

하다마드 트랜스폼 이미징 스펙트로미터에 관한 연구

論文
48A - 5 - 12

A Study on Hadamard Transform Imaging Spectrometers

朴珍培* · 郭大淵** · 陳承熙*** · 朱鎮晚§

(Jin-Bae Park · Dae-Yun Kwak · Seung-Hee Jin · Jin-Man Joo)

Abstract - In this paper, a Hadamard transform imaging spectrometer(HTIS) is proposed by using a grill spectrometer. And we reconfigure the system by using the grill spectrometer which uses a left cyclic S-matrix instead of the conventional right cyclic one. Then, we model the Hadamard transform imaging spectrometer and apply the mask characteristics compensation method, i.e. T^{-1} method, to complete fast algorithm.

Also, through computer simulations the superiority of the proposed system in this paper to the conventional Hadamard transform spectrometer(HTS) is proved and the performance of the two systems are compared by introducing average mean square error(AMSE) as the algebraic criterion.

Key Words : HTIS(Hadamard transform imaging spectrometer), grill spectrometer, multiplexing, T^{-1} method, EOM(electro-optical mask)

1. 서 론

광원의 스펙트럼을 측정하는 방법으로 가장 간단한 방법은 단파장측정기(monochromator) [1]를 사용하는 것이다. 단파장측정기는 슬릿(slit)에 특정 스펙트럼만을 투과시켜서 측정하는 장치이다. 따라서 측정시 잡음이 큰 경우에는 적절한 측정이 이루어질 수 없다. 이러한 측정잡음을 줄여 신호대 잡음비(signal to noise ratio)를 높이기 위해 고안된 방법이 다중화기법(multiplexing)[1]이다. 다중화 기법이란 측정하고자 하는 스펙트럼들을 각각 측정하지 않고 한꺼번에 측정하여 이를 다시 각 스펙트럼 별로 얻어내는 방법이다. 하다마드 트랜스폼[2]을 사용하는 계측기술은 다중화 기법을 사용하는 방법 중 하나이다. 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터에서는 다중화의 방법으로 전자광학 마스크(electro-optic mask)[3]와 마스크를 제어하기 위한 S행렬(simplex matrix)[4]을 사용한다. 전자광학 마스크는 이전의 기계식 이동마스크와는 달리 고정형이며 전기신호를 사용하여 마스크의 개폐를 수행하므로 이동시 발생하는 문제점을 해결하였다. S행렬은 하다마드행렬(Hadamard matrix)을 변형한 것으로 최적의 가중치를 부여하는 특성을 유지하면서 광학에서 사용될 수 있도록 변형된 것이다. S행렬은 하다마드 행렬과 이를 통해 얻어진 7×7 S행렬의 예이다.

그리고 그림 2는 하다마드 트랜스폼을 사용하는 전형적인 계측기인 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터를 나타낸다.

$$H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & - & -1 & 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & - & 1 & -1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \Rightarrow S_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

그림 1 하다마드 행렬과 S행렬('-'는 '-1'을 뜻한다.)

Fig. 1 Hadamard matrix and simplex matrix('-' means '-1')

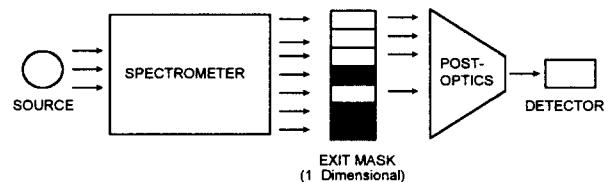


그림 2 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터

Fig. 2 Hadamard transform spectrometer(HTS)

하다마드 트랜스폼 이미징 스펙트로미터(HTIS)는 기존의 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터(HTS)가 특정 영역에서 빛의 스펙트럼(spectrum)을 측정하는 것과는 달리 공간의 각

* 正會員 : 延世大 電氣 및 컴퓨터工學科 副教授 · 工博

** 正會員 : 大宇電子 디지털情報通信研究2팀 研究員

*** 正會員 : 延世大 電氣 및 컴퓨터工學科 博士課程

§ 正會員 : 延世大 電氣 및 컴퓨터工學科 博士課程

接受日字 : 1998年 4月 11日

最終完了 : 1999年 3月 24日

영역 별로 스펙트럼을 측정할 수 있게 하는 장치[4]이다. HTS는 HTS처럼 하나의 마스크를 사용하지 않고 2개의 마스크를 사용하여 2번의 부호화를 수행한다. 따라서 공간상에서 다른 스펙트럼 분포를 갖는 화학적 시료나 이미지(image) 등의 스펙트럼을 영역별로 측정할 수 있는 장점을 가진다. HTS는 HTS처럼 하다마드 변환을 이용하여 스펙트럼 측정시 발생하는 잡음을 줄여준다. 또한 HTS는 2번의 부호화를 수행하기 때문에 HTS보다도 더 좋은 신호대잡음비를 얻을 수 있다.

2. 본 론

2.1 그릴 스펙트로미터

본 논문에서 제시하는 하다마드 트랜스폼 이미징 스펙트로미터는 그릴 스펙트로미터[4]를 이용한 것으로 2번의 부호화(encoding)를 수행한다. 그릴 스펙트로미터는 일반적인 HTS가 한번의 부호화를 수행하는 것과는 달리 2번의 부호화를 통하여 신호대 잡음비(signal to noise ratio)를 증가시키는 개선된 스펙트로미터이다. n개의 스펙트럼 정보를 얻기위해 n개의 슬릿(slit)을 가진 입력마스크와 2n-1개의 슬릿을 가진 출력마스크가 필요하다. 입력마스크는 전자광학마스크를 사용하여 동질화된 병렬신호(homogenized parallel signal)를 부호화하고 이를 분산시켜 고정된 출력마스크에서 다시 부호화를 시킴으로써 개선된 특성을 나타낸다. 여기서 출력마스크는 천공이 되어 있는 고정형 마스크이므로 이상적인 투과율 특성을 나타낸다. 그림 3은 그릴 스펙트로미터를 보여준다.

