

Analysis and Optimal Control of Linear Time-delay Systems via Fast Walsh Transform

韓 相 仁* · 李 明 珪** · 金 珍 泰*** · 安 斗 守§
 (Sang-In Han · Myung-Kyu Lee · Jin-Tae Kim · Doo-Soo Ahn)

Abstract - A Walsh function method is proposed in this report for the analysis and optimal control of linear time-delay systems, which is based on the Picard's iterative approximation and fast Walsh transformation. In this research, the following results are obtained: 1) The differential and integral equation can be solved by transforming into a simple algebraic equation as it was possible with the usual orthogonal function method: 2) General orthogonal function methods require usage of Walsh operational matrices for delay or advance and many calculations of inverse matrices, which are not necessary in this method. Thus, the control problems of linear time-delay systems can be solved much faster and readily.

Key Words : Walsh function, fast Walsh transform, linear time-delay system

1. 서 론

직교함수(orthogonal functions)를 이용하면 미분방정식으로 주어진 시스템의 정보를 간략화 된 행렬대수방정식으로부터 알 수 있게 되는 이점이 있다. 이러한 이유로 시스템해석 및 제어를 위해 월쉬(Walsh) 및 블럭펄스(block-pulse) 함수 등이 널리 이용되어 왔다[1-4].

기존의 직교함수 유한급수전개를 이용하는 선형시지연계의 제어방법에는 Pade 근사기법(Pade approximation)을 이용하여 지연항을 제거한 후 시지연이 없는 선형계의 형태로 표현하여 최적제어를 수행하였다. 그러나, Pade 근사기법을 이용한 방법에서는 근사화 오차의 발생과 시스템 차수가 커진다는 단점을 갖고 있다. 또한 embedding method를 이용한 방법에서는 지연항이나 선행항을 처리하기 위한 연산자를 정의하여 이용하여 왔다 [3]. 그러나 이러한 연산자를 이용한 선형시지연계의 해석 및 제어에서는 전개항수가 커질수록 크로네커곱(Kronecker product formula)에 의한 고차행렬의 계산 혹은 수많은 역행렬의 계산을 필요로 한다. 그 후 유한급수전개를 이용할 때의 단점을 보완하여 월쉬함수 단일항전개(STWS : single term Walsh series)를 인용하는 연구가 주를 이루었다[2-5]. 그러나, STWS 방법은 월쉬함수 단일항 즉, 유한급수전개시 제 1항의 월쉬함수만을 이용하는 방법으로 월쉬함수를 포함한 모든 직교함수의 제 1항은 같기 때문에 단일항만을 이용할 때는 이용하는 직교함수와 관계없이 방법 및 결과가 서로 동일하기 때문에 월쉬함수의 고유특성

을 살릴 수 없다[6].

본 연구에서는 embedding method에 월쉬함수의 고유특성을 유지할 수 있는 고속월쉬변환(fast Walsh transform)과 상태벡터의 반복적인 수정을 통하여 해를 구하는 Picard의 반복연산법 [7]을 채택하여 선형시지연계의 해석 및 최적제어방법을 보이고자 한다. 그리고, 월쉬함수의 특징을 이용함으로써 미적분방정식을 간략화 된 대수방정식으로 변환하여 처리 할 수 있도록 하였다. 고속월쉬변환과 Picard의 연산법을 이용함으로써 기존의 직교함수를 이용할 때 나타나는 수많은 역행렬의 계산을 필요로 하지 않으며, 지연항이나 선행항을 처리하기 위한 연산자를 사용하지 않고도 간단히 선형시지연계의 해석 및 최적제어를 수행할 수 있도록 하였다.

2. 고속월쉬변환(Fast Walsh Transform)

2.1. 월쉬함수 및 변환[9,10]

적분 가능한 임의의 $x(t)$ 함수는 구간[0, T]에서 월쉬함수로 다음과 같이 유한급수 전개될 수 있다.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{m-1} X_n \text{Wal}(n, t) \tag{2.1}$$

$\text{Wal}(n, t)$ 는 n번째 월쉬함수이며, 월쉬계수 X_n 은 n번째 월쉬함수의 계수로서 평균자승오차를 최소화하는 조건으로 다음과 같다.

$$X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \text{Wal}(n, t) dt \tag{2.2}$$

이를 월쉬변환이라 한다.

