인하고 개루프 특성을 보완하기 위해서는 궐 환항이 반드시 있어야 한다. 본 논문에서는 학습제어의 수렴 성능을 향상시키고, 시스템 파라미터 변동이나 외란에 대한 시스템의 강인성을 더욱 증대시키며, 아울러 시스템을 더욱 안정화시키기 위한 방법으로서, 궐 환을

* 正 會 員 : 檀國大 工學部 副敎授 · 工博
接受日字 : 1998년 2월 14일
最終完了 : 1999년 4월 13일

갖는 2차 반복 학습제어 알고리즘을 제안한다. 그리고 선형 시변 시스템에 대하여 제안한 알고리즘에 의해 시스템출력이 목표출력에 수렴한다는 것을 증명해 보이며 수렴하기 위한 조건들을 제시한다. 제안된 알고리즘은 2차 반복 학습제어 방법을 근간으로 하여 여기에 제환 항을 추가로 갖는 형태의 학습제어 알고리즘으로서, 선형 시변 시스템에 대해 적용한 시뮬레이션을 통해, 기존의 알고리즘을 적용했을 때의 결과보다 수렴 성능과 외란에 대한 강인성이 훨씬 향상되었음을 확인할 수 있었다. 아울러 초기 조건의 오차가 있을 경우에 있어서도 제안된 알고리즘의 방법이 초기 조건 오차에 대한 강인성 면에서 좋은 성능을 나타내고 있음을 모의실험 결과를 통해 확인하였다.

본문에서 사용되는 벡터 노름(norm)과 매트릭스 노름은 (2)와 같이 정의되고, lambda 노름은 (3)과 같이 정의되는 노름이다.

$$f = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(r)}) \text{ 일 때 } \|f\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq r} |f^{(i)}|$$

$$G = (g^{(ij)}) \text{ 일 때 } \|G\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \sum_{j=1}^r |g^{(ij)}| \right\} \quad (2)$$

$$k: [0, T] \rightarrow R^n \text{ 일 때 } \|h(\cdot)\|_{\lambda} = \sup_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} \|h(t)\|_{\infty} \quad (3)$$

2. 제환을 갖는 2차 반복 학습제어 알고리즘

다음과 같은 선형 시변 연속 시스템(Linear Time-Varying Continuous System)을 대상으로 하자.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = \xi^0$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (4)$$

여기서 x 는 (nx1)의 상태 벡터이고 u 는 (px1)의 제어 벡터이며, y 는 (mx1)의 출력 벡터이다. 그리고 $A(t), B(t), C(t), D(t)$ 는 각기 적절한 디멘션을 갖는 행렬함수로서, 모두 미지의 파라미터를 포함하는 연속함수들이다.

우리가 성취하고자 하는 목표출력 경로를 $y_d(t), 0 \leq t \leq T$ 라 하고, 허용오차 범위를 $\epsilon^* > 0$ 이라 하자. 이 때 우리의 목적은 시스템 파라미터 $A(t), B(t), C(t), D(t)$ 의 값을 정확히 알지 못하는 상태에서, 선형 시변 연속 시스템 (4)의 출력 $y(t)$ 가 다음 식(5)과 같은 조건을 만족시키도록 하는 제어 입력 $u(t), 0 \leq t \leq T$ 를 구해내는 것이다.

$$E(y(t)) = \|y_d(t) - y(t)\| \leq \epsilon^*, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

여기서 시스템에 대한 동특성을 정확히 알지 못하는 상태이기 때문에, 우리가 생각하는 경로추적 문제는 간단히 해결되기 어렵다. 그래서 그것을 해결하기 위한 방법으로서 다음과 같은 제환을 갖는 2차 반복 학습제어 알고리즘을 제안한다.

$$u_{k+1}(t) = P_1 u_k(t) + P_2 u_{k-1}(t) + Q_1 e_k(t) + Q_2 e_{k-1}(t) + R e_{k+1}(t) \quad (6)$$

여기에서 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 이며, 위 알고리즘을 2차 반복 학습제어 알고리즘이라 부르는 이유는 시간 t 를 고정시켜 놓고 생각할 경우 반복횟수(iteration number) k 에 대하여 2

차 이산 방정식의 형태를 갖추고 있기 때문이다. 식 (6)의 제환을 갖는 2차 반복 학습제어 알고리즘의 구조는 <그림 1>과 같다.

