K-Space의 원리

오 창 현[1] · 이 성 우[2]

서 론

여기서는 자기공명영상촬영(MRI, Magnetic Resonance Imaging)의 원리를 이해하는데 중요한 k-space에 관해 설명을 하려한다. MRI에서 k-space란 공간좌표에 해당하는 3차원 공간(x, y, z)을 Fourier변환(FT, Fourier Transform)한 주파수 공간(k_x, k_y, k_z)을 의미한다.

MRI에서는 공간적 위치정보를 세 방향의 경사자계(Magnetic Gradient Field)를 이용해서 얻게 된다. 여기(Excitation)된 스핀자화(Spin Magnetization)는 경사자계를 가하면 경사자계에 비례하는 주파수로 회전하게 되며 그로부터의 시그널(NMR시그널, Nuclear Magnetic Resonance Signal)은 공간의 스핀 분포를 Fourier 변환한 주파수 영역(k-space)에서의 값이 된다. NMR 시그널은 가해준 경사자계에 따라 k-space를 움직인다. 이렇게 얻은 2차원 혹은 3차원 데이터를 Inverse Fourier Transform하여 영상을 얻게 된다. 여기서는 k-space의 주파수 데이터의 의미와 NMR시그널과의 연관성을 살펴보기로 하겠다.

경사자계하에서의 NMR 시그널의 형성(1, 2)

90° RF(Radio Frequency)펄스로 equilibrium magnetization을 회전시켜 transverse plane(x-y평면)상에 놓은 후 경사자계를 가하면서 NMR시그널을 받는다고 가정하면 위치에 따른 magnetization(M_{xy}(x, y, z, t))은 아래의 식으로 주어진다.

$$M_{xy}(x,y,z,t) = M_0\,\rho(x,y,z)\exp\{-i\gamma(x\int_0^t G_x dt + y\int_0^t G_y dt + z\int_0^t G_z dt)\} \qquad [1]$$

여기서 ρ는 스핀밀도, G_x, G_y, G_z는 각 방향 경사자계의 크기이고 주자계에 의한 Larmor 주파수성분 ($e^{i\omega_0 t}$)은 생략되었다.

여기된 volume내의 M_{xy}를 적분하면 NMR시그널(S(t))은

$$S(t) = \int\int\int M_{xy}(x,y,z,t)\,dxdydz \qquad [2]$$

와 같이 얻어진다.

$z=z_0$ 평면내의 spin이 선택된 경우 그 평면 내에서 2차원적으로 분포된 스핀으로부터의 시그널은 아래와 같이 구할 수 있다. 경사자계가 G_x, G_y로 고정되어 있고 그 길이가 각각 t_x, t_y이라면

$$\begin{aligned} S(t_x,t_y) &= M_0\int\int \rho(x,y;z=z_0)\,e^{i\gamma(xG_xt_x+yG_yt_y)}dydx \\ &= M_0\int[\int\rho(x,y;z=z_0)e^{i\gamma yG_yt_y}dy]\,e^{i\gamma xG_xt_x}dx \qquad [3] \end{aligned}$$

가 된다. 예를 들어 위 식[3]의 [·]내에 해당하는 y 경사자계만 가해지는 경우의 magnetization의 회전을 보이면 다음 Fig.1과 같이 된다. (a)는 G_y를 가하기 전의 분포이고 (b)는 일정 시간 경사자계를 가한 후 y좌표에 비례하여 magnetization이 회전한 후의 분포이다. 즉, y 좌표에 비례하는 정도로 위상이 변하게 되며 받는 최종NMR 시그널은 이런 위상의 magnetization을 공간적분한 위식의 [·]속의 값이 된다. 추가로 x 경사자계를 가한 경우에는 x좌표와 경사자계의 길이에 비례하여 추가로 위상이 변하게 된다.

모든 t_x와 t_y의 값의 combination에 해당되는 S(t_x, t_y)를 구하면 이 값이 바로 2차원 k-space (k_x, k_y)의 값이 된다. 이를 얻기 위해 보통 t_x, t_y중 하나를 고정한 후(encoding gradient 방향) 나머지 경사자계를 가하면서(reading gradient 방향) 데이터를 얻는다.

