

초청논문

Wu 불변거리 연구에 관하여

김 강 태

요약문. Berkeley의 H. Wu 교수에 의하여 1993년에 제창된 Wu 거리는 다변수 복소함수론의 기하학적 연구에 중심적인 역할을 하는 여러 불변거리 중 가장 최근에 발견되었다. 짧은 역사에도 불구하고 이 개념의 유용성이 두드러지는 점을 감안하여, 이 연구의 내용과 전망 그리고 여러 관련 문제 등을 소개하려는 것이 이 논문의 목표이다.

1. 개관

복소함수론의 연구는 해석학의 범주에 속하며, 해석학적 방법론으로 연구되는 것이 일반적이지만, 복소해석함수가 지니는 자연적인 기하학적 특성 때문에 복소함수론 연구에서는 이의 기하학적인 연구 또한 매우 중요하다.

1900년대 초에 슈바르츠 보조정리의 기하학적인 이해가 대두됨과 거의 동시에, 포앙카레 거리 개념이 복소함수론의 관점에서 다시 인식된 것을 필두로 하여, 1930년대부터 지금에 이르기까지 포앙카레 거리 개념을 일반화한 베르그

Received March 22, 1999.

1991 Mathematics Subject Classification: 32, 53.

Key words and phrases: Wu 거리, 축약거리계, 곡률, 기하학적 함수론.

이 논문의 내용은 1999년 1월 18일부터 22일까지 이탈리아 피렌체 대학에서 저자가 발표한 다변수 복소함수론 집중 강연의 내용을 토대로 한 것이므로, 초청과 강연회 조직 및 편의 제공 및 연구 지원에 수고를 아끼지 않으신 피렌체 대학과 관계자 여러분에게 감사의 뜻을 표합니다.

이 논문에 관한 저자의 연구는 한국과학재단 핵심전문 연구 981-0104-018-2 의 지원과 이탈리아 피렌체 대학의 연구 지원으로 이루어진 것입니다.

만, 카라테오도리, 고바야시, 아인슈타인-캘러 거리 등 소위 불변거리(invariant metric) 개념에 관하여 빛나는 업적이 수없이 축적된 것에서 보듯이, 불변거리 계의 연구가 다변수 복소함수론과 복소기하학 분야의 연구에서 중심적인 역할을 담당하여 왔다는 주장은 결코 과언이 아니다.

위에 나열한 불변거리들은 매우 잘 알려진 유명한 연구 대상일 뿐 아니라, 각각 독특한 장점을 가지고 복소함수론의 기하학적 연구에 매우 큰 기여를 하였지만, 다른 한편으로는 이를 각각이 지닌 구조적인 단점으로 인하여, 기대하는 만큼의 연구 결과를 얻지 못하는 경우가 있기도 하였다. 예를 들어, 고바야시 거리와 카라테오도리 거리는 모든 해석가능 사상을 축약사상이 되게하는 큰 장점이 있으나 거리 자체가 에르미뜨 형이 아니어서 미분기하학적 방법론의 적용에 한계를 보이는 단점이 있으며, 베르그만 거리와 아인슈타인-캘러 거리는 캘러형이어서 곡률 이론 등의 미분기하학적 방법론의 적용이 용이한 장점이 있으나 쌍대성이 없는 일반 해석사상의 연구에는 매우 제한적으로 밖에 쓰이지 못하는 어려운 단점을 또한 가지고 있다.

이러한 점을 보완하기 위하여 일반 해석사상의 연구에 유용한 축약성을 지니면서도 동시에 에르미뜨형인 새로운 불변 거리를 발견할 필요가 있었으며, 이러한 성질을 지닌 불변 거리로서 첫 번째로 발견된 개념이 제1종 Wu 거리인 것이다.

Wu 거리의 연구는 1993년 Wu 교수의 논문 [42]에서 처음 발표되었으며, 이후 본 논문의 저자와 Cheung 교수, Pagano 박사 등에 의하여 연구가 진행되어, 그 유용함이 서서히 알려지고 있는 비교적 새로운 시도라 하겠다. ([10, 11], [26]) 따라서 이 논문의 목표는, 현재까지 진행된 연구와 연구 방법등을 소개하고 앞으로 해결을 필요로 하는 연구 문제를 제시하여 이 분야 연구에 대한 관심을 고조시키고자 하는 것이다.

이 논문의 내용은 비 전문가를 염두에 두고 개략적인 관점을 제시하는 데에 중점을 두는 한편, 지나치게 기술적이고 난삽한 계산이나 논증을 피하도록 구성하였다.

제2절 이후 본 논문의 엘개는 대략 다음과 같다.

제2절에서는 포앙카레 거리 개념과 그 확장 개념인 코바야시 거리계를 먼저 소개하고, 이를 기초로 하여 이 논문의 주제인 Wu 거리 개념중 제1종 Wu 거리를 구성할 예정이다. 비교적 자연스럽게 이러한 개념에 친숙하여 질 수 있도록 불변 거리 개념이 복소함수론에 미치는 영향 등도 함께 소개하려고 한다. 제3절에서는 제1종 Wu 거리의 곡률에 관한 미분기하학적 고찰과 더불어 이에 관련되어 진행된 여러 연구 결과, 그리고 앞으로 해결하여야 할 연구 문제등을 소개할 것이다. 제4절에서는 제2종 Wu 거리계를 소개할 예정이다. 보다 구체적으로는 카라테오도리 거리 개념을 바탕으로 하여 구성된 이 거리 개념을 이용하여 카라테오도리 쌍곡성을 가지는 콤팩트 복소다양체가 항상 복소 사영공간 속에 대수다양체로서 매립될 수 있음을 보인 Wu의 정리를 증명하고, 이에 관련된 연구 문제도 소개하려고 한다. 마지막 제5절에서는 의사불록 영역의 자기동형군 연구와 관련하여 측도 확대법과 대칭성 구성에 필요한 제1종 Wu거리의 역할과 그 응용을 소개하려고 한다.

이러한 일련의 토의를 통하여, 다변복소함수론 연구에서 Wu 거리에 관한 관심을 높이는 데에 이 논문이 기여할 수 있기를 희망한다.

2. 배경 소개와 제1종 Wu 거리의 구성

2.1. 포앙카레 거리 개념과 슈바르츠 보조정리

먼저, 모든 불변거리계의 기본이 되는 포앙카레 거리 개념을 소개하려고 한다.

복소 평면 \mathbf{C} 안에 들어 있는 단위원반영역 $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ 를 생각하자. 영역 D 안의 점 z 와 벡터 $v \in \mathbf{C}$ 가 주어졌을 때, v 를 점 z 가 시작점인 벡터로 여기고 그 길이 $\|v\|$ 를 구하는 방법을

$$\|v\| = \frac{|v|}{1 - |z|^2}$$

로 정의하자. 이것이 유명한 “포앙카레 길이”이다.

물론, 이렇게 무미건조한 정의로서 그칠 예정은 아니다. 지금부터 이 개념의 의미와 용도를 보다 깊이 그리고 단계적으로 생각하여 보기로 하자.

먼저, 시점을 z 로 하는 벡터 v 의 길이 $\|v\|$ 의 값은 시점의 위치에 종속되어 변하므로 (때로는, 시점에 관한 종속성을 강조하여 $\|v\|_z$ 로 쓰기도 함) 복소 평면 위에서는 같은 유clidean 길이, 즉 같은 절대값을 가지는 벡터라 하더라도 시점이 다르면 대응되는 포앙카레 길이가 다를 수 있다. 예를 들어, 시점 z 가 단위원반영역의 경계인 단위원에 매우 가까우면, 복소 평면의 원소로서 길이가 1인 벡터라도 그의 포앙카레 길이가 매우 크게 될 수 있음을 확인하기 바란다.

이제 포앙카레 길이 개념을 이용하여 곡선의 길이를 정의하려고 한다. 단위원반영역 D 안에 있는 미분가능한 곡선 $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 이 주어졌을 때, 이 곡선의 유clidean 길이는 공식

$$L_{\text{euc}}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

에 의하여 계산되지만, 이 곡선의 포앙카레 길이는 시작점이 $\gamma(t)$ 인 벡터 $\gamma'(t)$ 의 포앙카레 길이를 표시하는 공식

$$L_P(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt$$

으로 주어진다. 예를 들어 점 0과 양수점 r 을 잇는 직선 $\gamma(t) = t, (0 \leq t \leq r)$ 의 포앙카레 길이는

$$L_P(\gamma) = \int_0^r \frac{dt}{1 - t^2} = \tanh^{-1} r$$

이며, 이 값은 r 의 값이 1에 접근함에 따라 무한대로 발산한다. 따라서 유clidean 길이로는 단위원의 반지름을 나타내는 선분의 길이가 1이지만, 이 선분의 포앙카레 길이는 무한대가 되는 것이다.

이제 두 점 사이의 포앙카레 거리를 정의하여 보자. 단위원반영역 안에 주어진 두 점 p, q 사이의 포앙카레 거리는 두 점을 잇는 미분가능한 모든 곡선의 포앙카레 길이 값들 모두 모은 집합의 최대 하한값 (infimum) 으로 정하는 것이 자연스럽고, 이를 기호로 $d_P(p, q)$ 로 표시하기로 한다. (참고로, $d_P(0, z) = \tanh^{-1} |z|$ 가 성립함을 계산으로 증명할 수 있는데, 이 사실은 독자 스스로 검증하도록 설명 없이 둔다. [32] 참조.)