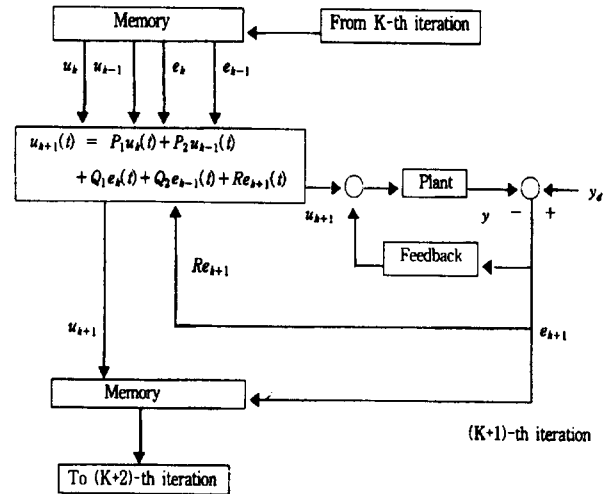


그림 1 제환을 갖는 2차 반복 학습제어의 구조
Fig. 1 Structure of second-order iterative learning control algorithm with feedback

이제 본 논문에서 제안한 알고리즘이 반복횟수 k 가 증가함에 따라 시스템 출력이 목표 출력에 수렴하도록 보장한다는 것을 정리 1에서 보인다.

(정리 1)

선형 시변 연속 시스템 (4)의 초기 상태를 $x(0) = \xi^0$ 로 알고 있다고 하고, 다음 두 개의 조건을 만족시키는 (pxp)의 행렬 P_1, P_2 와 (pxm)의 행렬 Q_1, Q_2, R 이 존재한다고 하자.

$$(A1) \quad P_1 + P_2 = I$$

$$(A2) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1} (P_1 - Q_1 D(t))\|_{\infty} + \sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1} (P_2 - Q_2 D(t))\|_{\infty} < 1$$

이 때 주어진 목표출력 $y_d(t), 0 \leq t \leq T$ 에 대해 (6)의 반복 학습제어 알고리즘을 적용하면, 초기 입력 $u_0(t), 0 \leq t \leq T$ 를 연속함수로 선택하고 매 반복시마다의 초기 상태를 ξ^0 로 같게 했을 경우, 반복횟수 k 가 증가함에 따라 모든 시간대 $t \in [0, T]$ 에서 출력 $y_k(t)$ 가 목표출력 $y_d(t)$ 에 수렴한다.

<증명>

$$u_d(t) - u_{k+1}(t) = P_1(u_d(t) - u_k(t)) + P_2(u_d(t) - u_{k-1}(t)) - Q_1[C(t)x_d(t) + D(t)u_d(t) - C(t)x_k(t) - D(t)u_k(t)] - Q_2[C(t)x_d(t) + D(t)u_d(t) - C(t)x_{k-1}(t) - D(t)u_{k-1}(t)] - R[C(t)x_d(t) + D(t)u_d(t) - C(t)x_k(t) - D(t)u_k(t)]$$

$$\begin{aligned}
 & -C(t)x_{k+1}(t) - D(t)u_{k+1}(t)] \\
 = & (P_1 - Q_1D(t))(u_d(t) - u_k(t)) \\
 & + (P_2 - Q_2D(t))(u_d(t) - u_{k-1}(t)) \\
 & - Q_1C(t)(x_d(t) - x_k(t)) - Q_2C(t)(x_d(t) - x_{k-1}(t)) \\
 & - RC(t)(x_d(t) - x_{k+1}(t)) - RD(t)(u_d(t) - u_{k+1}(t))
 \end{aligned}$$

로부터

$$\begin{aligned}
 & (I + RD(t))(u_d(t) - u_{k+1}(t)) \\
 = & (P_1 - Q_1D(t))(u_d(t) - u_k(t)) + (P_2 - Q_2D(t)) \\
 & (u_d(t) - u_{k-1}(t)) - Q_1C(t)(x_d(t) - x_k(t)) \\
 & - Q_2C(t)(x_d(t) - x_{k-1}(t)) - RC(t)(x_d(t) - x_{k+1}(t)) \quad (7)
 \end{aligned}$$

가 얻어지며, 양변을 $(I + RD(t))^{-1}$ 로 곱한 뒤 노음을 계산하면 다음과 같은 부등식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 & \|u_d(t) - u_{k+1}(t)\|_\infty \leq \\
 & \|(I + RD(t))^{-1}(P_1 - Q_1D(t))\|_\infty \|u_d(t) - u_k(t)\|_\infty \\
 & + \|(I + RD(t))^{-1}(P_2 - Q_2D(t))\|_\infty \|u_d(t) - u_{k-1}(t)\|_\infty \\
 & + \|(I + RD(t))^{-1}Q_1C(t)\|_\infty \|x_d(t) - x_k(t)\|_\infty \\
 & + \|(I + RD(t))^{-1}Q_2C(t)\|_\infty \|x_d(t) - x_{k-1}(t)\|_\infty \\
 & + \|(I + RD(t))^{-1}RC(t)\|_\infty \|x_d(t) - x_{k+1}(t)\|_\infty \\
 & \quad \forall t \in [0, T] \quad (8)
 \end{aligned}$$