일차원 K-Space 시그널의 형성

일차원 k-space 시그널의 형성을 좀더 자세히 그림을 이용하

대한자기공명의과학회지 3:1-5(1999)
[1]고려대학교 전자 및 정보공학부
[2]동국대학교 의과대학 진단방사선과
접 수 : 1998년 12월 1일, 채 택 : 99년 2월 5일
통신저자 : 오창현 서울시 성북구 안암5가 133-6 고려대학교 의료영상시스템연구실
Tel. 82-2-924-4243 Fax. 82-2-924-4294

여 설명하면 아래와 같다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 y 방향으로만 경사자계가 가해졌을 경우 y 좌표에 따라 공명주파수가 다르게 되어 그림에서 보는 것처럼 y 좌표에 따라 다른 주파수의 시그널이 나온다. 이런 시그널이 합해져서 나오는 경우 진동을 하면서 줄어드는 Fig. 2와 같은 NMR 시그널이 나오게 된다. 이 시그널이 y 축에 대응되는 1차원 k_y 축 상의 k-space 신호가 되는 것이다. 이 k_y-space상의 시그널이 식[3]의 [·]내의 부분이 된다.

Fig. 3은 위의 Fig. 2에서 설명된 NMR 시그널을 다른 방법으로 해석한 것으로서 진동하면서 감쇠하는 시그널을 uniform하게 가정된 y방향 스핀분포의 Sine 함수의 weighted sum으로 해석한 것으로서 일차원 k-space 시그널의 형성과정을 보여주고 있다.

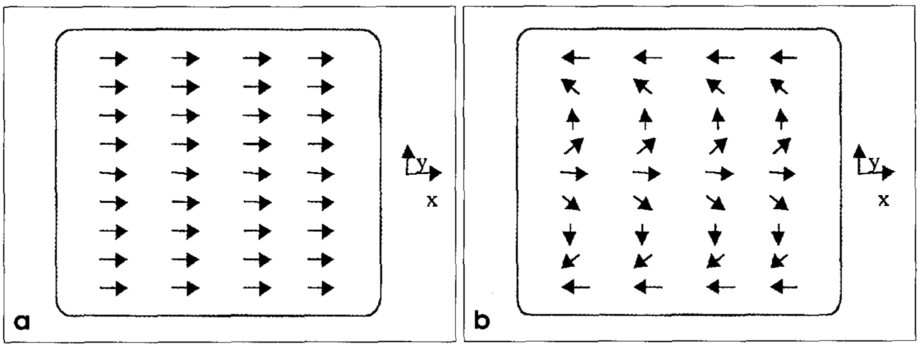

Fig. 1. Y 경사자계를 가하기 전(**a**)과 y 경사자계를 일정시간 가한 후의 magnetization의 위상분포(**b**).