이제는 이 포앙카레 길이와 포앙카레 거리 등이 가지는 의미를 생각할 시점이 되었다.¹ 이 개념의 효율적인 이해를 위하여는 복소 함수론의 기본정리 중 하나인 슈바르츠 보조 정리와 이를 개선한 슈바르츠-푀 보조정리를 생각하는 것이 올바르다.

정리 1. (슈바르츠-푀 보조정리) 복소평면 안에 있는 단위원반 영역 D 를 정의역과 치역으로 가지는 해석가능 사상 $f : D \rightarrow D$ 는 모두 부등식

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad \forall z \in D$$

를 만족한다. 영역 D 상의 어느 한 점 z 에서라도 위 부등식의 등호가 성립하면, 사상 f 는 쌍대사상이 된다.

이 정리의 증명은 슈바르츠 보조정리로부터 쉽게 얻어진다.² 그러나, 이 정리의 의의는 증명에 있는 것이 아니라, 포앙카레 거리에 이 정리를 응용함에 있다. 즉, 위의 정리를 포앙카레 거리 개념의 관점에서 다시 쓰면 아래의 명제를 얻는다.

¹ 리만 기하학의 전통을 따라 벡터의 포앙카레 길이와 두 점 사이의 포앙카레 거리를, 영어권에서는 각각 The Poincaré metric, The Poincaré distance 등으로 부르고 (때로는 둘을 구분하지 않고 Poincaré metric 으로 통칭하기도 함) 곡선의 포앙카레 길이는 The Poincaré arc length 라는 용어를 사용하나, 우리말의 구조상 벡터의 길이와 곡선의 길이를 이 논문에서 구분 없이 사용하는 점에 관하여 독자의 양해를 구한다.

² 단위원반 영역 안에서, 임의의 점 z 에 관하여, 점 0 을 점 z 로 보내는 뢰비우스 사상 ϕ 와, 점 $f(z)$ 를 0 으로 보내는 뢰비우스 사상 ψ 를 f 와 합성한 함수 $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi$ 가 조건 $\tilde{f}(0) = 0$ 를 만족하므로, 이 함수에 슈바르츠 보조정리를 적용하면 부등식 $|\tilde{f}'(0)| \leq 1$ 을 얻는다. 이를 풀어 쓰면 슈바르츠-푀 보조정리의 결론을 얻는다.

명제 1. 단위원반 영역 D 를 정의역과 치역으로 하는 임의의 해석가능 함수 $f : D \rightarrow D$ 와 임의의 매끄러운 곡선 $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ 는 부등식

$$L_P(f \circ \gamma) \leq L_P(\gamma)$$

를 만족한다.

이로부터 얻을 수 있는 결론을 정리하면 다음과 같다.

(가) 단위원반 영역내에서 해석 가능 사상에 의하여 곡선을 변환하면, 변환된 곡선의 포앙카레 길이는 변환 전 곡선의 포앙카레 길이보다 줄어든다. 따라서 단위 원반을 정의역과 치역으로 하는 모든 해석 가능 사상은 포앙카레 거리 축약 사상이다. 이를 수식으로 표시하여,

$$\|df(z)v\|_{f(z)} \leq \|v\|_z, \quad \forall z \in D$$

와

$$d_P(f(z), f(w)) \leq d_P(z, w), \quad \forall z, w \in D$$

로 쓰고, 미분기하학에서 통용되는 기호를 사용하는 경우에는

$$f^* \|\cdot\| \leq \|\cdot\| \text{ 와 } f^* d_P \leq d_P$$

등으로 쓴다.

(나) 위의 경우, 사상 f 가 쌍대사상이면 그 역사상도 단위원반 영역을 정의역과 치역으로 가지는 해석 사상이 되므로, 위 (가) 의 결과를 f^{-1} 에 적용하면 사상 f 에 대하여는 부등식 (가) 가 등식으로서 성립하게 된다. 따라서, 정의역과 치역이 모두 단위원반 영역인 쌍대 해석가능 사상은 (이러한 사상을 ‘자기동형’ 이라 부름) 포앙카레 거리를 보존하는 등거리 사상이 된다는 것을 알 수 있다.

이로부터 당장에 포앙카레 거리 개념의 특별한 점을 보게 되지만 이 개념의 유용성은 여기에 그치지 않는다. 함수론 자체로 보더라도, 단위원반 영역을 정의역과 치역으로 가지는 해석 사상 중에서, 단위원반 영역 위에 주어진 두 점 p, q 를 다른 두 점 a, b 로 각각 대응시키는 것을 찾는 매우 간단한 보간법 문제를 생각하여 보더라도, 이 문제의 답이 존재하기 위한 필요 조건으로서

$d_P(a, b) \leq d_P(p, q)$ 가 작용함을 알 수 있다. (실제로, 이 조건은 충분조건도 되지만 이 논문의 중심 주제가 아니므로 일반적인 보간법에 관한 논의는 생략 한다.) 기하학의 입장에서 보면 포앙카레 거리 개념의 의의는 더욱 크다. 미분 기하학의 전통적인 기호를 쓰면, 위에서 소개한 포앙카레 거리는

$$ds^2 = \frac{dz \otimes d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$$

로 표시되고, 이의 곡률을 계산하면 단위원반 영역의 모든 점에서 -4 가 된다. 즉, 음의 상수 곡률을 가지는 완비공간의 대표적인 예가 되는 것이다.³

2.2. 포앙카레 거리의 일반화

포앙카레 거리 개념 자체도 유용하겠으나, 다양한 정의역과 치역을 가지는 해석가능 사상의 기하학적 연구를 위하여는 이러한 개념을 일반적인 영역에, 더 나아가서는 복소다양체에 포앙카레 거리 개념을 일반화한 거리 개념을 정의하는 일반적인 방법의 개발이 필요하다. 실제로 포앙카레 거리의 일반화는 여러 방식으로 이루어졌는데, 이를 정확하게 정의하여 보자. (참고로 아래의 정의는 일반적인 모든 복소 다양체에 적용되지만 이 논문에서는 내용을 단순히 하기 위하여 주로 복소 유클리드 공간 속의 영역에만 적용하려고 한다.)

복소 유클리드 공간 \mathbf{C}^n 의 부분 영역 (연결된 열린 집합) Ω 에 대하여 이의 복소 접벡터 다발 (holomorphic tangent bundle) $T\Omega$ 를 $\Omega \times \mathbf{C}^n$ 과 동일시하기로 하자. 이제 Ω 에 길이 개념을 도입하되 이를

$$F_\Omega : T\Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

로 쓰고, 이 함수가 접벡터의 길이 개념을 나타낼 수 있도록 아래 세 조건을 만족하게 한다.

- (i) $F_\Omega(z; v) \geq 0 \quad \forall (z; v) \in T\Omega$.

³일반적으로 \mathbf{R}^n 속의 단위구 영역에 포앙카레 거리를 흉내낸 리만 거리 $ds^2 = (1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^{-2}(dx_1 \otimes dx_1 + \cdots dx_n \otimes dx_n)$ 은 상수 곡률 -4 를 가지는 완비거리가 되어 음의 상수 곡률을 가지는 단순 연결 완비 실수 n 차원 리만 다양체의 대표적인 예를 제공한다.

- (ii) $F_\Omega(z; \lambda v) = |\lambda| F_\Omega(z; v), \forall (z; v) \in T\Omega, \forall \lambda \in \mathbf{C}.$
- (iii) F 는 위쪽 반연속 (upper semi-continuous) 이다.

이제, 임의의 영역 Ω 마다 이러한 종류의 '길이 함수'를 주는 대응관계 $\Omega \mapsto F_\Omega$ 를 생각하고, 이 대응 관계를 가리켜 잠정적으로 거리계 (system of metrics) 라 부르자. 그러면, 어떠한 성질을 가지는 거리계를 포앙카레 길이(거리)의 일 반화로 볼 것인가? 이제 그 답을 제시하려고 한다.

정의 1. 거리계 $F : \Omega \mapsto F_\Omega : T\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 이 임의의 영역 $G \subset \mathbf{C}^n$ 과 또다른 임의의 영역 W 사이의 해석함수 $f : G \rightarrow W$ 에 대하여 조건

$$(1) \quad f^* F_W \leq F_G$$

즉, 모든 점 $(z; v) \in T\Omega$ 에 대하여 부등식

$$F_W(f(z); df_z(v)) \leq F_G(z; v)$$

를 만족하고, 동시에 F_D 가 단위원반 영역 D 의 포앙카레 거리가 되는 조건을 만족하면, F 를 축약 거리계 (distance-decreasing metric) 라 부른다.

다시 말하면, 축약 거리계란 임의의 영역에 길이 함수 (length function) 혹은 거리 (metric) 를 대응시키되, 영역들 사이에 정의된 모든 해석 사상들이 거리 축약 사상이 되도록 하는 특별한 성질을 가지는 거리계이다. 이러한 거리계의 예를 드는 것을 잠깐 미루고, 이보다는 약간 완화된 조건을 만족시키는 불변거리계라는 개념을 소개하고자 한다.