가정에서 모든 k 에 대해 $x_k(0) = x_d(0)$ 이 성립하므로 모든 시간대 $0 \leq t \leq T$ 에서 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}
 \|x_d(t) - x_k(t)\|_\infty &= \left\| \int_0^t [(A(\tau)x_d(\tau) + B(\tau)u_d(\tau)) \right. \\
 & \quad \left. - (A(\tau)x_k(\tau) + B(\tau)u_k(\tau))] d\tau \right\|_\infty \\
 &\leq \int_0^t [a \|x_d(\tau) - x_k(\tau)\|_\infty \\
 & \quad + b \|u_d(\tau) - u_k(\tau)\|_\infty] d\tau \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$(a = \sup_{t \in [0, T]} \|A(t)\|_\infty, b = \sup_{t \in [0, T]} \|B(t)\|_\infty)$$

여기에 Bellman-Gronwall lemma[8] 을 적용하면

$$\|x_d(t) - x_k(t)\|_\infty \leq \int_0^t b \|u_d(\tau) - u_k(\tau)\|_\infty e^{a(t-\tau)} d\tau \quad \forall t \in [0, T] \quad (10)$$

의 부등식이 얻어지며, 따라서 식 (8)과 (10)로부터 다음 관계가 얻어진다.(여기서 식을 간단히 하기 위해 $u_d(t) - u_k(t)$ 를 $\delta u_k(t)$ 로 표기한다.)

$$\begin{aligned}
 & \|\delta u_{k+1}(t)\|_\infty \leq l_1 \|\delta u_k(t)\|_\infty + l_2 \|\delta u_{k-1}(t)\|_\infty + \\
 & m_1 \int_0^t \|\delta u_k(\tau)\|_\infty e^{a(t-\tau)} d\tau + m_2 \int_0^t \|\delta u_{k-1}(\tau)\|_\infty e^{a(t-\tau)} d\tau \\
 & + m_3 \int_0^t \|\delta u_{k+1}(\tau)\|_\infty e^{a(t-\tau)} d\tau \quad (11)
 \end{aligned}$$

여기에서

$$l_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1}(P_1 - Q_1D(t))\|_\infty,$$

$$l_2 = \sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1}(P_2 - Q_2D(t))\|_\infty$$

$$m_1 = \sup_{t \in [0, T]} b \|(I + RD(t))^{-1}Q_1C(t)\|_\infty,$$

$$m_2 = \sup_{t \in [0, T]} b \|(I + RD(t))^{-1}Q_2C(t)\|_\infty,$$

$$m_3 = \sup_{t \in [0, T]} b \|(I + RD(t))^{-1}RC(t)\|_\infty \quad \text{이다.}$$

식 (11)에 정함수(positive function) $e^{-\lambda t}$ 를 곱하면 다음 관계가 얻어지며

$$\begin{aligned}
 & e^{-\lambda t} \|\delta u_{k+1}(t)\|_\infty \leq \\
 & l_1 e^{-\lambda t} \|\delta u_k(t)\|_\infty + l_2 e^{-\lambda t} \|\delta u_{k-1}(t)\|_\infty \\
 & + m_1 \int_0^t e^{-\lambda \tau} \|\delta u_k(\tau)\|_\infty e^{(a-\lambda)(t-\tau)} d\tau \\
 & + m_2 \int_0^t e^{-\lambda \tau} \|\delta u_{k-1}(\tau)\|_\infty e^{(a-\lambda)(t-\tau)} d\tau \\
 & + m_3 \int_0^t e^{-\lambda \tau} \|\delta u_{k+1}(\tau)\|_\infty e^{(a-\lambda)(t-\tau)} d\tau \\
 & \leq l_1 \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda + l_2 \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda \\
 & + m_1 \int_0^t \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda e^{(a-\lambda)(t-\tau)} d\tau \\
 & + m_2 \int_0^t \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda e^{(a-\lambda)(t-\tau)} d\tau \\
 & + m_3 \int_0^t \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda e^{(a-\lambda)(t-\tau)} d\tau \\
 & \quad \forall t \in [0, T] \quad (12)
 \end{aligned}$$

이로부터

$$\begin{aligned}
 & \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda \leq \\
 & [l_1 + \frac{m_1}{\lambda - a}(1 - e^{-(a-\lambda)T})] \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda \\
 & + [l_2 + \frac{m_2}{\lambda - a}(1 - e^{-(a-\lambda)T})] \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda \\
 & + \frac{m_3}{\lambda - a}(1 - e^{-(a-\lambda)T}) \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda, \\
 & \quad \text{for } \lambda \neq a \quad (13)
 \end{aligned}$$