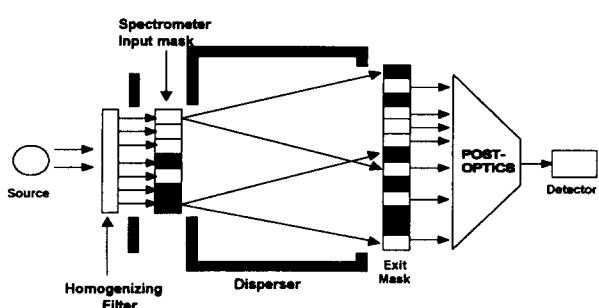


그림 3 그릴 스펙트로미터

Fig. 3 Grill spectrometer

기존의 그릴 스펙트로미터는 일반적인 HTS에서와는 달리 left cyclic S행렬을 사용하지 않고 right cyclic S행렬을 사용한다[4]. 즉 입력 마스크의 패턴(pattern)을 나타내는 $(n \times n)$ 행렬을 \mathbf{V} 라고 하고 출력마스크의 패턴을 나타내는 $(n \times n)$ 행렬을 \mathbf{W} 라고 하면 행렬 \mathbf{V} 의 원소 v_{ij} 와 행렬 \mathbf{W} 의 원소 w_{ij} 에 대하여 $v_{ij} = v_{j-i}$, $w_{ij} = w_{j-i}$ 의 관계가 성립한다. 단, 밀첨자는 modulo 'n'으로 읽는다.

실제의 스펙트럼을 나타내는 벡터를 Ψ , 측정값을 나타내는 벡터를 \mathbf{H} , 측정시 발생되는 잡음을 벡터를 \mathbf{E} 라고 하면 right cyclic S행렬을 사용한 그릴 스펙트로미터의 측

정치 수식을 살펴보면 다음과 같다.

$$H_i = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{2n-2} v_{r-i} \Psi_{r-s} w_s + E_i$$

여기서 $t = r - s$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} H_i &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} v_{r-i} \Psi_t w_{r-t} + E_i \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} v_{r-i} w_{r-t} \Psi_t + E_i \end{aligned}$$

단, $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq r-s \leq n-1$ 이다.

여기서 Ψ_t 는 벡터 Ψ 의 t 번째 원소이고, H_i 는 벡터 \mathbf{H} 의 i 번째 원소로 실제 i 번째 측정시 측정값을 나타낸다. 또한 E_i 는 벡터 \mathbf{E} 의 i 번째 원소로 i 번째 측정에서 발생하는 측정잡음이다.

Left cyclic S행렬은 $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$ 이므로 right cyclic 행렬을 사용했을 때보다 후 처리과정(post processing)에서 사용이 편리하다. 따라서 right cyclic 행렬을 사용할 때 행렬 \mathbf{V} 의 원소 v_{ij} 와 행렬 \mathbf{W} 의 원소 w_{ij} 에 대하여 $v_{ij} = v_{i+j-2}$, $w_{ij} = w_{i+j-2}$ 의 관계가 성립한다. 역시 밀첨자는 modulo 'n'으로 읽는다. 이 방식을 사용하면 다음과 같은 수식을 얻을 수 있다.

$$H_i = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=r}^{n-1} v_{r+i} \Psi_{s-r} w_s + E_i$$

여기서 $t = s - r$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} H_i &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} v_{r+i} \Psi_t w_{r+t} + E_i \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} v_{r+i} w_{r+t} \Psi_t + E_i \end{aligned}$$

단, $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq r-s \leq n-1$ 이다.

이를 벡터-행렬 형태로 사용하면 다음과 같은 수식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{H} = \mathbf{V} \mathbf{W}^T \Psi + \mathbf{E}$$

여기서 \mathbf{H} , Ψ , \mathbf{E} 는 $(n \times 1)$ 벡터이고 \mathbf{V} , \mathbf{W} 은 $(n \times n)$ 행렬이다.

이는 right cyclic S행렬을 사용할 때와 같은 것을 보여주는 것으로 그릴 스펙트로미터에 left cyclic S행렬을 사용하는 것이 가능함을 보여준다.

이미징 스펙트로미터에서 우리가 측정할 수 있는 것은 공간영역 정보와 그에 따른 스펙트럼 정보이다. 따라서 HTS에서와 같이 실제값이나 측정치 등을 1차원적인 벡터로서 나타낼 수 없고 2차원적인 행렬을 사용해야 한다. 여기서는 n개의 스펙트럼 정보와 m개의 위치 정보를 위해 $(n \times m)$ 행렬을 택하여 그 행이 스펙트럼 정보를 열이 위치 정보를 나타내도록 설정한다. 따라서 벡터 \mathbf{H} , Ψ , \mathbf{E} 는 각각 η , ϕ , e 인 $(n \times m)$ 행렬을 사용하면 다음과 같다.

$$\eta = \mathbf{V} \mathbf{W}^T \phi + \mathbf{e} \quad (1)$$

여기서 측정잡음 행렬 \mathbf{e} 의 원소 e_{ij} ($i=1, 2, \dots, n$, $j=1, \dots, m$)는 다음과 같은 통계적 특징을 갖는다.

$$E[e_{ij}] = 0, \quad \text{Var}[e_{ij}] = \sigma^2$$

여기서 $E[\cdot]$ 는 통계적 평균을 의미하고 $\text{Var}[\cdot]$ 는 통계적 분산을 의미한다.