정의 2. 위의 정의에서 모든 해석 사상에 대한 거리 축약성 조건 (1) 을, 모든 쌍대 해석 사상 $f : G \rightarrow W$ 에 대한 거리 불변성 조건

$$(2) \quad f^* F_W = F_G$$

으로 바꾸고, 이 새로운 조건을 만족하는 거리계를 불변 거리계 (invariant metric) 라고 부르기로 한다.

이 정의를 자세히 보면서, 거리 축약성 조건 (1) 이 거리 불변성 조건 (2) 를 내포하고 있음을, 즉 축약 거리계는 불변 거리계의 특수한 경우임을 확인하기 바란다.

축약, 또는 불변 거리계의 구체적인 예를 들기에 앞서, 위 거리계의 정의를 보면 소위 영벡터가 아닌 벡터의 길이가 항상 양이 되는 “양의 정부호성” (positive definiteness) 이 요구되어 있지 않은 점이 눈에 띄었으리라 생각하는데, 이러한 ‘누락’은 응용을 염두에 둔 의도적인 것이며, 이에 대한 토의는 다음 절에서 구체적인 축약 거리계를 소개할 때 취급하려고 한다.

2.3. 고바야시 거리계

앞에서 추상적인 개념으로서만 소개한 포앙카레 거리의 일반화인 축약 거리계로서 아마도 가장 많이 연구되었다고 생각되는 거리계인 고바야시 거리계 (Kobayashi metric) 에 대하여 소개하려고 한다.

1960년대 말엽에 버클리의 고바야시 쇼오시찌 (S. Kobayashi) 교수에 의하여 발견된 거리 개념은 포앙카레 거리를 옮겨 심으려는 구상으로서 영역 $G \in \mathbf{C}^n$ 에 관하여 잠정적으로 개념

$$\delta_G(p, q) = \inf\{d_P(z, w) \mid \exists f : D \rightarrow G \text{ 해석 가능}, f(z) = p, f(w) = q\}$$

를 생각함으로써 시작되었다. (앞에서와 마찬가지로, 기호 D 는 단위원반 영역을 뜻하며, d_P 는 D 의 포앙카레 거리를 표시한다.) 여러 가지를 모두 제쳐 두고, 거리 축약성만을 점검하여 보면, 임의의 영역 G_1, G_2 와 해석 가능 사상 $f : G_1 \rightarrow G_2$ 에 대하여 거리 축약성을 나타내는 부등식

$$\delta_{G_2}(f(p), f(q)) \leq \delta_{G_1}(p, q)$$

이 G_1 위의 모든 점 p, q 에 대하여 성립함을 쉽게 확인할 수 있다. 그러나, 이 개념은 구조적으로 결함을 가지고 있는데, 당장 거리 개념으로서 만족하여야 할 삼각부등식이 일반적인 경우에 성립하지 않는다. 게다가, 영역 대신에 일반적으로 복소 다양체를 생각하는 경우에는 주어진 두 점 사이의 δ -거리의 값이 유한이라는 것도 일반적으로 증명할 방도가 없다. 따라서, 위의 거리 축약성은

보존하면서 삼각부등식을 만족시키는 거리 개념을 얻기 위하여 위 δ 를 조정하는 것이 필요하다.

이제, 영역 G 상의 두 점 p, q 에 대하여, 임의의 유한 점열

$$S = \{p = p_0, p_1, \dots, p_m = q\}$$

을 생각하고 (이를 보통 ‘분할’ (partition) 이라고 부름) 이에 대응하여 값

$$\tau(S) = \delta_G(p_0, p_1) + \dots + \delta_G(p_{m-1}, p_m)$$

을 정의한 후 모든 가능한 분할에 대하여 생성되는 τ 값을 모든 집합의 최대 하한값 (the infimum, the greatest lower bound) 을 취하여 점 p, q 사이의 고바야시 거리로 정의함으로써, 영역 G 의 고바야시 거리를 구성한다. 다시 쓰면, 영역 G 의 고바야시 거리는

$$(3) \quad d_G^K(p, q) = \inf \left\{ \sum_j^m \delta_G(p_{j-1}, p_j) \mid p = p_0, p_1, \dots, p_m = q \in G \text{ 이고 } m \text{ 은 자연수} \right\}$$

로 정의되는 것이다. 이제 어렵지 않게

명제 2. 고바야시 거리계는 거리 축약성을 만족하고, 단위 원반 영역의 고바야시 거리는 포앙카레 거리와 일치한다.

가 성립하는 것을 확인할 수 있다. (증명은 쉽지만, 번거로움을 줄이기 위하여 자세한 풀이를 생략한다.) 참고로 이러한 식의 ‘조각내어 붙이기’ 방식은 소위 ‘내부거리 (interior metric)’라는 거리공간론의 개념 구성에도 적용되는 것을 볼 수 있음을 덧붙여 말하여 둔다. ([29], [30], [31] 참고.)

이 개념이 발견된 직후, 스탠포드의 로이든 (H. L. Royden) 교수가 이에 대응되는 접벡터의 길이 개념을 발견하였다. 오늘날 ‘고바야시 로이든 길이’ (The Kobayashi-Royden metric) 라고 불리우는 이 개념은 아래와 같이 정의 된다.

영역 $G \subset \mathbf{C}^n$ 상의 점 z 와 접벡터 $(z; v) \in TG = G \times \mathbf{C}^n$ 에 관하여 고바야시 거리를 $k_G(z; v)$ 로 표시하고, 이를 수식

$$(4) \quad k_G(z; v) = \inf\{|t| : \exists f : D \rightarrow G \text{ 해석 가능}, f(0) = z, f'(0)t = v \exists t \in \mathbf{C}\}$$

으로 정의한다.

이 개념이 접벡터에 관한 포앙카레 길이 개념을 영역 G 로 옮겨 심은 것임은 금방 알 수 있을 것이다. 또한, 정의하는 방법으로부터, 이 길이 개념이 위의 고바야시 거리 개념과 밀접한 관계를 가질 것이라는 것을 짐작할 수 있는데, 실제로 아래 정리와 같은 좋은 결과가 이미 잘 알려져 있다.

정리 2. (Royden) 임의의 복소 다양체 G 에 관하여, 다음 성질이 성립한다.

- (A) 함수 $k_G : TG \rightarrow \mathbf{R}$ 은 위쪽 반연속 (upper semi-continuous)이다.
- (B) 임의의 두 점 $p, q \in G$ 를 잇는 매끄러운 곡선들을 모두 생각하고, 이 곡선들의 k_G -길이의 최대 하한값을 구하면 이 값이 점 p, q 사이의 고바야시 거리가 된다. 이것을 수식으로 표현하면, 조건 $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ 을 만족하는 모든 매끄러운 곡선 $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ 에 대하여 최대 하한값을 취할 때, 등식

$$d_G^K(p, q) = \inf_{\gamma} \int_0^1 k_G(\gamma(t); \gamma'(t)) dt$$

이 성립한다.

참고로, 이 정리의 증명은 그렇게 썩 쉬운 것이 아니라는 것 정도만 언급하고, 보다 자세한 증명은 문헌 [36]을 참조하기를 추천하는 선에서 그치며, 더 이상의 토의는 생략한다. 다만,

명제 3. 고바야시-로이든 길이 개념은 축약 거리계이다.

가 성립함을 덧붙여 둔다. (이 명제의 증명은 간단하다.)

고바야시 거리 및 고바야시-로이든 거리의 유용성은 무궁무진하다. 이에 대한 문헌은 그 양과 질 그리고 중요성에서 여타 분야를 압도할 만 하지만, 본 논문의 방향상 이 정도로 정의를 언급하는 선에서 만족하려고 한다. 그럼에도 불구하고, 고바야시 거리계는 원래 소위 피카드 소정리 (Little Picard's Theorem)의 기하학적 원리를 제공하는 개념으로서 만들어 졌음을 언급하여 두는 것이 좋을 것이라고 생각한다. 피카드 정리가 복소함수론에서 차지하는 중요성을 고려하여 보면, 고바야시 거리 개념이 복소함수론에 기여하는 정도를 능히 짐작 할 수 있을 것이라는 생각 때문이다.

이 소절을 맺기 전에, 고바야시 거리계가 양의 정부호성 (positive definiteness) 을 일반적으로 갖지 않는 데 대하여, 그것이 오히려 장점으로 작용하는 예를 들 간단히 피카드 정리의 기하학적 원리를 언급하고자 한다.

우선, 영역이 복소 평면 \mathbf{C} 전체인 경우, 간단한 추론을 통하여 $d_{\mathbf{C}}^K \equiv 0$ 임을 증명할 수 있다. 한편, 반지름 $R > 0$ 인 원반 영역 B_R 에 대하여는, 거리 축약성이 내포하는 불변 거리성에 의하여 쌍대 해석 사상 $z \mapsto Rz$ 로부터

$$d_{B_R}^K(p, q) = d_{\mathbf{C}}(p/R, q/R), \quad \forall p, q \in B_R$$

을 얻고, 따라서 B_R 의 고바야시 거리 $d_{B_R}^K$ 가 양의 정부호성을 가짐을 쉽게 알 수 있다. 이제, 임의의 해석 가능 함수 $f : \mathbf{C} \rightarrow B_R$ 이 주어지면, 고바야시 거리계의 거리 축약성으로부터 임의의 점 $z, w \in \mathbf{C}$ 에 관하여 부등식

$$0 \leq d_{B_R}^K(f(z), f(w)) \leq d_{\mathbf{C}}^K(z, w) = 0$$

이 성립하고, 다시 $d_{B_R}^K$ 의 양의 정부호성에 의하여

$$f(z) = f(w), \quad \forall z, w \in \mathbf{C}$$

를 얻는다. 따라서, 이 경우 f 는 상수함수일 수 밖에 없다는 결론에 도달하게 되는데, 이것은 다름 아닌 복소함수론의 기본 정리중 하나인 리우빌의 정리 (Liouville's Theorem) 이다. 이제, 우리가 복소평면에서 서로 다른 두 점을 제외한 영역 $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ 에 관하여도 이 영역의 고바야시 거리 d_{Ω}^K 가 양의 정부호성을 가진다는 점을 증명하고 나면 (실제로 이 결과가 증명되어 있는데,

이에 관한 설명은 제 3 절에서 일부 제공할 예정이다), 위 추론을 그대로 적용하여 아래 정리를 증명할 수 있다.