2.2. 고속월쉬변환[9,10]

* 正 會 員 : 韓國電力技術(株) 部長
 ** 正 會 員 : 慶星大 電氣電子·컴퓨터工學部 敎授·工博
 *** 準 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터工學部 碩士課程
 § 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터工學部 敎授·工博
 接受日字 : 1998年 10月 27日
 最終完了 : 1999年 3月 15日

식(2.1)에서 m 개의 월쉬함수로 전개된 함수 $x(t)$ 는 부분적으로 연속인 형태로 표현되며, 그 값은 세부구간의 평균값에 수렴한다. 이때 i 번째 세부구간에서 $x(t)$ 의 평균값을 x_i 라고 하면 식(2.1)은 다음과 같이 변형된다.

$$x_i = \sum_{n=0}^{m-1} Wal(n, i) X_n, \quad (i=0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.3)$$

또한 식(2.2)의 n 번째 월쉬계수 X_n 은 다음과 같다.

$$X_n = \sum_{i=0}^{m-1} Wal(n, i) x_i \frac{1}{m}, \quad (n=0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.4)$$

위 식에서 $Wal(n, i)$ 는 n 번째 월쉬함수에 대한 i 번째 세부구간의 값을 나타낸다. 식(2.3)을 이산월쉬역변환이라 하며, 식(2.4)를 이산월쉬변환이라 한다. 월쉬함수 m 항 전개를 이용하는 경우 모든 월쉬함수는 m 개의 세부구간에서 $+1$ 혹은 -1 값을 취한다. 이러한 월쉬함수의 특성으로부터 고속월쉬함수처리가 가능해진다. 시퀀스배열 월쉬함수에 대한 고속월쉬변환 알고리즘은 Pratt[8]에 의해 유도되었으며 다음과 같다.

$$F_0(\cdot) = x_{(i_{p-1}, i_{p-2}, \dots, i_0)}$$

$$F_r(\cdot) = \sum_{i_r=0}^{1} (-1)^{n_{p-r}(i_r+i_{r-1})} F_{r-1}(\cdot) \quad (2.5)$$

단, $r=1, 2, \dots, p$ 이며,

$$F_r(\cdot) = F_r(n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_{p-r}, i_{p-1}, i_{p-2}, \dots, i_r)$$

고속월쉬변환과 역변환은 똑같은 과정에 의해 이루어진다.

단, 고속월쉬변환인 경우는 최종의 결과 값에 $1/m$ 을 곱하면 된다.

$$X_n = X_{(n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_0)} = \frac{1}{m} F_p(n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_0) \quad (2.6)$$

m 항 전개의 경우에는 $p = \log_2 m$ 번의 단계가 필요하고, 각 단계마다 m 번의 가감산이 필요하므로 고속월쉬변환은 $p = \log_2 m$ 번의 가감산에 의해 이루어진다.

3. 고속월쉬변환에 의한 선형시지연계의 해석

고속월쉬변환을 이용하여 다음과 같이 표현되는 n 차 선형시지연계의 해를 구하는 문제를 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Lx(t-\tau) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$x(t) = \eta_x(t) \quad t \in [-\tau, 0]$$

단, $x(t)$ 는 n 차 상태벡터이고, $u(t)$ 는 r 차 입력벡터이며, A, L, B 는 적절한 차원의 행렬이다[11]. 식(3.1)을 적분하고,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t Ax(\sigma) d\sigma + \int_0^t Lx(\sigma-\tau) d\sigma + \int_0^t Bu(\sigma) d\sigma \quad (3.2)$$

식(3.1)의 해를 최초 $x^0(t) = x_0$ 으로 가정하여 식(3.2)에 대입하면 다음과 같으며

$$x^1(t) = x_0 + \int_0^t Ax^0(\sigma) d\sigma + \int_0^t Lx^0(\sigma-\tau) d\sigma + \int_0^t Bu(\sigma) d\sigma \quad (3.3)$$

반복 적용할 때 k 번째의 결과는 다음과 같다.

$$x^k(t) = x_0 + \int_0^t Ax^{k-1}(\sigma) d\sigma + \int_0^t Lx^{k-1}(\sigma-\tau) d\sigma + \int_0^t Bu(\sigma) d\sigma \quad (3.4)$$

주어진 식(3.1)의 상태방정식이 Lipschitz 조건을 만족한다면 Picard에 의한 식(3.4)의 반복 연산에 의해 다음을 만족하는

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\| = 0 \quad (3.5)$$

식(3.1)의 미분방정식의 해가 존재한다.

$x^{k-1}(t)$ 를 알고 있다고 할 때, 구간 $[0, T]$ 에서 월쉬함수를 적용하여 식(3.4)의 해를 구하는 문제를 고려한다. 위 식(3.4)의 $x^k(t)$, $x^{k-1}(t)$ 와 $x^{k-1}(t-\tau)$ 를 각각 다음과 같이 월쉬함수로 나타낸다.

$$x^k(t) = \sum_{i=0}^{m-1} X_i^k Wal(i, t) = X^k Wal(t) \quad (3.6)$$

$$x^{k-1}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} X_i^{k-1} Wal(i, t) = X^{k-1} Wal(t) \quad (3.7)$$

$$x^k(t-\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} D_i^{k-1} Wal(i, t) = D^{k-1} Wal(t) \quad (3.8)$$

$Wal(t) = [Wal(0, t), Wal(1, t), \dots, Wal(m-1, t)]^T$ 가 되며,

$X^k = [X_0^k, X_1^k, \dots, X_{m-1}^k]$ 이며, 상태벡터 $x^k(t)$ 의 월쉬계수 $(n \times m)$ 행렬로 결정해야 할 값이다.