예를 들어, 식 (1)의 입출력마스크의 패턴을 나타내는 (3×3) 행렬을 사용하여 측정치 행렬을 원소로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

이를 이용하여 측정치 행렬 \mathbf{H}_3 를 입출력마스크 패턴, \mathbf{V}_3 , \mathbf{W}_3 와 오차 행렬, \mathbf{E}_3 일 경우의 측정치를 행렬의 형태로 나타내면 다음과 같다. 행렬의 밑첨자는 정방행렬의 차원을 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 전자광학 마스크를 사용하는 입력마스크이 비이상적인 투과율 특성을 고려하지 않았다. 그럼 3의 출력 마스크는 입력 마스크에 대응하게 위에서 아래로 이동하면서 n 개의 slit을 선택하여 출력 마스크 패턴의 행렬을 만들어 낸다. 식 (1)을 통해 식 (2)를 유도할 수 있다.

$$(\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{V}^{-1} \eta = \phi + (\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{e} \quad (4)$$

따라서 실제값의 추정치(estimate)는 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= (\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{V}^{-1} \eta, \\ \hat{\phi} - \phi &= \zeta \\ &= (\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (5)$$

2.1 마스크가 이상적일 경우

마스크가 이상적일 때 \mathbf{V} , \mathbf{W} 대신 광학에서 가장 최

적의 특성을 나타내는 \mathbf{S} 행렬을 사용하여 스펙트럼을 복원하는데 이를 \mathbf{S}^{-1} 방법[7]이라 한다.

식 (1)의 \mathbf{V} , \mathbf{W} 대신 \mathbf{S} 행렬을 사용하면 식 (5)와 같이 된다.

$$\eta = \mathbf{S} \mathbf{S}^T \phi + \mathbf{e} \quad (6)$$

따라서 스펙트럼 추정치는 식 (3)으로부터 식 (6)을 통해 얻을 수 있고 오차 행렬은 식 (7)과 같다.

$$\hat{\phi} = (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{S}^{-1} \eta \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi} - \phi &= \zeta \\ &= (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} \end{aligned}$$

이에 따른 평균 MSE는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n E[\zeta_{ij}^2] \\ &= \frac{\sigma^2}{mn} \text{Trace}[(\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{S}^{-1}] \end{aligned}$$

여기서 ζ_{ij} 는 오차행렬 ζ 의 (i,j) 번째 원소이다.

이는 측정잡음의 분산이 σ^2 라고 하면 식 (8)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma^2}{n^2} \text{Trace}[(\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{S}^{-1}] \\ &= \frac{16n^2\sigma^2}{(n+1)^4} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\text{Trace}[\mathbf{A}]$ 는 행렬 \mathbf{A} 의 대각선위의 원소들의 합을 의미한다.

큰 n 값에 대하여 평균 MSE는 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\varepsilon \approx \frac{16\sigma^2}{n^2}$$

이는 기존의 HTS가 같은 조건에서 갖는 평균 MSE인 $\frac{4\sigma^2}{n}$ 에 비해 매우 작은 값이다.

L 번의 공가산(coaddition)을 수행시에는 다음과 같이 오차가 줄어든다.

$$\varepsilon(L) = \frac{16n^2\sigma^2}{L(n+1)^4}$$

큰 n 값에 대하여는 다음의 식이 성립한다.

$$\varepsilon(L) \simeq \frac{16\sigma^2}{Ln^2}$$

여기서 공가산은 여러개의 확률변수(random variable)를 평균을 취하여 감소된 분산값을 얻는 기술[11]로 x 라는 확률변수에 L 번의 공가산을 수행시 얻어진 확률변수 y 는 다음과 같은 통계적 특성을 나타낸다.

$$E[y] = E[x]$$

$$\text{Var}[y] = \frac{\text{Var}[x]}{L}$$

2.3 마스크가 비이상적인 경우

마스크가 비이상적이므로 \mathbf{V}, \mathbf{W} 를 $\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}$ 로 바꿔 표기한다. 따라서 식 (1)은 식 (9)와 같이 표현된다.

$$\eta = \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{W}}^T \phi + \mathbf{e} \quad (9)$$

각 마스크는 투명, 불투명 상태에서 각각 100%, 0%의 투과율을 갖지 못한다. 즉 $\tilde{\mathbf{V}}$ 행렬에 대하여 생각하면 행렬의 원소 $\tilde{v}(i, j)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{v}(i, j) = \begin{cases} \tau_{oi}, & i\text{번째 측정에서 } j\text{번째 마스크가 불투명} \\ \tau_{ij}, & i\text{번째 측정에서 } j\text{번째 마스크가 투명} \end{cases}$$

마찬가지로 $\tilde{\mathbf{W}}$ 에 대하여도 다음과 같이 표현될 수 있음을 알 수 있다.

$$\tilde{w}(i, j) = \begin{cases} \tau_{oj}, & i\text{번째 측정에서 } j\text{번째 마스크가 불투명} \\ \tau_{ij}, & i\text{번째 측정에서 } j\text{번째 마스크가 투명} \end{cases}$$

즉 (3×3) S 행렬로 제어되는 비이상적인 마스크 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{이면 } \tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{o1} & \tau_{o2} & \tau_{o3} \\ \tau_{t1} & \tau_{t2} & \tau_{t3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

그림 4는 전형적인 PDLC(polymer dispersed liquid crystal) 마스크[7, 9, 11]의 투과율 특성을 나타낸다. 그림 4에서 τ_{ti} 값들은 대략 0.8 정도의 값을 갖게 되고 τ_{oi} 값들은 0에서 0.1까지의 값을 갖게 됨을 알 수 있다. 마스크가 비이상적인 특징을 나타낼 때는 \mathbf{T}^{-1} 방법[8]을 이용하는데 이를 본 논문에서 제안된 시스템에 적용하면 다음과 같다. 우선 다음과 같이 몇 가지의 행렬과 벡터를 정의하자.