정리 3. (피카드 소정리) 복소 평면위 모든 점에서 정의되고 해석 가능한 함수 (완전함수, entire function) 중에서, 그 상 (image) 이 복소 평면 위의 서로 다른 두 점을 포함하지 못하는 함수는 상수함수 뿐이다.

참고로, 피카드 소정리보다 더 일반적인 피카드 대정리에 관한 연구도 많이 수행되어 있으며, 이에 관심이 있는 독자를 위하여 참고문헌 [33] 을 추천한다.

2.4. 제1종 Wu 거리의 구성

이제 본 논문의 중심 토의 대상인 Wu 거리 (길이)를 구성하려고 한다.⁴ Wu 거리계는 모든 복소 다양체에 정의될 수 있지만, 가능한 한 직관적인 이해를 제시하려는 이 논문의 목표에 걸맞게, 고바야시 거리가 양의 정부호성을 가지는 복소 다양체 — 이러한 복소 다양체를 보통 고바야시 쌍곡 다양체라 부르며, 고바야시 거리의 양의 정부호성을 보통 고바야시 쌍곡성이라고 부른다 —에 한하여 Wu 거리를 구성하려고 한다.

2.4.1. 민콥스키 함수와 길이 개념. 잠시, 생각을 돌려 복소 벡터공간 V 를 생각하자. 이 공간 속에 길이 개념 (norm, or length function) 이 있으면, 이 길이 개념—편의상 $\|\cdot\|$ 으로 표시함—으로 측정하여 길이가 1 이하인 벡터의 모음

$$\mathcal{I} = \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$$

을 생각한다. 유클리드 공간의 유클리드 길이 개념인 경우에는 이 집합이 단위 구이므로 여기에서도 $\|\cdot\|$ -단위구라고 부르기로 한다.

한편, 길이 개념으로부터 단위구를 자연스럽게 도출하는 과정을 거꾸로 하여, 주어진 집합으로부터 그 집합의 폐포 (closure)를 단위구로 가지는 길이

⁴ 지금부터는 에르미뜨형 거리를 생각하게 되므로 미분기하학의 관례를 따라 ‘거리’라는 용어가 길이와 거리를 모두 표현하도록 의도적으로 용어를 혼용할 예정이다. 그러나 혼동의 소지가 있는 경우에는 정확한 개념을 밝힐 것이다.

개념을 도출하는 방법도 생각할 수 있다. 벡터공간 V 의 영벡터를 포함하는 집합 U 에 관하여, 소위 민콥스키 함수라고 부르는

$$\mu_U(w) = \inf \left\{ r > 0 \mid \frac{1}{r}w \in U \right\}$$

이 그것이다. 위에서 생각한 일반적인 노름 (norm) $\|\cdot\|$ 의 단위구 I 에 대하여 등식 $\mu_I(w) = \|w\|$ 가 성립함을 금방 알 수 있다.

영벡터를 포함하는 임의의 집합에 의하여 정의된 민콥스키 함수가 모두 훌륭한 노름을 정의하는 것은 아니지만, 민콥스키 함수의 성질과 이를 생성하는 집합의 기하학적 특성 사이의 관계는 비교적 잘 알려져 있다. 민콥스키 함수 자체의 연구도 상당한 의미가 있겠으나, 여기에는 이 논문의 목적에 맞는 몇 가지 기본 성질만을 살펴본다. 일반적으로 이러한 성질을 이해하기 위하여 벡터 공간이 위상 구조를 가지고 있어야 하므로 아래의 명제도 물론 위상 벡터 공간 (topological vector space, or vector space with topology)에 대하여 성립함을 미리 밝혀 둔다.

명제 4. 위상 벡터 공간 V 와 영벡터를 포함하는 부분집합 U 그리고 이에 대응하는 민콥스키 함수 μ_U 에 관하여 다음 성질이 성립한다.

- (1) 집합 U 가 영벡터의 열린 근방을 포함하면, μ_U 가 양의 정부호성을 가진다. 즉 $\mu_U(v) = 0$ 이면 반드시 $v = 0$ 가 성립한다.
- (2) 집합 U 가 볼록집합 (convex set) 이면, μ_U 는 삼각부등식을 만족한다. 즉 $\mu_U(v + w) \leq \mu_U(v) + \mu_U(w)$ 가 모든 $v, w \in V$ 에 대하여 성립한다.

이제, 부분집합 U 가 볼록 집합보다도 더 특수한 경우를 생각하려고 한다. 유한차원 위상 벡터공간 V 의 좌표계 (기저, basis) 를 선택하고 이 좌표계를 이용하여, 양의 정부호 에르미뜨형 행렬 (positive definite Hermitian matrix) 하나를 H 라 쓰고, 이에 의하여 정의되는 집합

$$E_H = \{v \in V \mid v^* H v \leq 1\}$$

을 통틀어 타원체라고 부르기로 하자.⁵ 단, 여기의 v 는 열벡터 또는 $n \times 1$ 행렬을 의미하고, v^* 는 v 의 공액전치벡터 (conjugate transpose) 를 표시한다. 그러면 아래 명제가 성립한다.

명제 5. 유한차원 복소 벡터 공간 내의 불록 부분집합에 의하여 생성되는 민콥스키 함수가 벡터공간의 에르미뜨형 내적 (Hermitian inner product) 이 될 필요 충분 조건은 주어진 부분집합이 타원체가 되는 것이다.

2.4.2. 최소타원체와 제1종 Wu 거리. 이제 \mathbb{C}^n 상의 유계 영역 (또는 더욱 일반적으로 고바야시 쌍곡 복소 다양체) 쪽으로 우리의 관심을 집중하기로 하자. 주어진 유계 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 과 임의의 점 $p \in \Omega$ 에 대하여 복소 접공간 $T_p\Omega$ 속의 고바야시 단위구

$$\mathcal{K}_p = \{v \in T_p\Omega \mid k_\Omega(p; v) \leq 1\}$$

을 생각한다 (k_Ω 는 영역 Ω 의 고바야시 거리이다). 그리고, n 차원 복소 벡터 공간인 접공간 $T_p\Omega$ 속에서 고바야시 단위구를 포함하는 타원체들을 모두 생각 한다. 여기에 덧붙여, $T_p\Omega$ 의 좌표계 (basis) 를 하나 고정하고 이 좌표계에서 각 타원체를 표현하는 양의 정부호 에르미뜨 행렬을 생각하여 보면, 결국 타원체의 집합과 (\mathcal{E}_p 로 표시함) 양의 정부호 에르미뜨형 $n \times n$ 행렬들의 집합은 (\mathcal{H}_p 로 표시) 일대 일 대응관계에 있음을 알 수 있다. 이제, \mathcal{E}_p 속에서 소위 “최적 타원체”라 불리우는 대상을 찾으려 한다. 이를 위하여 집합 \mathcal{H}_p 위에 ‘관계 개념’ (relation) 을 도입하되 $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_p$ 에 관하여, 부등식

$$\det \alpha < \det \beta$$

를 원소 α 와 β 사이의 관계로 정의한다. 이러한 정의는 좌표계의 선택에 의존 하여 정의된 것이고, 게다가 행렬식 (determinant) 의 값 또한 좌표계의 선택에 따라 변하는 것이지만, 조금만 생각하여 보면 두 행렬식을 비교하는 위의 관계 개념은 좌표계의 선정과 무관하게 성립됨을 알 수 있을 것이다. 조금

⁵타원체의 개념은 좌표계를 먼저 고정한 후에 정의되었으나, 좌표계의 선택에 의하여 좌우되지 않는 개념이다. 즉, 어떤 집합이 한 좌표계에 의한 타원체이면, 다른 좌표계에서도 여전히 타원체가 된다.

더 정확하게 말하자면, 위 부등식이 한 좌표계에 의하여 성립하면, 이 행렬들이 표현하는 에르미뜨 이중 선형 형식 (Hermitian bilinear form) 들을 다른 좌표계에서 에르미뜨 행렬로 표현하여도 새 행렬들이 여전히 위 부등식을 만족함을 쉽게 보일 수 있다. 따라서 우리는 위 타원체들 중에서 행렬식의 값이 가장 큰 타원체를 고르려고 하는데, 이 타원체가 물론 존재하고, 유일하게 결정되는 점을 이용하려고 한다.⁶ 이 최적 타원체의 존재성은 매우 쉽게 증명되며, 이의 유일성에 대한 논증은 아래에 실는 보조정리가 제공한다.