가 되고, 이를 정리하면 다음과 같이 되며

$$\begin{aligned}
 & [1 - \frac{m_3}{\lambda - a}(1 - e^{-(a-\lambda)T})] \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda \\
 & \leq [l_1 + \frac{m_1}{\lambda - a}(1 - e^{-(a-\lambda)T})] \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda \\
 & + [l_2 + \frac{m_2}{\lambda - a}(1 - e^{-(a-\lambda)T})] \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda
 \end{aligned}$$

λ 가 충분히 클 경우 다음 식으로 나타난다.

$$\begin{aligned}
 & \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda \\
 & \leq \frac{l_1 + \frac{m_1}{\lambda - a}(1 - e^{-(a-\lambda)T})}{1 - \frac{m_3}{\lambda - a}(1 - e^{-(a-\lambda)T})} \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{l_2 + \frac{m_2}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T})}{1 - \frac{m_3}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T})} \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda \quad (14)$$

여기에서 다음 관계가 성립한다고 가정할 때

$$\frac{l_1 + \frac{m_1}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T})}{1 - \frac{m_3}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T})} + \frac{l_2 + \frac{m_2}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T})}{1 - \frac{m_3}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T})} < 1$$

k 가 증가함에 따라 $\|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda$ 가 0으로 수렴한다는 것을 보이는 것은 그리 어렵지 않다. 즉

$$w_{k+2} \leq r w_{k+1} + s w_k \quad (r, s > 0)$$

과 같은 성질을 갖는 nonnegative sequence $\{w_k\}$,

$k=1, 2, 3, \dots$ 는 $r+s < 1$ 이면 항상 0으로 수렴한다는 사실로부터 쉽게 알 수 있다.

그런데 조건 (A2)로부터 $l_1 + l_2 < 1$ 이므로 $\lambda > 0$ 를 충분히 크게 잡음으로써 항상 다음 부등식 (15)가 성립할 수 있도록 할 수 있다.

$$\frac{l_1 + l_2 + \frac{m_1}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T}) + \frac{m_2}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T})}{1 - \frac{m_3}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T})} < 1 \quad (15)$$

따라서 k 가 커짐에 따라 $\|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda$ 는 0으로 수렴하게 된다. 한편 $\|\cdot\|_\lambda$ 의 정의로부터

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\delta u_k(t)\| \leq e^{\lambda T} \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda$$

의 관계가 성립하므로 결국 k 가 커짐에 따라

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\delta u_k(t)\| \text{가 } 0 \text{으로 수렴하게 된다. 이는 곧 } k \rightarrow \infty \text{ 일때 } u_k(t) \rightarrow u_d(t), \quad \forall t \in [0, T] \quad (16)$$

을 의미하며, 더구나 이는 다시 식 (10)에 의해

$$k \rightarrow \infty \text{ 일때 } x_k(t) \rightarrow x_d(t), \quad \forall t \in [0, T] \quad (17)$$

이 성립함을 의미한다. 따라서 식 (4),(16),(17)로부터

$$k \rightarrow \infty \text{ 일때 } y_k(t) \rightarrow y_d(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

이 성립함을 알 수 있다. <증명끝>

3. 초기 조건 오차가 있는 경우에 대한 수렴성 분석

대부분의 실제 시스템에서는 매 iteration시마다 초기 조건의 오차가 존재하기 쉽다. 이 절에서는 이와 같이 초기 조건의 오차가 있을 경우에 대하여 본 알고리즘의 수렴성을 분석하고 관찰한다.

(4)의 시스템에서 상태 벡터의 초기 조건에 오차가 있다고 가정하자. 즉 $x_d(0) \neq x_k(0)$ 라고 하면 식 (9)는 다음과 같이 되고,

$$\|x_d(t) - x_k(t)\|_\infty = \|x_d(0) - x_k(0) + \int_0^t [A(\tau)x_d(\tau)$$

$$+ B(\tau)u_d(\tau) - (A(\tau)x_k(\tau) + B(\tau)u_k(\tau))]d\tau\|_\infty \leq \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty + \int_0^t [a \|x_d(\tau) - x_k(\tau)\|_\infty + b \|u_d(\tau) - u_k(\tau)\|_\infty]d\tau \quad (18)$$

따라서 식 (10)은

$$\|x_d(t) - x_k(t)\|_\infty \leq \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty e^{at} + \int_0^t b \|u_d(\tau) - u_k(\tau)\|_\infty e^{a(t-\tau)}d\tau \quad (19)$$