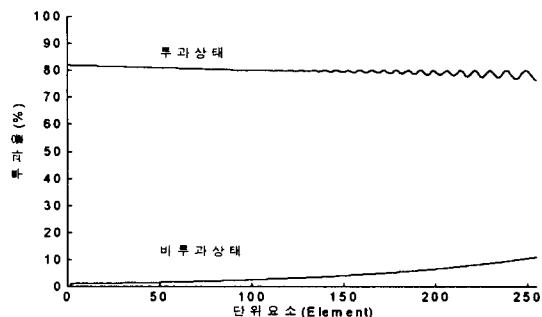


그림 4 전형적인 PDLC 마스크의 투과율 특성

Fig. 4 The transmission characteristic curve of the conventional PDLC mask

$$\mathbf{D} = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$$

$$= \text{diag}(\tau_{11} - \tau_{o1}, \tau_{22} - \tau_{o2}, \dots, \tau_{nn} - \tau_{on})$$

$$\mathbf{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$$

$$\tau_{on} = [\tau_{o1} \ \tau_{o2} \ \dots \ \tau_{on}]^T$$

$\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}$ 는 마스크 제어 행렬과 위에서 제시한 행렬들과 벡터들을 사용하여 식 (11)과 식 (12)와 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}\mathbf{D} + \mathbf{1}\tau_o^T \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} \quad (12)$$

여기서 출력 마스크인 $\tilde{\mathbf{W}}$ 은 이상적인 고정형 마스크이므로 마스크의 투과율 특성에 영향을 받지 않는다.

마스크의 제어 행렬인 $\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}$ 는 마찬가지로 \mathbf{S} 행렬을 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{S}\mathbf{D} + \mathbf{1}\tau_o^T \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{S} \quad (14)$$

이를 식 (9)에 대입하면 식 (15)와 같이 표현할 수 있다.

$$\eta = (\mathbf{SD} + \mathbf{1}\tau_o^T)\mathbf{S}^T \phi + \mathbf{e} \quad (15)$$

식 (13)에서 $\tilde{\mathbf{V}}$ 를 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{SD} + \mathbf{1}\tau_o^T$$

$$= \mathbf{S}(\mathbf{D} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{1}\tau_o^T) \quad (16)$$

$$= \mathbf{S}(\mathbf{D} + \frac{2}{n+1} \mathbf{1}\tau_o^T)$$

여기서 식 (16)의 2번째 식에서 3번째 식으로 넘어가는 과정은 $S^{-1}\mathbf{1} = \frac{2}{n+1} \mathbf{1}$ 의 관계가 있기 때문이다. 다음과 같이 전달행렬 \mathbf{T} 를 정의하면

$$\mathbf{T} = \mathbf{D} + \frac{2}{n+1} \mathbf{1}\tau_o^T \quad (17)$$

전달행렬 \mathbf{T} 는 마스크의 투과율 특성에 따라 달라지며 마스크가 이상적인 경우에는 단위행렬 \mathbf{I} (identity matrix)와 같게 된다. 식 (16)을 식 (18)과 같이 나타낼 수 있다

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{S}\mathbf{T} \quad (18)$$

따라서 측정치 η 는 식 (19)와 같이 표현할 수 있다.

$$\eta = \mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^T\phi + e \quad (19)$$

\mathbf{T}^{-1} 방법을 이용하여 시스템의 마스크를 모델링한 블럭 선도는 그림 5와 같다.

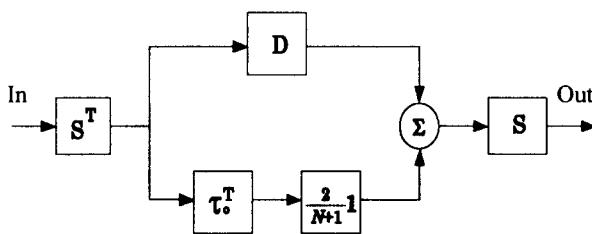


그림 5 \mathbf{T}^{-1} 방법에서의 마스크 특성 모델링

Fig. 5 The modeling of mask in \mathbf{T}^{-1} method

그리고 실제값의 추정치는 식 (20)에서 얻어질 수 있다.

$$\hat{\phi} = (\mathbf{S}^T)^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\eta \quad (20)$$

이때 \mathbf{S}^{-1} 는 식 (21)을 통하여 쉽게 얻을 수 있고 \mathbf{T}^{-1} 는 Sherman-Morrison공식[6]을 통하여 식 (22)와 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{2}{n+1} (2\mathbf{S}^T - \mathbf{J}) \quad (21)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} - \frac{1}{1 + \tau_o^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{1} \tau_o^T \mathbf{D}^{-1} \quad (22)$$

$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{1} = \frac{2}{n+1} \mathbf{1}$ 인 관계를 이용하면 식 (22)은 식 (23)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{D}^{-1} - \frac{1}{1 + \frac{2}{n+1} \tau_o^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{1}} \cdot \frac{2}{n+1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{1} \tau_o^T \mathbf{D}^{-1} \\ &= \mathbf{D}^{-1} - \frac{1}{\frac{n+1}{2} + \tau_o^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{1} \tau_o^T \mathbf{D}^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

이때 $\frac{1}{\frac{n+1}{2} + \tau_o^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{1}}$ 는 상수 값을 갖음으로 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\frac{n+1}{2} + \tau_o^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{1}} \\ &= \frac{1}{\frac{n+1}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{\tau_{oj}}{d_{jj}}} \end{aligned} \quad (24)$$

따라서 식 (23)은 식 (25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} - q \mathbf{D}^{-1} \mathbf{1} \tau_o^T \mathbf{D}^{-1} \quad (25)$$

$\hat{\phi}' = \mathbf{S}^{-1}\eta$ 라 하고 여기에서 우선 η 를 통하여 $\hat{\phi}'$ 를 얻는다. 이때 $\hat{\phi}'$ 은 고속하다마드변환(FHT; fast Hadamard transform)[5, 9, 10]을 통해 얻는다.