드디어 제1종 Wu 거리계의 정의를 쓸 수 있게 되었다. 유계 영역 $\Omega \in \mathbb{C}^n$ 위의 임의의 점 p 에 대하여 복소 접벡터 공간 $T_p\Omega$ 속에 있는 고바야시 단위구 K_p 를 포함하며 유일하게 결정되는 최적 타원체를 \mathcal{W}_p 라고 표시하기로 하고, 이 최적 타원체를 결정하는 에르미뜨 이중 선형 형식을 h_p 로 표시하자. 그러면, 대응 관계

$$h : p \mapsto h_p : T_p\Omega \times T_p\Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

는 Ω 의 모든 접벡터 공간에 각각 에르미뜨형 내적을 정의하게 되는데, 이 h 를 영역 Ω 의 제1종 Wu 거리 (The Wu metric of the first kind) 라 부른다.

이제, 앞에서 언급한 최적 타원체의 존재성을 먼저 생각하여 보자. 우선, 에르미뜨형 행렬들은 모든 행렬들의 집합의 닫힌 부분집합이고, 최적 타원체를 주는 에르미뜨 행렬의 행렬식의 값은 고바야시 단위구의 부피보다는 작지 않아야 하기 때문에 유한한 양수가 된다. 따라서, 최적 타원체의 존재성은 쉽게 도출되고, 오직 최적 타원체의 유일성만이 증명하여야 할 성질인데, 이는 아래 보조 정리에 의하여 설명된다.

보조정리 1. 조건 $\det A = \det B$ 를 만족하는 양의 정부호 $n \times n$ 에르미뜨형 행렬 A, B 는 다음과 같은 성질을 가진다.

- (1) 조건 $0 \leq t \leq 1$ 을 만족하는 t 의 모든 값에 관하여 부등식 $\det[tA + (1-t)B] \geq \det A$ 가 성립한다.

⁶이 최적 타원체는, 고바야시 단위구를 포함하는 타원체 중 부피가 가장 작은 것으로 이해하는 것이 보다 직관적이다.

(2) 위 부등식이 $0 < t < 1$ 을 만족하는 어떤 t 의 값에 대하여 등식이 되면, 두 행렬 A 와 B 가 일치한다.

이 보조정리는 볼록체 (convex body) 연구 분야에서는 매우 잘 알려져 있는 것이지만 복소함수론 및 복소기하학 관련 독자들의 편의를 위하여 여기에 그 증명을 소개한다.

증명. $n \times n$ 행렬 T 의 공액 전치행렬 (conjugate transpose) 을 기호 T^* 로 나타내기로 하자. 위 보조정리의 가정에 주어진 양의 정부호 에르미뜨 행렬 A 에 관하여, 관계식

$$A = W^* \cdot W$$

를 만족하는 $n \times n$ 정칙행렬 W 를 생각하자.⁷ 이로부터

$$\begin{aligned} \det(tA + (1-t)B) &= \det A \cdot \det[tI + (1-t)(W^*)^{-1}BW^{-1}] \\ &= t^n \cdot \det A \cdot \det \left(I + \left(\frac{1}{t} - 1 \right) H \right), \\ &\quad (\text{단, } H = (W^{-1})^*BW^{-1}) \\ &= (1+y)^{-n} \cdot \det A \cdot \det(I + yH), \\ &\quad (\text{단, } y = \frac{1}{t} - 1) \end{aligned}$$

를 얻는다. 따라서 위 보조정리의 첫 번째 결론을 얻으려면, $\det H = 1$ 을 만족하는 임의의 양의 정부호 에르미뜨 행렬 H 가 부등식

$$(5) \quad \det(I + yH) \geq (1+y)^n$$

을 조건 $y \geq 0$ 를 만족하는 y 의 모든 값에 대하여 만족하는 것을 증명하면 충분하다.

이를 보이기 위하여, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 을 H 의 고유값 (eigenvalue) 이라 두자. 그러면, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 은 모두 양수이며, 조건 $\lambda_1 \cdots \lambda_n = 1$ 을 만족한다. 여기

⁷양의 정부호 에르미뜨 행렬의 분해에 관한 이러한 증명은 소위 스펙트럼 재구성 (spectral decomposition) 방법의 결과로 얻어진다. ([21] 등의 선형대수학 교과서 참조)

에서,

$$\mathcal{S}(k, n) = \{\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{는 단사함수}\}$$

라 두고

$$s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(k, n)} \lambda_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{\sigma(k)}$$

라 할 때, 관계식

$$\det(I + yH) = 1 + s_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)y + \dots + s_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)y^n$$

이 성립함을 이용한다. 기하 평균과 산술 평균 사이의 부등식에 의하여

$$(6) \quad s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq \binom{n}{k}$$

이 $k = 1, \dots, n$ 에 대하여 모두 성립하므로 우리가 목표로 하던 (5) 도 성립하게 되고, 따라서 위 보조정리의 첫 번째 결론이 바로 도출된다.

보조정리의 두 번째 결론을 얻기 위하여는 위의 식 (6)에서 등호가 성립하는 경우를 생각하여야 한다. 산술 평균과 기하 평균의 관계로부터, 등호는 조건 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$ 과 동치이고, 이는 곧 행렬 H 가 단위행렬 I 와 서로 닮다는 (similar) 것과 또한 동치이다. 이로부터, $I = H = (W^*)^{-1}BW^{-1}$ 가 성립하게 되어서, 결국 $A = B$ 가 성립되고, 보조 정리의 증명이 모두 완결되었다. \square

2.5. 제1종 Wu 거리의 기본 성질

이 소절에서는 Wu 거리의 가장 특징적이고 근본적인 성질만을 우선 소개 하려고 한다.

2.5.1. 불변 및 측약성 그리고 피복성. 복소 접다발의 복소 선형성에만 의존하여 정의된 모든 거리 개념이 그러하듯이, Wu 거리계도 거리 불변성을 가진다. 이를 정확히 서술하기 위하여, 임의의 고바야시 쌍곡 복소다양체 X 의 Wu 거리를 h_X 로 쓰기로 하자. 그러면 아래 명제가 성립한다.

명제 6. 임의의 고바야시 쌍곡 복소다양체 M 과 N 에 대하여 쌍대 해석사상 $f : M \rightarrow N$ 이 존재하면 반드시, 거리 보존 조건

$$f^* h_N = h_M$$

을 만족한다.

증명. 쌍대 해석사상은 고바야시 거리계를 보존하는 등거리 사상이므로, 그 미분형 (differential) 이 고바야시 단위구를 보존한다. 쌍대 해석사상의 미분형은 쌍대 복소 선형사상이므로, 선형성에 의하여 고바야시 단위구의 최적 타원체를 보존하게 되므로, 위 명제가 증명되었다. \square

이제까지 알려진 캘러형 불변거리계들과는 달리, Wu 거리계는 고바야시 거리계의 축약성에 준하는 일종의 축약성을 가진다. 이를 정확하게 서술하면 다음과 같다.

명제 7. 고바야시 쌍곡 복소다양체 M, N 과 해석사상 $\psi : M \rightarrow N$ 에 대하여, 조건

$$\psi^* h_N \leq \sqrt{\dim_{\mathbb{C}} M} h_M$$

이 항상 성립한다.

증명. 이 명제는 Wu 단위구에 관한 포함관계식

$$df_p(\mathcal{W}_{M,p}) \subset \sqrt{\dim_{\mathbb{C}} M} \mathcal{W}_{N,f(p)}$$

와 동치이다. 한편, 집합 A 을 포함하는 최소불록집합을 \hat{A} 로 표시할 때, 고바야시 단위구 \mathcal{K} 와 그 최적 타원체인 Wu 단위구 \mathcal{W} 사이에는 포함관계

$$\hat{\mathcal{K}} \subset \mathcal{W} \subset \sqrt{\dim_{\mathbb{C}} M} \hat{\mathcal{K}}$$

가 성립함이 이미 알려져 있다.⁸

⁸일반적으로 고바야시 단위구는 불록집합이 아니다. 그러나, 임의로 주어진 집합의 최적타원체는 불록집합이므로, 그 집합의 최소불록집합을 포함할 뿐만 아니라, 이 최소 불록 집합의 최적타원체가 되는 성질도 가지고 있다. 복소 공간 속에서 어떤 열린 불록체의 폐포로 주어지는 불록체의 최적 타원체를 일정 비율로 축소하여 원래 불록체 속에 포함되게 하는 정도에 관한 연구는 이미 자세히 연구되었으며 ([22] 참조 바

따라서, 위에서 고찰한 바를 고바야시 거리계의 거리 축약성과 함께 생각함으로써 관계식

$$\begin{aligned} df_p(\mathcal{W}_{M,p}) &\subset df_p(\sqrt{\dim_{\mathbb{C}} M} \hat{\mathcal{K}}_{M,p}) \\ &= \sqrt{\dim_{\mathbb{C}} M} df_p(\hat{\mathcal{K}}_{M,p}) \\ &\subset \sqrt{\dim_{\mathbb{C}} M} \hat{\mathcal{K}}_{N,f(p)} \\ &\subset \sqrt{\dim_{\mathbb{C}} M} \mathcal{W}_{N,f(p)} \end{aligned}$$

을 얻게 되고, 동시에 원하던 거리 축약성을 얻는다. \square

이러한 일종의 거리 축약성은, 비록 정의역 다양체의 복소 차원의 제곱근이라는 인수가 가미된 점을 감안 하더라도, 지금까지 알려진 다른 에르미뜨형 불변 거리에는 유례가 없는 특이한 성질이다. 따라서 Wu 거리계에는 자신만 가지는 특성이 있음이 분명하고, 이러한 특성이 복소함수론과 복소 기하학에 어떠한 영향을 미칠 것인가 하는 것이 이 분야 연구자들의 관심을 모으는 점이라 하겠다.