또한, X_i^k 는 상태벡터 $x^k(t)$ 의 i 번째 월쉬계수로 n 차 벡터이다. D^{k-1} 은 $x^{k-1}(t-\tau)$ 의 월쉬계수행렬로 고속월쉬변환을 이용하여 결정할 수 있다. 또한, 초기조건과 $u(t)$ 를 월쉬함수를 이용하여 다음과 같이 전개한다.

$$x_0 = \sum_{i=0}^{m-1} X_i Wal(i, t) = X Wal(t) \quad (3.9)$$

$$u(t) = \sum_{i=0}^{m-1} U_i Wal(i, t) = U Wal(t) \quad (3.10)$$

초기조건에 대한 월쉬계수행렬은 $X_0 = [X_{00}, 0, \dots, 0]$ 으로 첫 번째 계수만 $X_{00} = x_0$ 의 값을 취하며 나머지는 모두 0의 값을 취한다. U_i 는 $u(t)$ 에 대한 i 번째 월쉬계수로 r 차 벡터이고,

$U = [U_0, U_1, \dots, U_{m-1}]$ 로 $u(t)$ 에 대한 월쉬계수 $(r \times m)$ 행렬이다.

식(3.6)-(3.10)의 관계를 식(3.4)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X^k Wal(t) &= X_0 Wal(t) + AX^{k-1} \int_0^t Wal(\sigma) d\sigma \\ &\quad + LD^{k-1} \int_0^t Wal(\sigma) d\sigma + BU \int_0^t Wal(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (3.11)$$

위 식(3.11)에서 월쉬함수의 적분은 시간 t 의 함수이다. 적분 가능한 임의의 함수를 월쉬함수로 전개할 수 있는 것과 마찬가지로 월쉬함수의 적분 역시 월쉬함수로 다음과 같이 전개할 수 있으며,

$$\int_0^t Wal(\sigma) d\sigma = P Wal(t) \quad (3.12)$$

식(3.12)의 P 를 월쉬함수의 적분연산행렬이라하는데, 이를 식(3.11)에 도입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X^k Wal(t) &= X_0 Wal(t) + AX^{k-1} P Wal(t) \\ &\quad + LD^{k-1} P Wal(t) + BUP Wal(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

식(3.13)에서 양변의 월쉬벡터를 소거하면 다음의

$$X^k = X_0 + AX^{k-1} P + LD^{k-1} P + BUP \quad (3.14)$$

대수방정식으로부터 $x^k(t)$ 의 월쉬계수행렬인 X^k 를 구할 수

있다. 이상의 과정을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 월쉬전개항수 $m(=2^p)$ 그리고 2장의 고속월쉬변환을 이용하여 초기조건에 대한 계수행렬인 X_0 와 입력 $u(t)$ 의 월쉬 계수행렬 U 등을 결정하고,
- 2) 2장의 고속월쉬변환을 이용하여 k-1번째 반복과정에서 구한 $x^{k-1}(t)$ 의 월쉬계수행렬 X^{k-1} 을 구한다. 단, 최초 k=1일 때는 $x^{k-1}(t) = x_0$ 이다. 그리고, 시지연항인 $x^{k-1}(t-\tau)$ 의 월쉬계수행렬 D^{k-1} 을 구한다.
- 3) (3.14)의 대수방정식의 해인 X^k 를 결정한다.
- 4) 2장의 고속월쉬역변환을 이용하여 X^k 로부터 $x^k(t)$ 를 구한다.
- 5) 다음의 오차가 0으로 수렴될 때까지 위 2)-4)의 과정을 반복한다.

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\| \quad (3.15)$$
- 6) 오차 $e(t)$ 가 0으로 수렴될 때의 $x^k(t)$ 가 식(3.1)의 해인 $x(t)$ 가 된다.

이상에서 보아온 것처럼, 기존의 직교함수용융방법에서는 시스템차수에 해당하는 수많은 역행렬의 연산을 필요로 하나 [2,4,5], 본 연구방법은 식(3.14)에서 보듯이 그러한 역행렬의 연산이 필요없음을 알 수 있으며, 고속월쉬변환과 역변환을 이용하기 때문에 매우 간편하게 시스템의 해를 구할 수 있음을 알 수 있다.