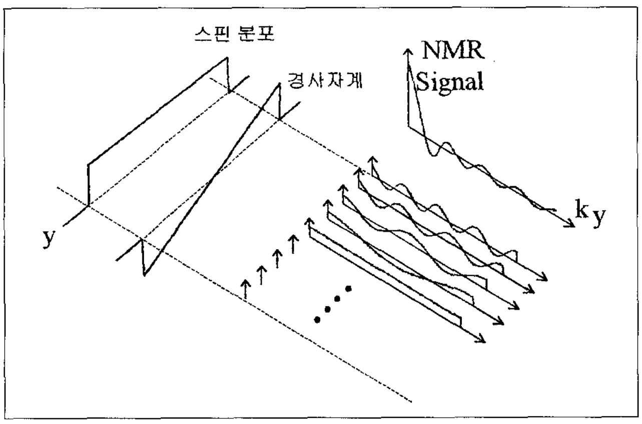

Fig. 2. Y축 방향 경사자계 하에서의 NMR 시그널의 형성

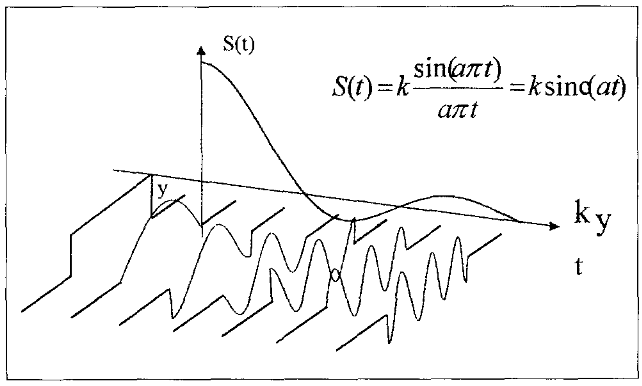

Fig. 3. Sine 함수의 weighted sum으로 해석한 일차원 k-space 데이터. 스핀분포는 균일한 것으로 가정했다.

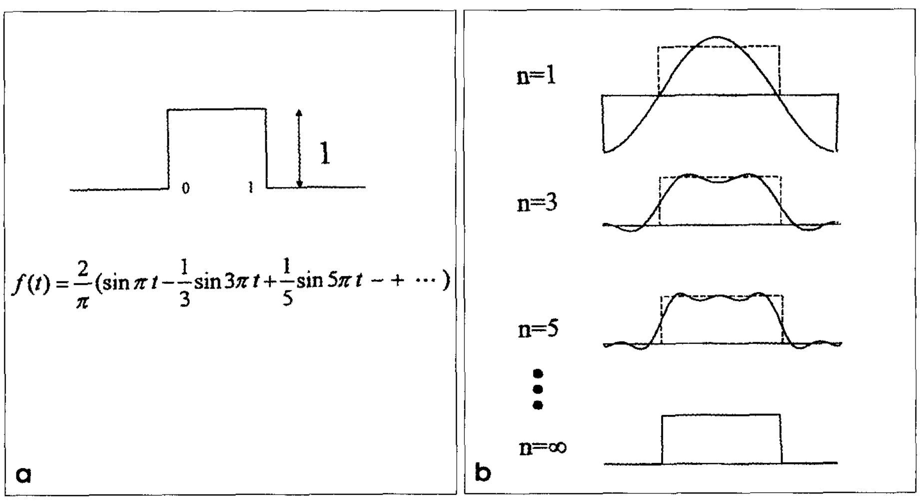

Fig. 4. Fourier Series를 사용한 사각(Square)파형의 근사.
(**a**) 사각파형과 근사식.
(**b**) 근사식의 항의 추가에 따른 사각파형의 형성.

K-Space와 Fourier Series(3)

주어진 구간 ($-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$) 내의 임의의 모양을 표시하는 함수 f(t)는 sine과 cosine함수의 조합으로 표시된다. 이를 식으로 표시한 것을 Fourier Series 전개라고 하며 이는 다음과 같이 표현된다.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=0} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \qquad (4)$$

단, $\omega_0 = 2\pi/T$, $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t dt$,

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t dt \qquad (5)$$

여기에서 많은 개수의 항으로 표현할수록 원래 모양을 정확히 표시할 수 있다. 이 내용은 exponential 함수를 사용하여 아래와 같이 표현된다.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \qquad (6)$$