로 되며, 이에 따라 식 (12)는 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|\delta u_{k+1}(t)\|_\infty &\leq l_1 e^{-\lambda t} \|\delta u_k(t)\|_\infty + l_2 e^{-\lambda t} \|\delta u_{k-1}(t)\|_\infty \\ &+ \frac{m_1}{b} \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty e^{(a-\lambda)t} \\ &+ m_1 \int_0^t e^{-\lambda \tau} \|\delta u_k(\tau)\|_\infty e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &+ \frac{m_2}{b} \|x_d(0) - x_{k-1}(0)\|_\infty e^{(a-\lambda)t} \\ &+ m_2 \int_0^t e^{-\lambda \tau} \|\delta u_{k-1}(\tau)\|_\infty e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &+ \frac{m_3}{b} \|x_d(0) - x_{k+1}(0)\|_\infty e^{(a-\lambda)t} \\ &+ m_3 \int_0^t e^{-\lambda \tau} \|\delta u_{k+1}(\tau)\|_\infty e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &\leq l_1 \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda + l_2 \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda \\ &+ m_1 \int_0^t \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &+ m_2 \int_0^t \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &+ m_3 \int_0^t \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &+ [\frac{m_1}{b} \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty + \frac{m_2}{b} \|x_d(0) - x_{k-1}(0)\|_\infty \\ &+ \frac{m_3}{b} \|x_d(0) - x_{k+1}(0)\|_\infty] e^{(a-\lambda)t}, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

이로부터 식 (13)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda &\leq [l_1 + \frac{m_1}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T})] \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda \\ &+ [l_2 + \frac{m_2}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T})] \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda \\ &+ \frac{m_3}{\lambda-a}(1-e^{(a-\lambda)T}) \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda + \epsilon, \end{aligned} \quad \text{for } \lambda \neq a \quad (20)$$

여기에서

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{m_1}{b} \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty \\ &+ \frac{m_2}{b} \|x_d(0) - x_{k-1}(0)\|_\infty + \frac{m_3}{b} \|x_d(0) - x_{k+1}(0)\|_\infty \\ &= \frac{m_1}{b} \epsilon_k + \frac{m_2}{b} \epsilon_{k-1} + \frac{m_3}{b} \epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

이다. ($\epsilon_k = \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty$ 로 표기) 결국 이 ϵ 항이 추가됨으로 인해, λ 를 충분히 크게 잡을 때 다음 관계가 성립하게 되며,

$$\| \delta u_{k+1}(\cdot) \|_\lambda \leq l_1 \| \delta u_k(\cdot) \|_\lambda + l_2 \| \delta u_{k-1}(\cdot) \|_\lambda + \epsilon$$

조건에서 $l_1 + l_2 < 1$ 이므로, $\| \delta u_k(\cdot) \|_\lambda$ 는

$$\left(\frac{1}{1 - l_1 - l_2} \right) \epsilon \text{ 내로 수렴하게 된다. 즉}$$

$\limsup_{k \rightarrow \infty} \| \delta u_k(\cdot) \|_\lambda \leq \left(\frac{1}{1 - l_1 - l_2} \right) \epsilon$ 로서, 이는 λ -norm에 있어서 $u_k(t)$ 가 $u_d(t)$ 에 반경 $\left(\frac{1}{1 - l_1 - l_2} \right) \epsilon$ 범위내로 수렴함을 나타낸다. 또한 식 (19)를 이용하여 앞서와 같이 계산하면,

$$\| \delta x_k(\cdot) \|_\lambda \leq \| x_d(0) - x_k(0) \|_\infty + \int_0^t e^{(a-\lambda)(t-\tau)} \| \delta u_k(\cdot) \|_\lambda d\tau \leq \epsilon_k + \frac{1}{\lambda - a} (1 - e^{(a-\lambda)T}) \| \delta u_k(\cdot) \|_\lambda$$

가 되며, 따라서

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \| \delta x_k(\cdot) \|_\lambda \leq \epsilon_k + \frac{1}{\lambda - a} (1 - e^{(a-\lambda)T}) \left(\frac{1}{1 - l_1 - l_2} \right) \epsilon$$

가 된다. 이들 결과와 식 (4)로부터 $y_k(t)$ 가 $y_d(t)$ 에 일정 반경내로 수렴함을 쉽게 알 수 있다.

위의 결과를 관찰해 보면 초기 조건 오차가 있는 경우에 있어서, 초기조건 오차의 크기가 작을수록 목표치에의 수렴반경이 작아지게 되어 더 정확한 제어가 된다는 것을 알 수 있다.

4. 시뮬레이션 결과 및 고찰

본 논문에서 제안한 제환을 갖는 2차 반복 학습 제어 알고리즘과 기존의 제환이 없는 반복 학습 제어 알고리즘과의 성능 비교를 위해, [1,7]에서 사용되었던 다음의 선형 시변 시스템에 대하여 각 알고리즘을 적용시켜 그 결과를 비교해보기로 한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2+5t) & -(3+2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (21-a)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (21-b)$$

$$y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (21-c)$$

이때 목표출력 $y_d(t)$ 는

$$y_d(t) = 12t^2(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (22)$$

라 하자.