4. 고속월쉬변환에 의한 선형시지연계의 최적제어

다음과 같은 선형시지연시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Lx(t-\tau) + Bu(t) \quad (4.1)$$

초기조건은 다음과 같다.

$$x(0) = x_0 \quad (4.2a)$$

$$x(t) = \eta_x(t) \quad t \in [-\tau, 0] \quad (4.2b)$$

τ 는 상태에서의 지연을 나타내고, 초기함수 $\eta_x(t)$ 는 정의구간에서 연속인 함수이다.

다음과 같은 평가함수를 최소화하는 문제를 고려하자.

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) G x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (4.3)$$

여기서, 첨자 T는 전치행렬을 나타내며 $Q \geq 0, R > 0$ 이다.

구간 $0 \leq t \leq t_f$ 에서 식(4.2)에서 고정된 초기상태 x_0 로 주어진 초기조건과 자유로운 최종상태 x_f 와 고정된 최종시간 t_f 를 이용하여 식(4.1)의 평가함수를 최소화하는 제어입력 $u(t)$ 를 구하자.

4.1. Embedding Method에 의한 선형시지연계의 최적제어[3]

상태방정식과 준상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Lx(t-\tau) - BR^{-1}B^T p(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (4.4a)$$

$$\dot{p}(t) = -A^T p(t) - L^T p(t+\tau) - Qx(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (4.4b)$$

최적제어입력 $u(t)$ 는 다음의 식으로 구해지며

$$u(t) = -R^{-1}B^T p(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (4.5)$$

식(4.4a)와 (4.4b)는 식(4.2)의 조건을 만족시킨다. 부가적으로,

$$p(t) = 0, \quad t \geq t_f$$

이다. 식(4.4a)와 (4.4b) 및 (4.5)를 embedding method의 초기치 문제에 적용할 수 있다. 또한,

$$\dot{p}(t) = k(t)x(t) + h(t) \quad (4.6)$$

이다. 식(4.6)을 식(4.4a)와 (4.4.b) 및 (4.5)에 대입하여 풀면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= k(t)BR^{-1}B^T k(t) - k(t)A - A^T k(t) - Q, \quad t \in [0, t_f] \\ k(t) &= G, \quad t \geq t_f \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_N(t) &= (k(t)BR^{-1}B^T - A^T)h_N(t) - k(t)Lx_{N-1}(t-\tau) - \\ &L^T h_{N-1}(t+\tau) - L^T k(t+\tau)x_{N-1}(t+\tau), \\ &t \in [0, t_f - \tau] \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_N(t) &= (k(t)BR^{-1}B^T - A^T)h_N(t) - k(t)Lx_{N-1}(t-\tau), \\ &t \in [t_f - \tau, t_f], \quad h(t) = 0, \quad t \geq t_f \end{aligned} \quad (4.8b)$$

$$\dot{x}_N(t) = (A - BR^{-1}B^T k(t))x_N(t) + Lx_{N-1}(t-\tau) - BR^{-1}B^T h_N(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (4.9)$$

먼저 식(4.7)의 리카티 방정식을 푼다. 식(4.8a)와 (4.8b)의 관계벡터 $h(t)$ 를 역방향 계산으로 풀고, 식(4.9)의 $x(t)$ 를 시간에 대하여 순방향으로 계산한다. 이러한 방정식들은 반복적으로 계산되며 첨자 N은 반복횟수를 나타낸다.

4.2. 고속월쉬변환에 의한 선형시지연계의 최적제어

본 논문에서의 방법은 다음의 과정을 따른다.

- 1) 최적제어는 4.1절의 embedding method를 따른다.
- 2) Picard의 반복연산과 고속월쉬변환을 이용하여 식(4.7)의 리카티 해 $K(t)$ 를 2점 경계치문제로부터 구한다.
- 3) 2)의 과정에서 구한 리카티 해와 Picard의 반복연산 및 고속월쉬변환을 이용하여 식(4.8a)과 (4.8b)의 관계벡터 $h_N(t)$ 를 결정한다.
- 4) 2), 3)의 과정에서 구한 값을 이용하여 3)의 방법과 마찬가지로 식(4.9)의 상태벡터 $x_N(t)$ 를 결정한다.
- 5) Embedding method의 수렴조건을 만족할 때까지 3), 4)의 과정을 반복함으로써 최적상태를 결정하고 식(4.4)와 식(4.6)을 이용하여 최적제어입력을 결정한다.

식 (4.7)의 리카티해는 지연항과는 무관하므로 식(4.5a)와 식 (4.5b)를 상태방정식의 형태로 표현한 후 지연항을 제거하면 다음과 같다. 즉 리카티해는 다음의 2점 경계치 문제로부터 구할 수

있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

단, $x(0) = x_0, p(t_f) = 0$

식(4.10)을 Picard의 반복연산과 고속윌쉬변환을 이용하여 리카티해 $K(t)$ 를 결정할 수 있다[6].