식 (20)은 $\hat{\phi}'$ 를 사용하여 식 (26)과 같이 표현 될 수 있다.

$$\hat{\phi} = (\mathbf{S}^T)^{-1}\mathbf{T}^{-1}\hat{\phi}' \quad (26)$$

다시 $\hat{\phi}' = \mathbf{T}^{-1}\hat{\phi}'$ 으로 정의시 식 (26)을 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\phi}' &= \mathbf{T}^{-1}\hat{\phi}' \\ &= (\mathbf{D}^{-1} - q \mathbf{D}^{-1} \mathbf{1} \tau_o^T \mathbf{D}^{-1})\hat{\phi}' \\ &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{I} - q \mathbf{1} \tau_o^T \mathbf{D}^{-1})\hat{\phi}' \\ &= \mathbf{D}^{-1}(\hat{\phi}' - q \mathbf{1} \tau_o^T \mathbf{D}^{-1}\hat{\phi}') \end{aligned} \quad (27)$$

이때 $(n \times m)$ 행렬 $\hat{\phi}'$ 의 각원소 $\hat{\psi}''(i, j)$ 는 식 (28)로 표현할 수 있다.

$$\hat{\psi}''(i, j) = \frac{\hat{\psi}'(i, j) - qr_j}{d_{ii}} \quad (i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m) \quad (28)$$

여기서 상수 r_j 는 식 (29)에서 얻어진다.

$$\begin{aligned} r_j &= \mathbf{r}_o^T \mathbf{D}^{-1} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\tau_{oi}}{d_{ii}} \hat{\boldsymbol{\phi}}(i, j) \quad (j=1, 2, 3, \dots, m) \end{aligned} \quad (29)$$

따라서 식 (28)과 식 (29)를 통하여 $\hat{\boldsymbol{\phi}}''$ 을 얻고 식 (20)의 실제값의 추정치는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\mathbf{S}^T)^{-1} \hat{\boldsymbol{\phi}}'' \quad (30)$$

복원 과정들을 블록 선도로 표현하면 그림 6과 같다.

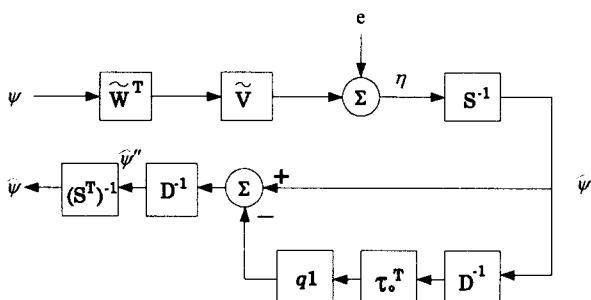


그림 6 T^{-1} 방법의 모델링

Fig. 6 The modeling of T^{-1} method

T^{-1} 기법의 평균 MSE를 고려하면 다음과 같다. 우선 가중치가 부여된 오차 행렬 ζ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\zeta = (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}$$

오차 행렬에 대한 평균 MSE는 식 (31)을 통해 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{mn^2} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n E[\zeta_{ij}^2] \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \text{Trace}[(\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{S}^{-1})^T (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{S}^{-1}] \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 ζ_{ij} 는 가중치가 부여된 오차 행렬의 (i, j) 번째 원소이다. 비교적 큰 n 에 대하여 $\mathbf{T}^{-1} \approx \mathbf{D}^{-1}$ 가 되므로 식 (31)은 식 (32)와 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\varepsilon \approx \frac{16\sigma^2}{(n+1)^4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_{jj}^4} \quad (32)$$

L 번의 공가산을 수행시에 식 (32)는 식 (33)과 같이 됨을 알 수 있다.

$$\varepsilon(L) \approx \frac{16\sigma^2}{L(n+1)^4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_{jj}^4} \quad (33)$$

3. 모의실험 및 결과 고찰

본 모의실험에서는 가상 시료에 대하여 HTS와 HTIS를 사용하여 복원한 스펙트럼을 상호 비교함으로써 HTIS가 갖는 우수성을 입증하고자 한다. 시료로 쓰이는 광원은 공간상에서 다른 스펙트럼을 갖는 이미지에 대한 것으로 스펙트럼의 형상을 그림 7과 같이 가정하였다. 즉 공간영역은 31개로 나누고, 스펙트럼 분해도는 측정 가능한 스펙트럼 영역을 255개의 단위요소로 나누어 측정하였다. 빛의 강도(intensity)는 최대값이 1이 되도록 했고 이때 측정잡음은 정규 분포(normal distribution)를 따르는 확률변수(random variable)로 평균은 0이며 분산은 0.1로 정하였다. 시스템은 전자광학 마스크를 사용하는 것으로 스펙트럼을 복원하는 방법으로 HTS와 HTIS에 대하여 모두 T^{-1} 방법을 택하였다. 그림 8과 그림 9는 각각 입력 광원의 첫 번째 공간과 마지막 공간에서의 스펙트럼이다. 여기서 마지막 공간은 빛이 사실상 발생하지 않았음을 알 수 있다. 그림 10과 그림 11은 측정시 발생된 잡음에 의해 변형된 스펙트럼의 첫 번째 공간과 31번째 공간의 모습이다. (여기서 축의 스케일이 더 커졌음에 주의하여야 한다.) 이는 스펙트럼의 각 단위요소 별로 측정을 하는 단파장측정기를 통하여 얻을 수 있는 결과이다.