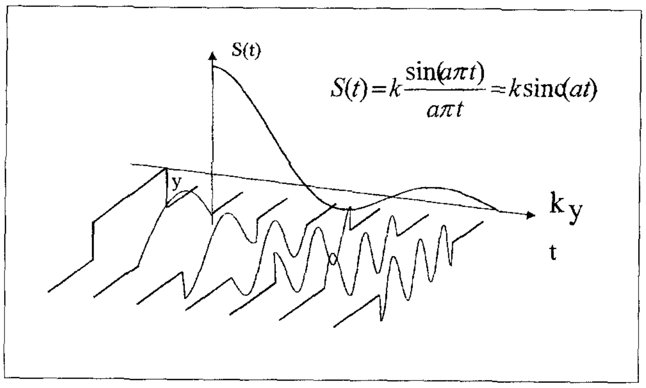

Fig. 5. Fourier 상수 C_n을 이용한 NMR 시그널의 형성의 설명

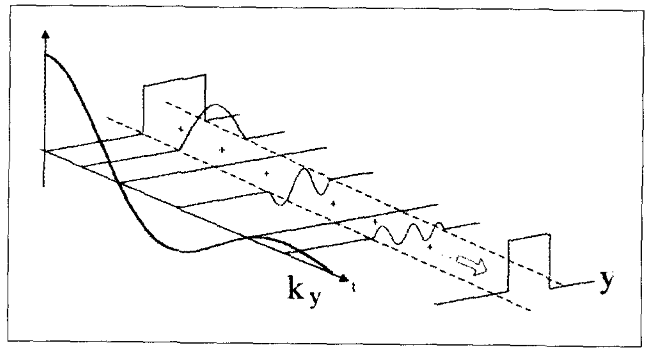

Fig. 6. NMR 시그널로부터 스핀분포의 재구성(Inverse Fourier Transform)

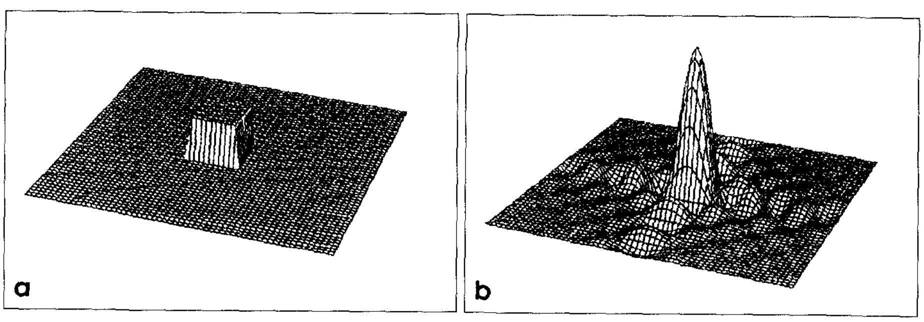

Fig. 7. 사각형 모양의 Phantom과 그 k-space데이터
(**a**) Phantom의 모양
(**b**) (**a**)의 k-space데이터

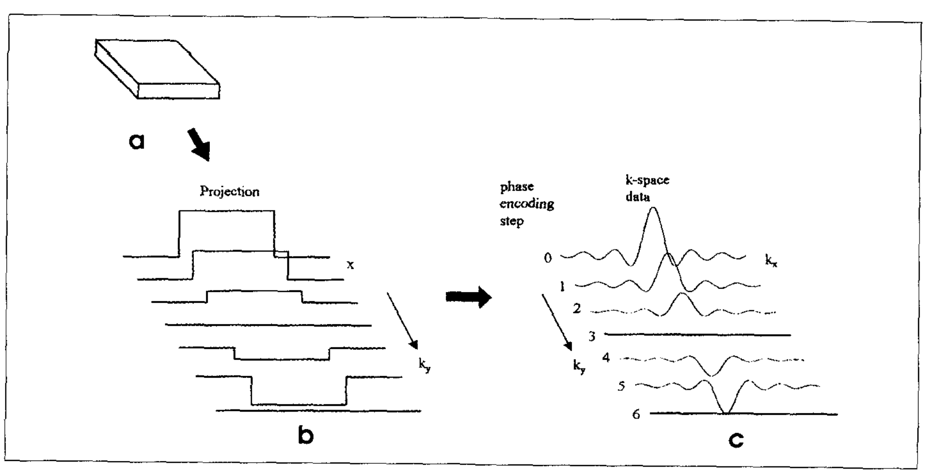

Fig. 8. 2차원 k-space 데이터의 형성.
(**a**) 1 스핀의 공간 분포
(**b**) y경사자계를 이용한 k_y방향 k-space 데이터 획득
(**c**) 고정된 k_y값을 이용한 k_x방향 데이터 획득 및 이를 이용한 2차원 데이터 전체의 획득.
Fig. 7.(**b**)와 같은 데이터임.