제1종 Wu 거리계의 특성은 또 있다. 이를하여 피복성 (covering property)이라고 부르는 이 성질은 Wu 거리계가 해석 가능 피복사상 (holomorphic covering mapping)에 의하여 보존된다는 특성인데, 이 역시 고바야시 거리계만 소유한 성질일 뿐 (재차 강조하지만, 고바야시 거리계는 거의 대부분의 경우 에르미뜨 형이 아니다) Wu 거리를 제외한 다른 에르미뜨형 불변거리계는 소유하지 못하는 특수한 것이다. 여기서, 피복사상이란 해석 가능이라는 부가 조건을 제외하고는 대수적 위상수학에서 말하는 개념과 같은 것으로서, 전사이며 (surjective) 국소적 단사이고 (locally injective) 치역 다양체의 모든 점이 소위 고루 덮인 근방 (evenly covered neighborhood) 을 가지는 사상을 말한다. Wu 거리계의 피복성을 정확히 나타내는 명제는 다음과 같다.

람) 우리의 경우와 같이 고바야시 단위구가 각 복소 평면 방향으로 회전 불변형이면 그 필요한 축소비가 관심 대상인 다양체의 복소 차원의 제곱근임이 알려져 있다. 위의 관계식은 이에 근거한 것이다.

명제 8. (Kim) 고바야시 쌍곡 다양체 사이에 정의된 해석 사상 $f : M \rightarrow N$ 이 피복 사상이면, 조건

$$f^* h_N = h_M$$

이 항상 성립한다.

이의 증명은 고바야시 거리계의 피복성과 최적타원체의 유일성 및 df 의 동형성 (isomorphism property)에 의하여 바로 도출된다. ([24] 참고.) 이 특성의 유용함은 이 논문의 제5절의 후반부에서 일부 소개될 것이다.

2.5.2. 정칙성. 여기에서는 선형적 (a priori) 정칙성이라고 할 수 있는 가장 기본적인 것만 다루려 한다. 일반적으로 주어진 볼록 집합이 진화 (evolve) 하되 그 과정이 연속 함수에 의하여 주어지면, 대응되는 최적 타원체의 진화가 연속적임을 쉽게 증명할 수 있음에 확인하자.

일반적으로 고바야시 길이는 연속이 아니어서 주어진 다양체 위의 점이 움직임에 따라 대응되는 고바야시 단위구의 진화 (evolution) 가 연속성을 갖지 않는다. 그러나, 고바야시 길이를 적분하여 얻는 고바야시 거리는 이 거리가 코오시 완비 (Cauchy complete) 거리인 경우에는 연속이 됨이 T. J. Barth에 의하여 이미 알려져 있다. ([3] 참조) 이제, 고바야시 거리를 미분하여 접다발에 정의된 길이 개념을 다시 만들어 낼 수 있는데, 이렇게 생성된 길이 개념은 연속이고 그 단위구는 고바야시 단위구의 최소볼록집합이 된다는 것을 확인할 수 있다. (자세한 설명은 생략한다. 그러나 원래 고바야시 길이가 위쪽 반연속이고, 삼각부등식을 만족시키지 않는데 비하여, 이 길이는 연속이고 삼각부등식을 만족시키는 점을 특기하기 바란다. 하지만, 이 모든 좋은 점은 고바야시 거리가 완비 거리일 경우에만 성립함을 재차 강조하여 둔다.) 이를 정리하면 아래 명제를 얻게 된다.

명제 9. (Wu) 완비 고바야시 쌍곡 다양체상의 Wu 거리(길이)는 연속이다.

고바야시 거리의 위쪽 반연속성 (upper semi-continuity) 보다는 좋은 결과라 하겠지만, 이 결과가 크게 만족스럽다고 하기는 어렵다. 에르미뜨형 거리를

생각하는 큰 이유의 하나가 미분기하학의 방법론을 사용하고자 하는 것이고, 따라서 그 곡률을 사용하는 것이 바람직한데, 그런 목적을 위하여는 최소한 두 번 미분이 가능하여야 할 것임에도, 위의 결과는 단순히 연속성만을 증명할 뿐이기 때문이다. 실제로 Wu 거리가 두 번 미분이 가능하지 않은 영역의 예도 이미 발견되는 등 ([10], [11] 참조) 이 방향으로는 어려운 점이 많다. 그러나, 이러한 구조적인 문제점에도 불구하고 여전히 Wu 거리의 곡률 문제는 흥미롭고, 이미 여러 가지 새로운 결과를 도출하는 데 기여하고 있다. 이에 관하여는 이 논문의 제3절과 제4절에서 보다 자세히 다루려고 한다.

2.5.3. 임계 행동 분석. 포앙카레 거리계의 확장 개념인 카라테오도리 거리계, 고바야시 거리계, 아인슈타인-캘러 거리계⁹, 베르그만 거리계 등의 임계 행동, 즉, 이러한 거리계의 길이 개념이 유계 영역에서 정의된 경우 그 영역의 경계점 근방에서 어떤 모양을 가질 것인가 하는 데 대한 연구는, 그 파급효과 때문에 늘 중요한 문제로 이해되어 왔다. 따라서, Wu 거리(길이)의 임계 행동 연구도 상당한 수행 가치가 있으며, 이 방향 연구의 가장 기본적인 부분은 이미 [24]에서 밝힌 바가 있다. 증명은 측도 확대법을 사용한 관계로 약간 장황한 바가 없지 않아서, 결과만 상세한 설명 없이 개략적으로 소개하려고 한다.

유계 강 의사 볼록 영역 (strongly pseudoconvex domain) $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 의 경계점 $p \in \partial\Omega$ 로 수렴하는 점열 $p_j \in \Omega$ 의 궤적이 p 를 꼭지점으로 하고 꼭지각이 예각이며 꼭지점 근방이 영역 ω 속에 포함되는 원추 영역 속에 있으면, 점 p_j 가 p 에 수렴함에 따라 Wu 거리 h_{Ω, p_j} 의 발산 정도가 점 p 근방 Ω 의 경계를 정의하는 함수 (defining function) 와 $\|p_j - p\|$ 에 의하여 표시된다. 더우기 $\|p_j - p\|$ 를 이용하여 이 과정을 표준화하여 그 임계 행동을 정확히 묘사할 수 있다.

⁹아인슈타인-캘러 거리계의 존재는 칼라비 교수를 필두로 시작되어 야우 교수의 업적에 의하여 주요 증명이 완결된 만큼 칼라비-야우 거리계 (Calabi-Yau metric) 이라고 부르는 것이 더욱 합리적이라고 생각되지만, 이 논문에서는 저자도 수학계의 일 반적인 관례를 따라, 아인슈타인-캘러 거리라는 용어를 사용하기로 하였다.

이로써, 비교적 피상적인 수준에 머무르기는 하였으나, 아쉬운 대로 제1종 Wu 거리에 관한 설명을 일단 마무리 하기로 한다. 기본적인 여러 특성에 관하여 보다 자세한 설명을 원하는 독자에게는 참고 문헌 [24]를 추천하면서 제1절을 이정도로 맺고 제2절부터는 현재 연구가 진행되고 있는 관련 연구 분야와 과제 등에 대하여 보다 폭넓게 소개하여 보려고 한다.

3. 알포스 정리와 Wu 거리 곡률

이 절에서는 불변거리계의 곡률이 복소함수론에 기여하는 역할을 설명하고, 이와 상통하는 관점에서 Wu 거리의 곡률에 관한 연구의 의미와 현재까지 수행된 연구 결과를 소개하려 한다. 아울러, 이와 관련된 여러 미해결 문제 및 연구 과제등에 관하여도 토의할 예정이다.

3.1. 거리 축약성과 곡률

앞에서 소개하였던 고바야시 거리계의 축약성을 일단 함수론적으로 증명하여 보자. 고바야시 쌍곡 다양체 M, N 과 고바야시-로이든 길이 함수 k_M, k_N 그리고 해석사상 $f : M \rightarrow N$ 에 대하여 부등식

$$(7) \quad f^*k_N \leq k_M$$

을 증명하기 위하여, 점 $p \in M$ 과 접벡터 $v \in T_p M$ 을 임의로 선택하고, 임의로 주어진 양수 ϵ 에 대하여 조건

$$\varphi(0) = p, \varphi'(0)\xi = v, |\xi| - \epsilon < k_M(p; v) \leq |\xi|$$

를 만족하는 단위원반 영역 D 에 정의된 해석사상 $\varphi : D \rightarrow M$ 과 복소수 (실은 단위원반 영역의 원접에서의 접벡터) ξ 를 고바야시-로이든 길이의 정의에 의거하여 고른다. 이제, 합성사상 $\psi = f \circ \varphi : D \rightarrow N$ 이 해석사상으로서 조건

$$\psi(0) = f(p), \psi'(0)\xi = df_p(v)$$

를 만족하기 때문에, 이로부터 즉시 부등식

$$k_N(f(p); df_p(v)) \leq |\xi|$$

를 얻게 된다. 이를 위의 결과와 종합하여

$$k_N(f(p); df_p(v)) < k_M(p; v) + \epsilon$$

을 도출할 수 있고, 양수 ϵ 이 위 부등식의 다른 항들과 무관함을 이용하여 위에서 원하던 거리 축약성 부등식 (7) 을 얻게 된다.