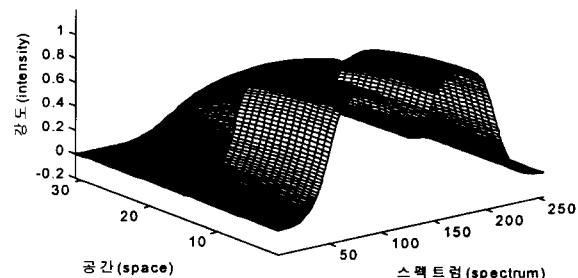


그림 7 입력 스펙트럼의 투시도

Fig. 7 The perspective of input spectrum

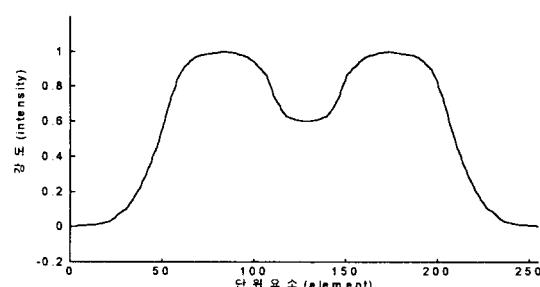


그림 8 첫 번째 공간의 입력스펙트럼

Fig. 8 Input spectrum in the 1st space

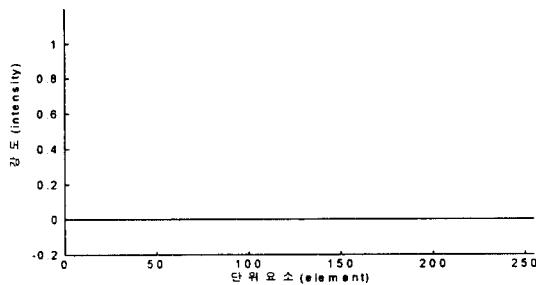


그림 9 31번째 공간의 입력 스펙트럼

Fig. 9 Input spectrum in the 31th space

그림 10은 그림 8의 실제 입력스펙트럼과는 전혀 다른 모습을 나타내고 있다. 특히, 그림 9는 31번째 공간이 실제 입력되는 광원이 없으므로 측정시 발생하는 잡음의 형태를 그대로 보여주는 것이다. 그림을 보면 측정잡음이 매우 심함을 알 수 있다. 그림 12는 측정잡음에 의해 변형된 입력스펙트럼의 공간상의 분포를 3차원으로 투시한 그림이다. 그림 7과 비교하여 잡음이 매우 심하여 실제 입력스펙트럼의 형태를 전혀 나타내지 못하고 있다.

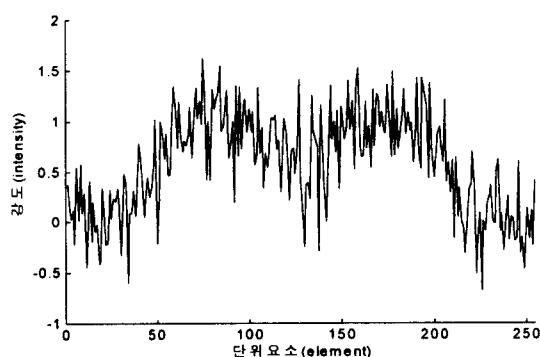


그림 10 측정잡음을 갖는 첫 번째 공간의 입력 스펙트럼

Fig. 10 Input spectrum in the 1st space with measurement noise

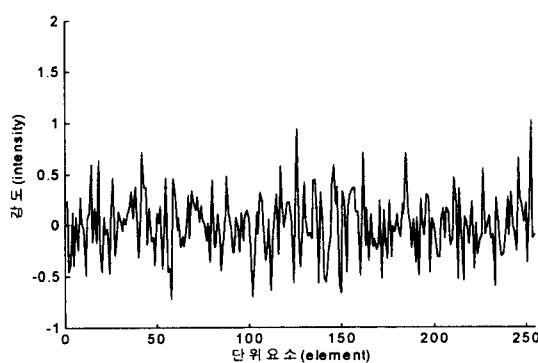


그림 11 측정잡음에 의해 변형된 31번째 공간의 입력 스펙트럼

Fig. 11 Input spectrum in the 31th space with measurement noise

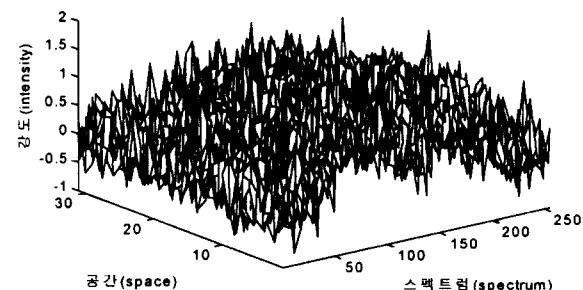


그림 12 측정잡음에 의해 변형된 입력 스펙트럼의 투시도

Fig. 12 The perspective of input spectrum with measurement noise

다음은 기존의 HTS를 사용하여 복원한 스펙트럼의 결과이다. 마찬가지로 그림 13은 첫 번째 공간, 그림 14는 31번째 공간의 스펙트럼이다. 특히 그림 14를 보면 다중화 기법을 이용한 HTS가 그림 11에서 나타나는 측정잡음을 많이 감소시켰음을 알 수 있다. 비록 단파장측정기에 비해 개선된 복원결과를 나타내지만 측정잡음이 아직도 많이 남아 있어 스펙트럼의 복원이 잘 이루어지지 않았음을 알 수 있다. HTS를 사용하여 스펙트럼을 복원시 평균 MSE는 2.7×10^{-3} 으로 처음에 측정잡음의 분산이 0.1이었던 것에 비교하면 약 1/370로 감소하였다.