식(4.8a)와 (4.8b)의 관계벡터 $h(t)$ 는 다음의 과정에 의하여 결정할 수 있다. 먼저 $v = t_f - t$ 로 치환하면 식(4.8a)와 식(4.8b)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{h}_N(v) = & -\widehat{A}^T(t_f - v)h_N(v) + k(t_f - v)Lx_{N-1}(t_f - v - \tau) + L^T h_{N-1} \\ & (t_f - v + \tau) + L^T k(t_f - v + \tau)x_{N-1}(t_f - v + \tau), \\ & v \in [\tau, t_f] \end{aligned} \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_N(v) = & -\widehat{A}^T(t_f - v)h_N(v) + k(t_f - v)Lx_{N-1}(t_f - v - \tau), \\ & v \in [0, \tau], \quad h(v) = 0, v \leq 0 \end{aligned} \quad (4.11b)$$

단, $\widehat{A}^T(t_f - v) = k(t_f - v)BR^{-1}B^T - A^T$

식(4.11a)와 식(4.11b)을 적분하고 3장에서 방법과 마찬가지로 식(4.11b)의 최초의 해를 $h_N^0(t) = h_0$ 라고 하고, 식(4.11a)의 최초의 해를 $h_N^0(t) = h_r$ 로 가정하여 반복 적용할 때 k번째 결과는 다음과 같다.

$$h_N^k(v) = h_0 - \int_0^\tau \widehat{A}^T(t_f - \sigma)h_N^{k-1}(\sigma) d\sigma + \int_0^\tau d(\sigma) d\sigma \quad (4.12a)$$

$$h_N^k(v) = 0, \quad v \leq 0$$

$$\begin{aligned} h_N^k(v) = & h_r - \int_\tau^{t_f} \widehat{A}^T(t_f - \sigma)h_N^{k-1}(\sigma) d\sigma + \int_\tau^{t_f} d(\sigma) d\sigma + \\ & L^T \int_\tau^{t_f} \widehat{A}^T h_{N-1}(t_f - \sigma + \tau) d\sigma + L^T \int_\tau^{t_f} u(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (4.12b)$$

단, $k=1, 2, 3, \dots, d(\sigma) = k(t_f - \sigma)Lx_{N-1}(t_f - \sigma - \tau),$

$$w(\sigma) = k(t_f - \sigma + \tau)x_{N-1}(t_f - \sigma + \tau)$$

식(4.12a), (4.12b)의 반복 연산에 의해 다음을 만족하는

$$e(v) = \lim_{k \rightarrow \infty} \| h_N^k(v) - h_N^{k-1}(v) \| = 0 \quad (4.13)$$

식(4.8a), (4.8b)의 미분방정식의 해를 구한다.

또한, 식(4.9)의 최적상태는 다음의 과정에 의하여 결정된다. 식(4.9)을 적분하고, 3장에서 방법과 마찬가지로 최초의 해를 $x_N^0(t) = x_0$ 으로 가정하여 반복 적용할 때 k번째 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_N^k(t) = & x_0 + \int_0^{t_f} \widehat{A}(\sigma)x_N^{k-1} d\sigma + L \int_0^{t_f} x_{N-1}(\sigma - \tau) d\sigma \\ & - B R^{-1} B^T \int_0^{t_f} h_N(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (4.14)$$

단 $k=1, 2, 3, \dots$

식(4.14)의 반복 연산에 의해 다음을 만족하는

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \| x_N^k(t) - x_N^{k-1}(t) \| = 0 \quad (4.15)$$

식(4.9)의 미분방정식의 해를 구한다.

다음은 식(4.12a)와 (4.12b) 및 식(4.14)를 고속윌쉬변환을 이용하여 각각의 해를 구하는 문제를 고려하자.

식(4.12a)와 식(4.12b)의 $h_N^{k-1}(v)$ 를 알고 있다고 할 때 윌쉬 함수를 이용하여 $h_N^k(v)$ 를 구하자. 식(4.12a)와 식(4.12b)의 각각의 벡터를 윌쉬함수로 나타내면 다음과 같다.

$$h_N^k(v) = H_N^k \text{Wal}(v) \quad (4.16)$$

$$h_0 = H_0 \text{Wal}(v) \quad (4.17)$$

$$h_r = H_r \text{Wal}(v) \quad (4.18)$$

$$d(v) = D \text{Wal}(v) \quad (4.19)$$

$$w(v) = W \text{Wal}(v) \quad (4.20)$$

$$h_{N-1}(t_f - v - \tau) = \Lambda_{N-1} \text{Wal}(v) \quad (4.21)$$

$$\widehat{A}^T(t_f - v)h_N^{k-1}(v) = 0^{k-1}(v) = O^{k-1} \text{Wal}(v) \quad (4.22)$$

H_N^k 는 $h_N^k(v)$ 에 대한 윌쉬계수행렬로써 결정해야 할 값이다.