단, $c_n = c^*_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{in\omega_0 t}dt$ 〔7〕

예를 들어 0 1 1 과 같은 함수는

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sin\pi t + \frac{1}{3}\sin 3\pi t + \frac{1}{5}\sin 5\pi t \cdots \qquad [8]$$

와 같이 표현된다(Fig. 4 참조). 위의 C_n은 MRI에서 한 방향의 경사자계를 가하면서 sampling한 FID 시그널의 값(앞 절 참조)과 같은 모양의 식임을 알 수 있다. 즉, 식〔3〕의 〔·〕안과 식〔7〕이 같은 모양이 되는 것이다. Fig. 5에서는 Fourier series

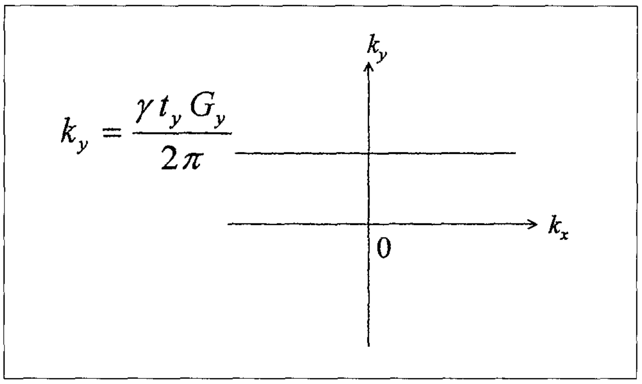

Fig. 9. 2차원 k-space 선상에서 고정된 k_y값의 k_x방향 데이터 획득

의 상수 C_n이 바로 NMR 시그널의 값과 같게 되는 것을 그림으로 설명했다.

NMR 시그널(혹은 C_n)으로부터 원래의 스핀분포는 식〔4〕 또는 식〔6〕을 사용하여 구할 수 있다. 이를 그림으로 보인 것이 Fig. 6으로서 앞의 NMR 시그널의 형성과는 반대방향인 원래 함수의 계산방법을 알 수 있다.

2차원 K-Space 데이터의 생성과 이 데이터를 사용한 원래 스핀분포의 재구성

Fig. 7(a)에 2차원적으로 사각형모양으로 분포되어있는 함수 f(x,y)를 보였다. 이를 FT한 함수 즉 k-space데이터는 Fig. 7(b)와 같이 된다. 이를 좀더 자세히 Fig. 8로 설명하자. 즉, y 방향으로 경사자계를 가했을 경우 k_y 축으로 먼저 1차원 Fourier transform 한 모양의 시그널이 형성되는데 k_y 방향으로 어느정도 내려간 상태에서 y 경사자계를 멈춘 후 x 경사자계를 가하면 Fig. 8(c)와 같이 $k_x = k_y$ 평면상의 한 직선상의 시그널이 나오게 된다(Fig. 9 참조). 다른 선의 데이터는 y 경사자계의 길이를 바꾸며 같은 x 경사자계를 가하며 데이터를 받으면 되며 이를 반복하여 2 차원 k_x-k_y space상의 데이터전체를 얻을 수 있다.

즉, 이 k-space는 Gx, Gy를 변화함에 따라 scanning하게 되며, $k_x = \frac{\gamma t_x G_x}{2\pi}$, $k_y = \frac{\gamma t_y G_y}{2\pi}$의 관계식을 사용하여 경사자계 후의 k-space에서의 위치를 알 수 있다.