이 증명은 전적으로 함수론적인 것이지만, 그 결과는 해석 사상의 해석 가능성이라는 해석학적 성질이 특정 (에르미뜨 형) 거리계에 관한 거리 축약성이라는 기하학적 성질로 나타난 셈이 되었다. 이러한 관점에서 보면, 해석사상의 거리 축약성을 순전히 기하학적인 방법으로 도출하는 것이 더욱 자연스럽고, 이러한 관점을 택하면 해석 사상의 본질을 더욱 깊이 이해할 수 있게 될 것이다.

이러한 관점은 아래 소개하는 알포스 교수에 의한 슈바르츠 보조정리의 일반화에 그 근거를 두고 있으며, 이러한 관점에서 수행되어 온 각종 연구는 오늘날, 기하학적 함수론 (Geometric function theory) 라는 연구 분야로 발전하였다.

지금부터는 이 논문의 토의 내용이 해석학적 방법론과 관점으로부터 서서히 기하학적 방법론과 관점으로 옮겨 가고 있으므로 기호와 용어도 미분 기하학에서 통용되는 것을 사용하려고 한다. 먼저 포앙카레 길이 함수도 이제는 포앙카레 내적으로 생각하고 그 기호를

$$ds_D^2 = \frac{dz d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}$$

로 쓰기로 한다. 이 기호는 $z \in D$ 에서의 접벡터 $v, w \in T_z D = \mathbf{C}$ 에 대하여 포앙카레 내적의 값이

$$\frac{v\bar{w}}{(1 - z\bar{z})^2}$$

로 주어짐을 뜻하는 것이다. 보다 일반적으로 통상 리만 곡면 (Riemann surface) 이라고 불리우는 복소 1차원 다양체 M 상의 접다발에 정의되는 에르미뜨형 내적은, 복소 국소좌표계 (complex local coordinate system) 를 z 라 쓸 때, 매끄러운 양수함수 $h(z)$ 가 있어서

$$ds_M^2 = h(z) dz d\bar{z}$$

로 쓸 수 있다. 이 경우 소위 가우스 곡률 (Gaussian curvature) 이라 불리우는 불변량은

$$K_{ds_M^2} = -\frac{2}{h} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log h$$

로 주어지는데, 이를 위 포앙카레 거리계에 적용하면 ($h = (1 - |z|^2)^{-2}$) 가우스 곡률이 모든 $z \in D$ 에서 항상 -4 가 됨을 확인할 수 있다.

이제 해석 사상의 거리 축약성을 곡률의 관점에서 다른 알포스의 정리를 소개한다.

정리 4. (Ahlfors) 리만 곡면 M 이 가우스 곡률 조건 $K_{ds_M^2} \leq -B < 0$ 을 만족하는 에르미뜨형 거리 ds_M^2 을 가지고, ds_D^2 가 곡률 -4 인 단위 원반 영역 D 의 포앙카레 거리(내적)을 표시한다고 하자. 그러면, 임의의 해석 사상 $f : D \rightarrow M$ 에 대하여, 부등식

$$f^* ds_M^2 \leq \frac{4}{B} ds_D^2$$

이 항상 성립한다.

증명. 단위 원반 영역 D 에는 영역 전체에서 유효한 좌표계 z 가 있으므로, 조건 $f^* ds_M^2 = u(z) ds_D^2$ 를 만족하는 양수함수 (positive real valued function) $u(z)$ 가 존재한다. (사실은 $u \geq 0$.) 따라서, 우리가 증명하고자 하는 부등식은 $u(z) \leq 4/B, \forall z \in D$ 이다.

만일 함수 u 가 D 내부의 점 z_0 에서 최대값을 가진다고 하면, $u(z_0) \leq 4/B$ 를 증명하는 것으로 충분한 점에 착안한다. 따라서, $u(z_0) = 0$ 이면 더이상의 논증이 필요가 없게 되므로, $u(z_0) > 0$ 가 만족되는 경우를 생각하기로 한다.

그러면, df_{z_0} 는 쌍대선형함수가 되고, 음함수정리에 의하여 f 는 z_0 근방에서 국소 쌍대적이다. 따라서, f 자신을 점 $f(z_0)$ 근방에서 M 의 국소 좌표계로 사용하면, 결국 $ds_M^2(z) = \alpha(z)dz d\bar{z}$ 로 쓸 수 있고, 따라서 $u(z) = (1 - |z|^2)^2 \alpha(z)$ 가 된다. 이제, u 가 점 z_0 에서 최대값을 가진다는 조건으로부터 부등식

$$\Delta \log u(z) \leq 0$$

가 성립하므로, 이를 이용하기로 한다. 우선

$$0 \geq -\Delta \log(1 - |z|^2)^{-2}|_{z_0} - (-\Delta \log \alpha|_{z_0})$$

을 얻고, 이로부터 또한

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left(-\frac{1}{(1 - |z|^2)^{-2}} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(1 - |z|^2)^{-2} \Big|_{z_0} \right) \cdot \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \\ &\quad - \left(-\frac{1}{\alpha(z_0)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \alpha \Big|_{z_0} \right) \cdot \alpha(z_0) \\ &= -4 - (-B)u(z_0) \end{aligned}$$

를 얻게 되어 원하던 결과에 도달하게 된다.

증명을 완결하기 위하여는, 함수 u 가 단위 원반 영역에서 최대값을 가지지 않는 경우도 생각하여야 할 것이다. 이를 위하여, 조건 $0 < r < 1$ 을 만족하는 r 에 대하여 영역

$$D_r = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < r\}$$

을 생각하고 여기에 거리

$$ds_{D_r}^2 = \frac{r^2 dz d\bar{z}}{(r^2 - |z|^2)^2}$$

을 정의한다. 이 거리의 곡률 역시 -4 가 됨을 쉽게 확인할 수 있다. 이제, 관계식 $f^* ds_M^2 = u_r(z) ds_{D_r}^2$ 를 통하여 함수 u_r 을 정의하자. 그러면, $f(\overline{D_r})$ 이

리만 곡면 M 의 콤팩트 부분집합이므로, 조건

$$\begin{aligned} u_r(re^{i\theta}) &\equiv 0, \forall \theta \in \mathbf{R} \\ u_r(z) &\geq 0, \forall z \in \overline{D}_r \end{aligned}$$

을 얻게 된다. 따라서, u_r 은 D_r 내부에서 반드시 최대값을 가지게 되며, 이제 앞 경우의 방법론을 그대로 적용하여, 부등식

$$f^* ds_M^2 \leq \frac{4}{B} ds_r^2$$

을 얻게 된다. 이제, r 이 1에 접근함에 따라 $ds_{D_r}^2$ 이 ds_D^2 에 수렴하는 사실을 (정확하게 말하자면, D 의 임의의 콤팩트 부분집합 위에서 충분히 1에 가까운 r 값에 대하여 수렴함) 이용하면 우리가 바라던 증명이 완결된다. \square

곡률에 의한 거리 축약성을 보여준 효시가 되는 이 정리는 여러 학자들에 의해 다각도로 확장되었는데, 첫 번째 일반화는 M 이 고차원 캘러 다양체인 경우를 증명한 고바야시 교수의 결과이다. 이 후 미분기하학적인 연산법을 도입하여 해석함수의 정의역이 캘러 다양체로서 쌍단면 곡률 (bisectorial curvature) 이 특정한 음수 이상인 경우까지 확장한 야우 교수의 결과가 가장 일반적인 결과라 하겠다. 이보다는 약간 늦지만, 보다 간결한 방법으로 야우 교수의 결과를 얻은 로이든 교수의 증명 방법 ([38]) 또한 매우 흥미로우며, 슈바르츠 보조 정리의 일반화에 관련된 연구를 하려는 연구자에게 일독을 권하고 싶다.

이제까지의 기하학적 관점을 요약하면 다음과 같이 쓸 수 있을 것이다.

음의 곡률이 해석 사상을 제어한다.

Negative curvature restricts holomorphic mappings.

이러한 일반적인 명제는 해석 사상 및 조화 사상 등에 폭넓게 적용되는 소위 보크너 방법론 (Bochner technique) 이라는 기하학적 방법론과 그 뜻이 서로 통하는 것으로서, 기하학적 복소함수론의 중심 지침이라고 할 수 있다.

보충 1. 위에서 소개한 알포스의 정리는 M 이 고차원 에르미뜨형 다양체로서 곡률이 음인 경우로 확장되어 성립함이 알려져 있다.

그러면, 이러한 기하학적 관점의 유용성은 어디에 있겠는가? 이에 대한 답으로서, 고바야시 쌍곡성에 관한 다음 정리를 소개한다.