그런데 이 시스템에서는 출력식 (21-c)에 직달항 $D(t)$ 와 관련된 항목이 없지만, 출력식 (21-c)와 목표출력 (22)를 다음 식 (23),(24)와 같이 변형함으로써, 정리 1이 바로 적용될 수 있는 등가의 출력식 및 목표출력을 얻을 수 있다.

$$\hat{y}(t) = \dot{y}(t) = \hat{C}(t)x(t) + \hat{D}(t)u(t) \quad (23)$$

$$\text{(이때 } \hat{C}(t) = CA(t) = [-(2+5t) \quad -(3+2t)],$$

$$\hat{D}(t) = CB(t) = 1)$$

$$\hat{y}_d(t) = \dot{y}_d(t) = 12t(2-3t) \quad (24)$$

즉, $u(0) = 0$ 인 조건하에서 식(23)의 출력 $\hat{y}(t)$ 를 식(24)의 목표출력 $\hat{y}_d(t)$ 로 가게 하는 그 어떤 제어 방식도, 식(21)의 출력 $y(t)$ 를 식(22)의 목표출력 $y_d(t)$ 로 가도록 한다는 점에서 등가(equivalent)하다고 하는 것이다.

이제 위 시스템의 출력의 경로오차를 모든 시간대에서 $\epsilon^* = 0.1$ 내에 들도록 추적 성능을 보장하기 위해 제환이 없는 2차 반복 학습제어와 제환을 갖는 2차 반복 학습제어의 두가지 알고리즘을 설계하여 원하는 성능이 나올때까지 계속 반복적으로 적용한다. 여기서 필요한 초기치들은 다음과 같이 한다. $u_{-1}(t) = 0, u_0(t) = 0, e_{-1}(t) = 0, 0 \leq t \leq 1$

제어 대상 시스템의 불확실성과 관련하여, 식(23)의 \hat{D} 에 대해 전혀 아무것도 모를 경우 알고리즘 (6)에서의 제어 파라미터를 적절히 선택하기란 어려울지도 모른다. 본 적용에 있어서는 \hat{D} 가 정(positive)의 값을 갖는 것으로 알고 있다고 가정하고, 그 값을 실제 값($\hat{D}(t) = 1$)의 절반인 0.5 정도로 추정하였다고 하자. 먼저 제환이 없는 2차 반복 학습제어의 경우에 대해, 추정된 \hat{D} 값에 대해 가장 빠른 수렴속도를 갖도록 학습제어 계수를 선택하게 되면 $P_1 = 0.8, P_2 = 0.2, Q_1 = 1.6, Q_2 = 0.4$ 가 선택되게 되며, 이때 k 번째 수행시의 출력 $y_k(t)$ 는 그림 2와 같고 이로부터

목표 경로와 ϵ^* 이내의 경로오차를 유지하도록 하는데 7 번의 수행이 필요하다는 것을 알 수 있다. 그러나 제환을 갖는 2차 반복 학습제어를 적용한 경우에는 그림 3의 결과와 같이 목표 경로와 ϵ^* 이내의 경로오차를 유지하도록 하는데 단지 4번의 수행으로써 충분하다는 결과를 얻었다. 이 때 각 제어 계수들은 $P_1 = 1.12, P_2 = -0.12, Q_1 = 1.4, Q_2 = -0.15, R = 0.013$ 으로 선택되었다. 이는 제환이 없는 2차 학습제어인 경우의 7번에 비교하면 한결 더 좋아진 성능임을 알 수 있다. 그림 4와 그림 5는 학습제어가 충분히 이루어져 목표 경로에서 동작하고 있는 도중에, $t = 0.3$ 에서 순간적으로 0.02초 동안 속도가 20만큼 감소될 정도의 외란이 가해졌을 때의 그 이후의 출력 결과 들이다. 그림 4는 제환이 없는 2차 반복 학습 제어($P_1 = 0.8, P_2 = 0.2, Q_1 = 1.6, Q_2 = 0.4$)의 경우로서 7번의 수행뒤에 다시 ϵ^* 이내의 경로 오차를 유지할 수 있었음을 알 수 있고, 그림 5는 제환을 갖는 2차 반복 학습 제어($P_1 = 1.12, P_2 = -0.12, Q_1 = 1.4,$