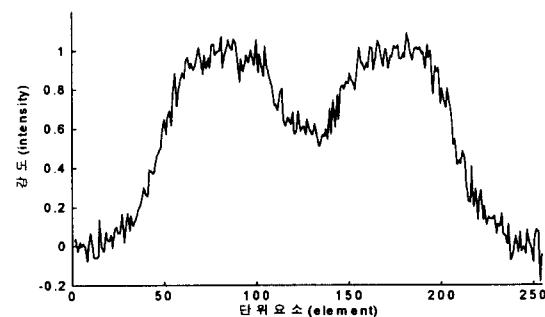


그림 13 HTS를 사용하여 복원된 첫 번째 공간의 스펙트럼

Fig. 13 Recovered spectrum in the 1st space using HTS

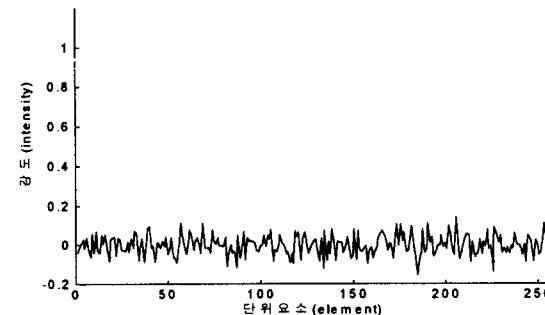


그림 14 HTS를 사용하여 복원된 31번째 공간의 스펙트럼

Fig. 14 Recovered spectrum in 31th space using HTS

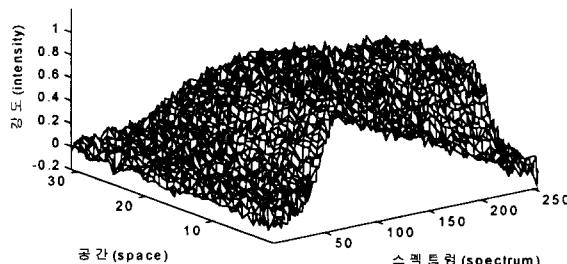


그림 15 HTS를 사용하여 복원된 스펙트럼의 투시도
Fig. 15 The perspective of recovered spectrum using HTS

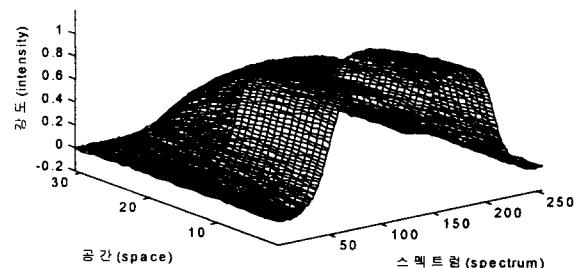


그림 18 HTIS를 사용하여 복원된 스펙트럼의 3차원 투시도
Fig. 18 The perspective of recovered spectrum using HTIS

다음은 본 논문에서 제안하는 HTIS에 의한 스펙트럼의 복원결과를 보여준다. 그림 16과 그림 17은 각각 첫 번째, 31번째 공간의 복원된 스펙트럼을 나타낸다. 이는 기존의 HTS에 비해 측정잡음이 월등히 줄어드는 것을 알 수 있다. 그림 18은 HTIS를 사용하여 복원된 전체공간에 대한 투시도이다. HTS시스템과 비교해 복원성능이 월등히 뛰어나다. HTIS의 평균 MSE는 4.25×10^{-5} 이다. 이는 HTS의 평균 MSE의 1/64에 해당하며 측정에러의 분산 0.1과 비교해 1/2352에 해당한다. 따라서 제안한 시스템은 검파기의 측정잡음을 충분히 감소시키는 성능을 지니고 있음을 알 수 있다.

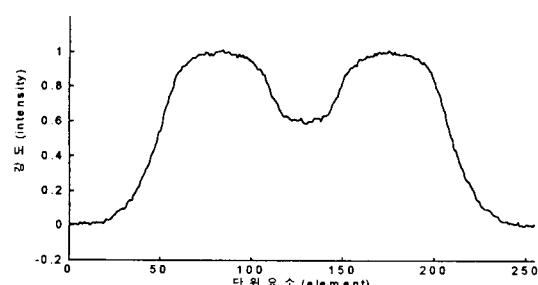


그림 16 HTIS를 사용하여 복원된 첫 번째 공간의 스펙트럼
Fig. 16 Recovered spectrum in the 1st space using HTIS

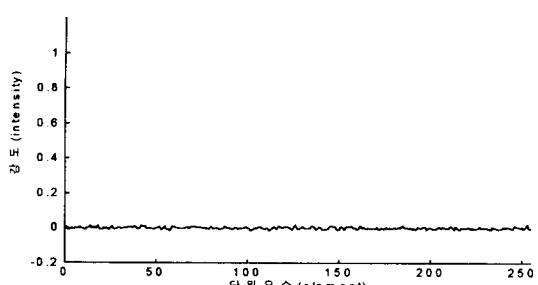


그림 17 HTIS를 사용하여 복원된 31번째 공간의 스펙트럼
Fig. 17 Recovered spectrum in the 31st space using HTIS