H_0 와 H_r 는 각각의 초기치에 대한 윌쉬계수행렬이다. O^{k-1} 은 행렬 $\widehat{A}^T(t_f - v)$ 와 전 단계에서 구한 $h_N^{k-1}(v)$ 의 곱을 고속윌쉬변환하여 구한 값이고, D 는 리카티해와 시스템행렬 L 및 embedding method에서 바로 전 단계에서 구한 상태벡터 $x_{N-1}(t_f - v + \tau)$ 의 곱을 고속윌쉬변환하여 구한 계수 값이다. 그리고, W 는 리카티해 $x_{N-1}(t_f - v + \tau)$ 와 상태벡터 $x_{N-1}(t_f - v + \tau)$ 의 곱을 고속 윌쉬변환하여 구한 계수 값이며, Λ_{N-1} 은 지연요소를 가지는 관계벡터 $h_{N-1}(t_f - v - \tau)$ 의 윌쉬 계수 행렬이다.

식(4.12a)와 식(4.12b)에 식(4.16)~(4.22)의 관계 및 적분연산자를 도입한 후 양변의 윌쉬벡터를 소거하면 다음과 같고,

$$H_N^k = H_0 - O^{k-1}P + DP \quad (4.23a)$$

$$H_N^k = H_r - O^{k-1}P + DP + L^T \Lambda_{N-1}P + L^T WP \quad (4.23b)$$

위의 대수 방정식으로부터 $h_N^k(v)$ 에 대한 윌쉬계수행렬 H_N^k 를 구할 수 있으며, 고속윌쉬변환을 통하여 $h_N^k(v)$ 를 구한 후 식(4.13)의 오차를 만족할 때까지 반복함으로써 식(4.8a)와 식(4.8b)의 해인 $h_N(t)$ 를 구할 수 있다.

다음은 식(4.14)에서 $x_N^{k-1}(t)$ 를 알고 있다고 할 때 윌쉬함수를 이용하여 $x_N^k(t)$ 를 구하기 위하여 식(4.14)의 각각의 벡터를 윌쉬함수로 나타내면 다음과 같다.

$$x_N^k(t) = X_N^k \text{Wal}(t) \quad (4.24)$$

$$x_0 = X_0 \text{Wal}(t) \quad (4.25)$$

$$h_N(t) = H_N \text{Wal}(t) \quad (4.26)$$

$$x_{N-1}(t - \tau) = \Theta_{N-1} \text{Wal}(t) \quad (4.27)$$

$$\hat{A}(t)x_N^{*-1}(t) = z^{*-1}(t) = Z^{*-1} \text{Wal}(t) \quad (4.28)$$

$X_N^*(t)$ 는 $x_N^*(t)$ 에 대한 월쉬계수행렬로써 결정해야 할 값이고, Z^{*-1} 은 행렬 $\hat{A}(t)$ 와 전단계에서 구한 $x_N^{*-1}(t)$ 의 곱을 고속월쉬변환하여 구한 계수 값이며, Θ_{N-1} 은 지연요소를 가지는 상태벡터 $x_{N-1}(t-\tau)$ 의 월쉬계수행렬이다. 또한, X_0 와 H_N 은 각각 초기조건 x_0 와 $h_N(t)$ 에 대한 월쉬계수행렬이다.

식(4.14)에 식(4.24)~식(4.28)의 관계 및 적분연산자를 도입한 후 양변의 월쉬벡터를 소개하면 다음과 같고,

$$X_N^* = X_0 + Z^{*-1}P + L\Theta_{N-1}P - BR^{-1}B^T H_N P \quad (4.29)$$

위의 대수 방정식으로부터 $x_M^*(t)$ 에 대한 월쉬계수행렬

X_M^* 를 구할 수 있으며, 고속월쉬역변환을 통하여 $x_M^*(t)$ 를 구한 후 식(4.15)의 오차를 만족할 때까지 반복함으로써 식(4.9)의 해인 $x_M(t)$ 를 구할 수 있다. 또한, 식(4.4)와 식(4.6)을 이용하여 최적제어입력 $u(t)$ 를 구할 수 있다.