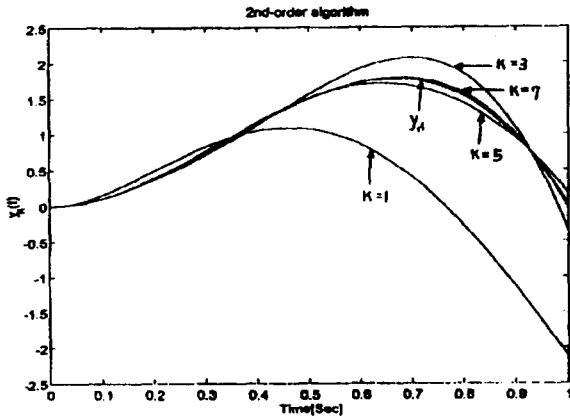


그림 2 제한이 없는 2차 반복 학습제어의 출력 추적 성능
 Fig. 2 Output tracking performance by second-order iterative learning control

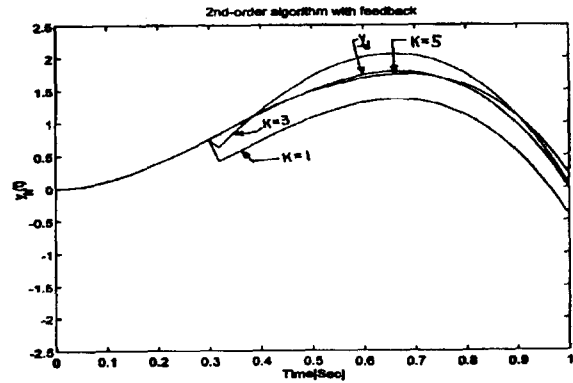


그림 5 외란으로부터의 복구특성(제한을 갖는 2차 반복 학습제어)
 Fig. 5 Recovery from disturbance (Second-order iterative learning control with feedback)

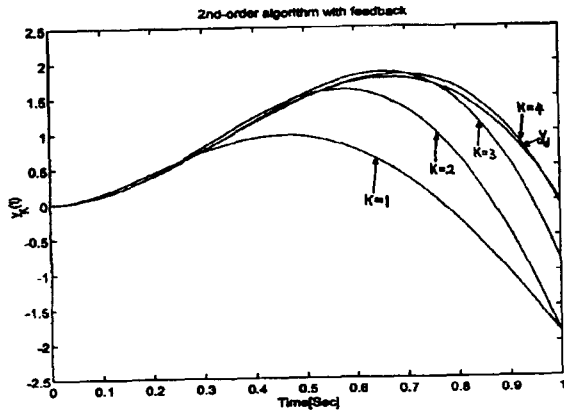


그림 3 제한을 갖는 2차 반복 학습제어의 출력 추적 성능
 Fig. 3 Output tracking performance by second-order iterative learning control with feedback

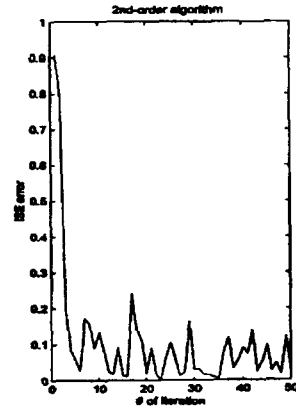


그림 6 초기 조건 오차가 있을 경우의 출력 오차 (제한이 없는 2차 반복 학습제어 적용시)
 Fig. 6 Output error when initial error exist (Second-order iterative learning control)

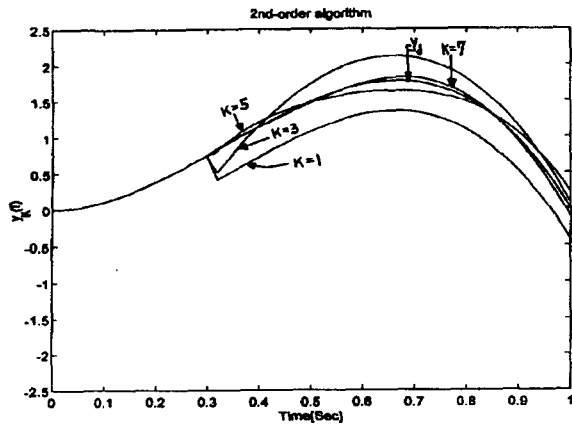


그림 4 외란으로부터의 복구 특성 (2차 반복 학습제어)
 Fig. 4 Recovery from disturbance (Second-order iterative learning control)

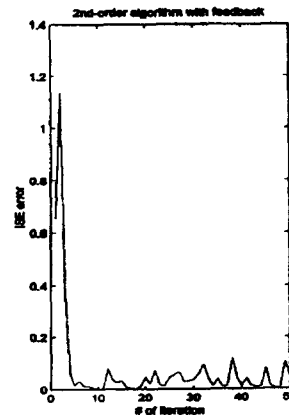


그림 7 초기 조건 오차가 있을 경우의 출력 오차 (제한을 갖는 2차 반복 학습제어 적용시)
 Fig. 7 Output error when initial error exist (Second-order iterative learning control with feedback)