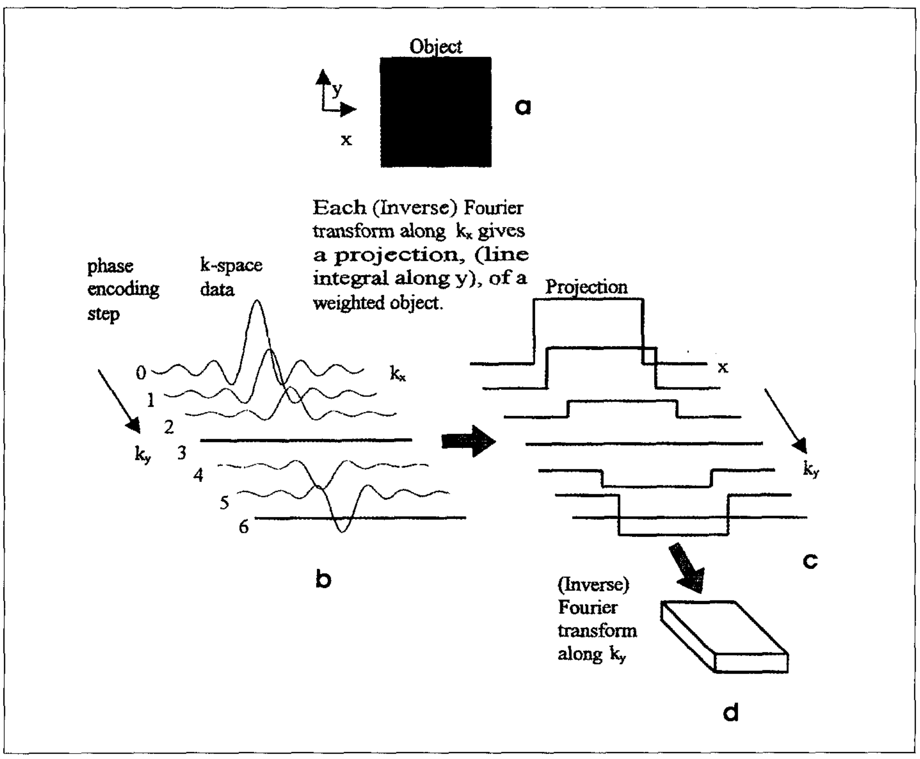

Fig. 10. 2차원 k-space 데이터로부터 MR영상재구성
(**a**) 원래의 영상 (**Fig. 7**(**a**)와 같음)
(**b**) 2차원 k-space데이터.
Fig. 7(**b**)의 값을 그래프로 그린 것.
(**c**) (**b**)의 데이터를 k_x방향으로 1D IFT 한 데이터
(**d**) (**c**)의 데이터를 k_y방향으로 1D IFT 한 데이터. 재구성된 영상을 나타낸다.

K-Space 데이터로부터 스핀분포의 계산

K-space의 값은 원래의 함수를 FT 한 값이므로 이를 IFT(Inverse Fourier Transform)함으로써 원래 함수를 재구성할 수 있다. 이는 앞 절의 C_n으로부터 f(t)를 재구성하는 것과 마찬가지이다.

예를 들어서 위의 Fig.7의 데이터를 사용한 영상재구성 단계를 설명하면 아래와 같다. 즉, 이 k-space의 데이터(Fig. 7(b))에 Fig. 10에서 보는 바와 같이 좌-우, 상-하 방향의 두 번의 IFT를 수행함으로써 spin 분포를 구할 수 있으며 이를 영상재구성이라 한다. 즉, Fig. 8의 역순서로 원래의 스핀분포를 얻을 수 있는 것이다.

결 론

이 글에서는 MRI에서 k-space데이터의 원리와 이를 이용한 영상재구성에 관해 설명했다. 경사자계 하에서 얻은 NMR 시그널은 Spin의 분포를 Fourier Transform한 k-space의 데이터가 되는 것을 알 수 있었다. 이차원 k-space상의 위치는 각 경사자계의 적분으로 구할 수 있었다. 또한 2-D k-space 데이터를 2차원의 Inverse Fourier Transform함으로써 MR영상이 재구성됨을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Z. H. Cho, Joie P. Jones, Manbir Singh, "Foundations of medical imaging," John Wiley & Sons, Inc., 1993.
2. Marinus T. Varrdingerbroek, Jacques A. den Boer, "Magnetic resonance imaging theory and practice," Springer, 1996.
3. Ronald N. Bracewell, "The Fourier Transform and its applications," 2nd edition," Mc GRAW-HILL, 1986.