5. 시뮬레이션

K.P.Palanisamy와 G.P.Rao[3]에 의해 다루어졌던 선형시지연계를 고려한다.

$$\frac{d}{dt} x(t) = x(t-1) + u(t), \quad 0 \leq t < 2 \quad (5.1)$$

$x(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0$
평가함수는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^2 [x^2(t) + u^2(t)] dt \quad (5.2)$$

그림1은 영입력응답을 나타낸다. 실선은 수치해법에 의한 결과이고, 구형파로 나타난 부분은 월쉬함수 64항 전개를 이용하여 본 연구방법에 의해 해석한 결과이다.

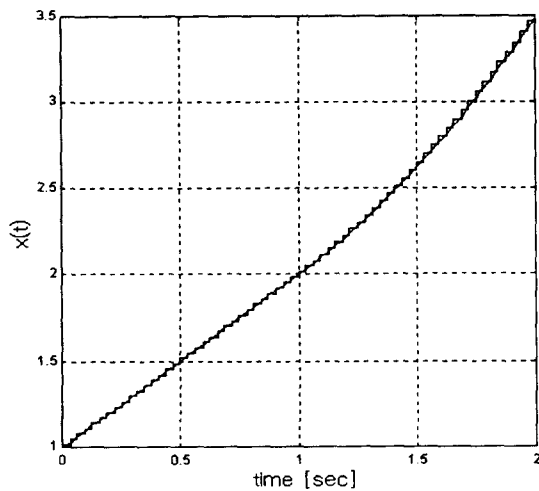


그림 1. 영입력 응답
Fig. 1. Zero input response

그림에서 보듯이 월쉬함수를 이용한 시스템의 해석결과는 직교함수의 특성상 부분적으로 연속인 형태로 나타나며 전구간에 서 원 함수 값에 잘 수렴됨을 알 수 있다.

식(5.2)의 평가함수를 최소화하는 최적제어의 결과를 그림 2,3에 나타냈다. 이들은 구간 $[0, 2)$ 에서 월쉬함수 64항 전개를 이용하고, Picard의 반복연산에서 나타나는 오차의 수렴 한계값을 10^{-7} 으로 하였을 때의 결과이다. 그림 2에서는 최적상태궤적을 나타내었고, 그림 3에는 최적제어입력을 나타내었다.

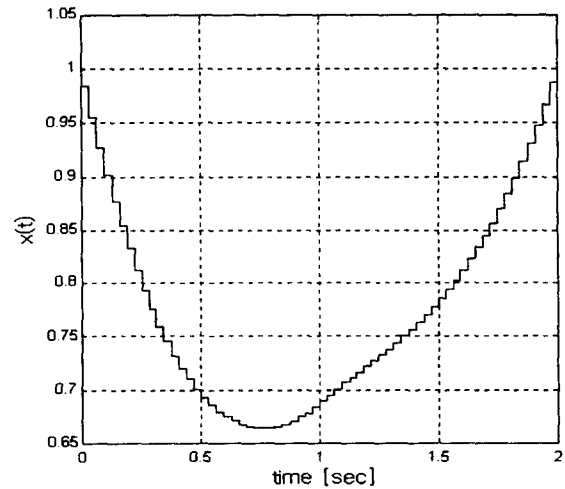


그림 2. 최적상태궤적
Fig. 2. Optimal state trajectory

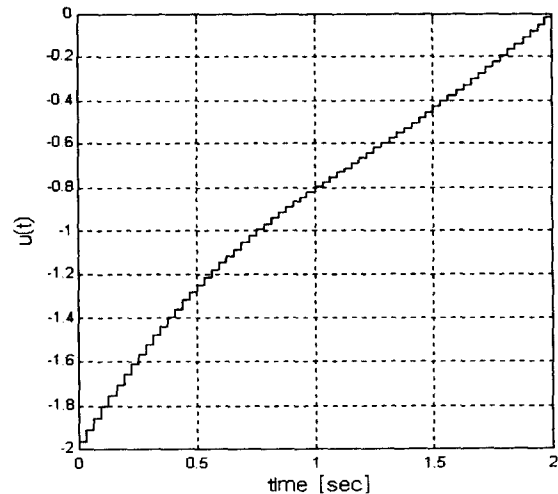


그림 3. 최적제어입력
Fig. 3. Optimal control input

본 연구에 의한 평가함수 값은 표 1에서 보는 바와 같이 STWS[3] 방법이나 하일함수 단일항 전개[12] 방법보다 더 좋은 결과를 얻었다. $m=2$ 와 4인 경우에는 오차가 허용범위안에 들지 못하였다. 전개항수를 늘림에 따라 평가함수 값이 일정한 값에 잘 수렴됨을 알 수 있다.

표 1. 평가함수값의 비교표
Table 1. Comparison table of performance index

전개항수(m)	STWS[3]	하알함수[12]	본 연구방법
8	m=10,	1.6526	1.6514
16	J=1.6504	1.6501	1.6487
32		1.6495	1.6480
64	m=100,	1.6493	1.6478
128	J=1.6497	1.6493	1.6478

6. 결론

본 연구에서는 Picard의 반복연산법과 월쉬함수응용을 기초로 한 선형시지연계의 최적제어를 위한 월쉬함수접근법을 제시하였다.