$Q_2 = -0.15, R = 0.13$ 의 경우로서 5번의 수행뒤에 다시 ϵ^* 이내의 경로오차를 유지할 수 있었음을 알 수 있다. 이 결과로부터 학습제어에 제환을 갖도록 함으로써 외란이 가해졌을 때 빠른 복구 능력과 강인성의 향상을 이룰 수 있다는 것을 확인할 수 있다. 그림 6과 그림 7은 앞에서와 같은 시스템에 대해 초기 조건의 오차가 있을 경우의 결과로서, 각 반복시마다 초기 조건에 약간의 무작위 오차가 있을 경우의 출력 오차의 ISE(Integrated Square Error) 값을 보인다. 이 때 초기 조건의 오차는 $0.002 * random(0, 1)$ 의 크기로 하였고, 반복횟수는 50까지로 하였다. 그림 6은 제환이 없는 2차 반복 학습제어를 적용했을 때의 결과이고 그림 7은 제환을 갖는 2차 반복 학습제어를 적용했을 때의 결과로서, 제어 계수들은 앞서의 값들과 같도록 하였다. 이 결과들에서 보듯이 제환을 갖는 2차 반복 학습제어의 경우가 제환이 없는 경우보다 초기 조건 오차에 대한 강인성 면에서도 훨씬 더 좋은 성능을 나타냄을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 선형 시변 시스템의 정밀 제어를 위해 학습 제어 기법을 적용하는데 있어서, 그 수렴 성능을 향상시키고 시스템 파라미터 변동이나 외란 및 초기 조건 오차에 대한 강인성을 증대시키기 위해 2차 반복 학습제어 방법을 근간으로 하여 여기에 제환 항을 추가로 갖는 형태의 학습제어 알고리즘을 제안하였고, 선형 시변 시스템에 대하여 제안한 알고리즘의 수렴성의 증명 및 수렴 조건을 제시하였다. 또한 초기 조건의 오차가 있을 경우에 대해서도 제안한 알고리즘의 수렴성을 분석하고 관찰하였다. 그리고 선형 시변 시스템에 대해 적용한 시뮬레이션을 통하여, 기존의 알고리즘을 적용했을 때의 결과보다 수렴 성과 외란 및 초기 조건 오차에 대한 강인성이 훨씬 향상되었음을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] Arimoto, S., Kawamura, S., and Miyazaki, F., "Bettering Operation of Robots by Learning", Journal of Robotic Systems, Vol. 1, No. 2, pp. 123-140, 1984.
 [2] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Bettering Operation of Dynamic Systems by Learning: A New Control Theory for Servomechanism or Mechatronic Systems", Proc. of 23rd Conf. on Decision and Control, Lasvegas, pp. 1064-1069, Dec, 1984.
 [3] S. Arimoto, "Mathematical Theory of Learning with Applications to Robot Control", Proc. of 4th Yale Workshop on Application of Adaptive Systems, New Haven, Connecticut, pp. 379-388, May, 1985.
 [4] Gu, Y., and Loh, N. "Learning Control in Robotic Systems", Proc. IEEE International Symposium on Intelligent Control, Philadelphia, Pa. pp. 360-364, 1987.
 [5] Bondi, P., Casalino, G., and Gambardella, L., "On the

Iterative Learning Control Theory for Robotic manipulators", IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. 4, No. 1, pp. 14-22, 1988.

[6] Lee, J. W., and Bien, Z., "Learnig Controller Design Based on 2-D System Theory", IFAC Symposium on Distributed intelligence Systems, Arlington VA, USA, pp. 151-154, 1991.
 [7] Bien, Z., and Huh, K. M., "Higher-order Iterative Learning Control Algorithm", IEE Proceedings, Part. D, Vol. 136, No. 3, May, 1989.
 [8] Lakshmikantham, V., and Leela, S., Differential and Integral Inequalities - Vol. 1, Academic Press, pp. 37-41, 1969.
 [9] K. H. Lee and Z. Bien, "Initial Condition Problem of Learning Control", IEE Proc. Part D, Vol. 138, No. 6, pp. 525-528, 1991.
 [10] G. Heinzinger, D. Fenwick, B. Paden, and F. Miyazaki, "Stability of Learning Control with Disturbances and Uncertain Initial Conditions", IEEE Tr. on Automatic Control, Vol. 37, No. 1, pp. 110-114, 1992.

저 자 소 개



허 경 무(許慶茂)

1956년 9월 1일생. 1979년 서울대 전자공학과 졸업. 1981년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1981년-1985년 대우중공업 중앙연구소, 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학박사).

1989년-1993년 대우중공업 중앙연구소 책임연구원, 1993년-현재 단국대학교 공학부 부교수

Tel : (0417) 550-3548

E-mail : huhkm@anseo.dankook.ac.kr