표 1 공간 횟수에 따른 3가지 시스템의 평균 MSE비교

Table 1 Average MSE comparison of the three systems

	Monochromator	HTS	HTIS
1회	0.1	2.7×10^{-3}	4.25×10^{-5}
10회	0.01	2.7×10^{-4}	4.25×10^{-6}
100회	0.001	2.7×10^{-5}	4.25×10^{-7}

4. 결 론

본 논문에서는 그릴 스펙트로미터를 하다마드 트랜스폼 이미징 스펙트로미터에 적용하기 위해 left cyclic S행렬을 그릴 스펙트로미터에 적용할 수 있음을 보였으며 이를 이용한 HTIS시스템을 구성하였다. 마스크의 비이상적인 특성을 보정하는 T^{-1} 방법을 제시하였으며 이를 제안한 시스템에 적용하여 스펙트럼 복원을 위한 고속 알고리듬을 완성하였다. 그릴 스펙트로미터는 입력과 출력에 각각 하나씩, 2개의 마스크를 가지고 2번의 부호화를 수행하므로 기존의 HTS에 비해 개선된 스펙트럼을 얻을 수 있다. 표 1의 결과에서 알 수 있듯이 제안된 시스템은 기존의 시스템에 비해 측정잡음을 충분히 감소시킨다.

감사의 글

본 논문은 1995년 한국학술진흥재단 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음(과제번호: 01E0759)

참 고 문 헌

- [1] Ruth A. Dyer, Stephen A. Dyer, Brian K. Harms, Timouthy W. Johnson and Jin Bae Park,

"Implementation Problems in Hadamard Transform Spectrometry", *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, Vol. 39, No. 1, pp. 163-167, February 1990.

- [2] Stephen A. Dyer and Jin Bae Park, "The Effect of a Single Defective Mask Element on the Multiplex Advantage in Hadamard Transform Spectroscopy", *Applied Spectroscopy*, Vol. 43, No. 2, pp. 278-283, 1989.
- [3] S. A. Dyer, B. K. Harms, J. B. Park, T. W. Johnson and R. A. Dyer, "A Fast Spectrum-Recovery Method for Hadamard Transform Spectrometers Having Nonideal Masks", *Applied Spectroscopy*, Vol. 43, No. 3, pp. 435-440, March/April 1989.
- [4] M. Harwit and N. J. A. Sloane, *Hadamard Transform Optics*, Academic Press, New York, 1979.
- [5] B. K. Harms, J. B. Park and S. A. Dyer, "On the Use of Fast Hadamard Transform for Spectrum-Recovery in Hadamard Transform Spectroscopy", *Applied Spectroscopy*, Vol. 46, No. 9, pp. 1358-1361, Nov. 1992.
- [6] G. H. Golub and C. F. Van Loan, "Matrix Computations", The Johns Hopkins University Press, Baltimore, pp. 3(1983).
- [7] J. B. Park, T. W. Johnson, S. A. Dyer, B. K. Harms, and R. A. Dyer, "On the Mean Square Error of Various Spectrum-Recovery Techniques in Hadamard Transform Spectrometry", *Applied Spectroscopy*, Vol 44, No. 2, pp. 219-228, 1990
- [8] T. W. Johnson, J. B. Park, S. A. Dyer, B. K. Harms and R. A. Dyer, "An Efficient Method for Recovering Optimal Unbiased Linear Spectrum-Estimate from Hadamard Transform Spectrometers Having Nonideal Masks", *Applied Spectroscopy*, Vol. 43, No. 5, pp. 746-750, July. 1989.
- [9] D. C. Tilotta, R. M. Hammaker, and W. G. Fateley, "A Visible Near-Infrared Hadamard Transform Spectrometer Based on a Liquid Crystal Spatial Light Modular Array: A New Approach in Spectrometry", *Applied Spectroscopy*, Vol. 41, pp. 727-734, 1987 .
- [10] E. D. Nelson and M. L. Fredman, "Hadamard Spectroscopy", *J. Opt. Soc. Amer.*, Vol. 60, pp. 1664-1669, 1970.
- [11] 박진배, 김현규, "하다마드 분광계측기의 최적마스크 설계", 대한 의용 생체 공학회지 (*Journal of the Korea Society of Medical and Biological Engineering*), 제 16 권, 제 2 호, 1995.

저 자 소 개



박 진 배 (朴 珍 培)

1954년 8월 7일 생. 1977년 연세대 전기 공학과 졸업(공학사). 1985년 미국 Kansas State Univ. 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1990년 미국 Kansas State Univ. 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(공박). 현재 연세대학교 전기공학과 부교수.

Tel : (02) 361-2773

E-mail : jbpark@bubble.yonsei.ac.kr



곽 대 연 (郭 大 淵)

1972년 8월 28일 생. 1996년 연세대 전기 공학과 졸업(공학사). 1998년 동대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 대우전자. 디지털 정보통신연구2팀 연구원

Tel : (02) 751-1366

E-mail : dykwak@dit.dwe.co.kr



진 승 희 (陳 承 熙)

1970년 12월 22일 생. 1993년 연세대 전기공학과 졸업(공학사). 1995년 동대학원 전기공학과 졸업(석사). 1997년~현재 동대학원 전기 및 컴퓨터 공학과 박사과정

Tel : (02) 361-2773

E-mail : shjin@control.yonsei.ac.kr



주 진 만 (朱 鎭 晚)

1970년 10월 26일 생. 1993년 연세대 전기공학과 졸업(공학사). 1995년 동대학원 전기공학과 졸업(석사). 1995년~현재 동대학원 전기 및 컴퓨터 공학과 박사과정

Tel : (02) 361-2773

E-mail : jmjoo@control.yonsei.ac.kr