본 연구에서 얻은 결과는 다음과 같다.

- 1) 본 연구방법은 단순한 가.감산처리에 의한 고속월쉬변환과 역변환을 이용함으로써 리카티 해를 보다 빠르고 간편하게 결정할 수 있다.
- 2) Pade 근사기법을 이용한 방법에서는 지연항을 지연이 없는 선형계로 나타낼때 근사화 오차와 시스템 차수의 변동이 일어나지만 본 연구에서는 embedding method와 Picard의 반복 알고리즘을 사용함으로써 선형계로 근사화 하지 않고도 월쉬함수 유한급수 전개를 이용하여 해석 및 제어문제를 수행할 수 있다.
- 3) 기존의 embedding method에 직교함수를 이용한 방법에서는 지연항이나 선행항을 처리하기위한 연산자를 정의하여 사용함으로써 고차행렬의 계산을 초래하나, 본 연구에서는 이러한 연산자를 사용하지 않고도 선형시지연계의 해석 및 제어문제를 간단히 수행할 수 있다.
- 4) 일반적인 직교함수방법은 수많은 역행렬의 계산을 필요로 하나 본 연구방법에서는 이러한 역행렬의 연산이 필요없기 때문에 선형시지연계의 제어문제를 보다 빠르고 쉽게 해결할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Shuh-Chuan Tsay and I. Long Wu, Tsu-Tian Lee, "Optimal control of linear time-delay systems via general orthogonal polynomials", Int. J. System Science, vol.19, no.2, pp.365-376, 1988

[2] K.P.Palanisamy and K.G.Raghunathan, "Single term Walsh series analysis of linear optimal control systems in cooperating observers", Int. J. System Science, vol.20, no.7, pp.1149-1155, 1989.

[3] K.P.Palanisamy and G.P.Rao, "Optimal control of linear systems with delays in state and control via Walsh functions", IEE Proceeding, vol.130, Pt.D no.6, pp.300-312, 1983

[4] 한상인, 안비오, 김민형, 안두수, "블러펄스함수를 이용한 미지입력 관측기설계의 대수적 접근에 관한 연구", 대한전기학회 논문지, 제46권, 제6호, pp.950-957, 1997

[5] 안두수, 김재일, 이명규, "유리하알변환에 의한 시스템파라미터 추정기의 설계", 대한전기학회 논문지, 제45권, 제6호, pp.868-875, 1996

[6] 이명규, "고속월쉬변환에 의한 선형시변계의 해석 및 최적제어를 위한 새로운 접근방법", 대한전기학회논문지 제47권 제1호, pp.75-82, 1998

[7] Ronald R.Mohler, Nonlinear systems, vol.1, Prentice Hall, 1991

[8] W.K.Pratt, "Transform Image Coding", Proc. IEEE, vol.57, pp.58-68, 1969

[9] K.G.Beauchamp, Application of Walsh and related functions, Academic Press, 1984

[10] 안두수, 직교함수와 응용, 북두출판사, 1997

[11] Bryson, A.E., & Ho, Y.C., Applied Optimal Control, New York, Wiley, 1975

[12] 심재선, "고속하알변환을 이용한 선형시지연계의 해석 및 최적제어에 관한 연구", 대한전기학회논문지 제47권 제7호, pp.973-978, 1998

저 자 소 개



한 상 인 (韓 相 仁)

1955년 1월 25일생. 1978년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1980년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1994년 동 대학원 전기공학과 박사과정 수료. 1997년 ~ 현재 한국전력기술(주) 부장

Tel : (0331) 290-7167

E-mail : hansi@ns.kopec.co.kr



이 명 규 (李 明 珪)

1960년 12월 15일생. 1982년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1984년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1991년 ~ 현재 경성대학교 전기전자 및 컴퓨터 공학부 교수

Tel : (051) 620-4772

E-mail : mklee@star.kyungst.ac.kr



김 진 태 (金 珍 泰)

1972년 1월 1일생. 1997년 경성대학교 공대 전기공학과 졸업. 1997년 ~ 현재 성균관대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 석사과정

Tel : (0331) 290-7167

E-mail : oshkjt@nature.skku.ac.kr



안 두 수 (安 斗 守)

1937년 6월 9일생. 1960년 서울대학교 공대 전기공학과 졸업. 1964년 서울대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1982년 중앙대학교 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1971년 ~ 현재 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터 공학부 교수

Tel : (0331) 290-7101

E-mail : dsahn@ece.skku.ac.kr