따름정리 1. 복소다양체 M 위에 정의된 에르미뜨 거리 ds_M^2 의 해석곡률(holomorphic curvature) $H_{ds_M^2}$ 가 모든 해석단면에 대하여 음수 $-b$ 보다 작으면 M 은 고바야시 쌍곡성을 가진다. 특히 위 에르미뜨 거리가 완비 거리이면, 고바야시 거리도 완비 거리이다.

증명. 조건 $f(0) = p, df_0(\lambda) = v$ 만족하는 해석사상 $f : D \rightarrow M$ 과 복소수 λ 에 대하여, 알포스의 정리로부터 관계식

$$\frac{4}{b}|\lambda|^2 = \frac{4}{b}ds_D^2|_0(\lambda, \lambda) \geq ds_M^2|_p(df_0(\lambda), df_0(\lambda)) = ds_M^2(v, v)$$

을 얻는다. 이로부터

$$k_M(p; v) \geq \|v\|_{ds_M^2}$$

을 얻으므로, 원하는 결론에 도달한다. \square

이제는 에르미뜨형 거리의 축약성 뿐만이 아니라 고바야시 쌍곡성도 음의 곡률에 의하여 상당한 영향을 받음을 보게 되었다. 사실상 어떤 복소 다양체가 고바야시 쌍곡성을 가지는지를 판정하기란 상당히 어려운데, 곡률을 이용하는 방법을 이와 같이 정리하여 두는 것은 대단히 유용하다고 하겠다. 실제로 그라우에르트 교수와 레흐지이겔 교수의 유명한 논문 [16]에서는 교묘하지만 기초적인 계산 방법만을 사용하여 $C \setminus \{0, 1\}$ 위에 곡률이 -4 이하인 완비 에르미뜨 거리를 직접 구성하였다. 이 결과가 바로 영역 $C \setminus \{0, 1\}$ 이 고바야시 쌍곡성을 가짐을 내포하고 있을 뿐 아니라, 결과적으로 피카드 소정리의 기하학적 증명까지도 함께 제공하는 것을 알 수 있다.

이제까지의 토의를 통하여, 음의 곡률을 가지는 에르미뜨형 거리가 함수론 자체에서 해석학적으로 개발된 고바야시 거리 등의 개념에 못지 않게 중요할

뿐만 아니라, 오히려 이러한 에르미뜨 거리 개념과 그 곡률이 더욱 근본적인 연구 대상이라고 보는 견해에도 일리가 있음을 알게 되었다. 여기서 한결음 더 나아가 미분기하학의 관점을 따른다면, 거리 축약성의 진정한 원인은 음의 곡률에 있다고도 말할 수 있을 것이다. 이러한 관점에서 1970년 고바야시 교수는 그의 저서 [30]에서 아래와 같은 연구 문제를 제시하였다.

문제 1. (고바야시) 모든 고바야시 쌍곡 완비 복소 다양체마다 음의 해석 곡률을 가지는 완비 에르미뜨 거리가 존재하겠는가?

이의 해답은 일반적으로 긍정적일 것이라고 생각하는 기대를 고바야시 가설이라고 부른다. 이 문제는 아직 완전한 답을 얻지 못한 미해결 상태에 있지만, 일부 관련 연구 결과가 있고, 이 논문의 관심사 중 하나인 만큼, 이에 관하여 다음 소절에서 논의하려고 한다.

3.2. 고바야시 가설에 관한 여러 가지 연구

앞 소절의 끝에 소개한 고바야시 가설의 해결을 염두에 두고 토의를 계속하여 보려고 한다. Wu 거리계 이전의 연구는 잘 알려져 있는 캘러형 거리계들, 즉 베르그만 거리와 아인슈타인-캘러 거리의 곡률에 자연스럽게 집중되어 있었다.

먼저, 복소 다양체 중에서 비 콤팩트 다양체의 대표격인 유계 영역의 경우에 수행된 연구에 관하여 알아보기로 하자.

먼저, 페퍼만 (Fefferman) 교수의 불후의 업적인 베르그만 핵함수의 임계적 전개식을 이용한 클렘벡 (Klembeck) 교수의 결과 ([14], [28]), 즉 경계가 얼마든지 미분 가능한 강 의사 볼록 영역의 경계점 근방에서의 베르그만 거리의 해석 곡률이 상수 $-4/(n+1)$ (단, n 은 이 영역의 복소 차원) 으로 수렴하는 임계 행동을 보인다는 결과가 있어서, 최소한 강 의사 볼록 영역 (strongly pseudoconvex domain) 의 경우에는 경계 근처에서는 베르그만 거리의 곡률

이 음이라는 것을 알 수 있었다.¹⁰ 그러나, 이상스럽게도¹¹ 베르그만 곡률의 부호가 영역의 내부에서 어떠한 행동을 하는지에 관하여 알 수 있는 방법이 없었으며, 설상가상으로 미분기하학의 입장에서 보면 리만 단면 곡률이 음이 될 수는 없는 경우가 존재하기도 하여, 해석(단면) 곡률이¹² 전적으로 음이 되는 것을 기대하기는 어려운 점이 있다. 이러한 어려운 점은 아인슈타인-캘러 거리의 경우와 거의 비슷하여 음의 부호를 가지지만, 내부의 곡률에 관하여는 아주 특별한 경우들, 예를 들면 영역의 자기 동형군이 한 점을 영역 내의 어느 점으로 든 옮길 수 있는 동질영역(homogeneous domain) 중에서도 특별한 유계 대칭 영역(bounded symmetric domain) 들에 관하여만 알 수 있었다. ([39], [43] 등 참조.)

일본의 아주카와 교수와 스즈키 교수는 베르그만 핵함수를 계산할 수 있으며, 동질영역이 아닌 소위 틀렌 영역이라고 불리우는 영역

$$E_m = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^{2m} < 1\}$$

의 베르그만 곡률을 직접 계산하였는데, 무척 복잡한 계산 과정을 통하여 이런 영역은 모든 자연수 m 에 대하여 베르그만 곡률이 모든 점에서 음임을 증명하였다. ([2]) 몇 년 후, 카나다의 블랜드 교수는 틀렌 영역에서 아인슈타인-캘러 거리의 곡률의 부호를 계산하여 특정 단면의 해석 곡률이 음이 됨을 밝히는 데 성공하였다. ([6])

¹⁰ 비교적 최근에 본 논문의 저자는 J. Yu 박사와의 공동연구를 통하여 이 결과를 확장하여 일반적인 두 번 미분 가능한 경계를 가지는 강 의사 볼록 영역에서도 같은 임계 행동을 보임을 증명하였다. 보다 자세한 논의는 [27]을 참조하기 바란다.

¹¹ 일반적으로, 경계점 근방의 해석이 영역 내부점에서의 해석 보다는 쉽다는 관점이 있다.

¹² 영어권에서 holomorphic sectional curvature(해석 단면 곡률)라는 용어에 대하여, holomorphic curvature라고 두 단어만 쓰면 그 의미가 확실한데 세 단어를 쓸 필요가 없다는 주장이 있다. 이러한 견해에 동조하는 입장에서 여기에서도 “해석 곡률”이라는 용어를 사용한다. 이 용어가 정착되기를 바란다.

한편, 알포스 정리와 그의 일반화를 근거로 한 일반적인 예상, 즉 음의 곡률을 가지는 거리계는 적당한 상수 인수를 허용할 때 거리 축약성을 가질 것이라고 하는 예상이 옳다면, 주어진 거리계가 음의 곡률을 가지기 위하여는 필요 조건으로서 축약성을 가져야 할 것이다. 하지만, 베르그만 거리계와 아인슈타인-캘러 거리계는 상수 인수를 허용한다 하더라도 축약성을 가지지 않음이 이미 알려져 있다. (이에 관한 보다 자세한 사항은 [42]를 참조할 것.) 따라서, 베르그만 및 아인슈타인-캘러 거리계가 고바야시 가설의 일반적인 답을 줄 것이라고 기대하는 것은 무리한 시도라 하겠다.

이 시점에서 독자들이 고찰하는 바와 같이, 고바야시 가설의 성립을 위하여는 이미 알려진 상수 인수 범위 내에서 축약성을 가지는 Wu 거리계가 알포스 정리의 정신을 위반하지 않는 유일한 대상이라고 인정하게 된다.

그러면, Wu 거리의 곡률에 대해 어느 정도나 알고 있는가? 본 논문의 저자와 미국의 Cheung 교수의 공동 연구를 통한 결과를 자세한 증명 없이 서술하여 보려고 한다. (자세한 결과는 문헌 [10] 와 [11] 을 참조할 것.)

정리 5. 양의 실수 b 에 대하여, 일반화된 틀렌 영역 $E_b = \{(z, w) \in \mathbf{C} \mid |z|^2 + |w|^{2b} < 1\}$ 의 Wu 거리에 임의로 가까우면서도 음의 곡률을 가지는 에르미뜨형 거리계가 존재한다.

자세히 보면, 이 정리가 아주카와-스즈키 정리를 포함한 이전의 정리 대부분을 내포하고 있다는 점이 먼저 눈에 띌 것이다. 이제, 조금 더 나아가 특별히 $0 < b < 1/2$ 인 경우를 생각하여 보면, 이 경우의 일반화된 틀렌 영역 E_b 는 볼록 영역이 아닐 뿐만 아니라, 사실은 이 영역과 해석적 동형인 어떤 영역도 볼록영역이 될 수가 없다는 점이 특별하다. 사실, 많은 학자들이 유계 영역 위에 음의 곡률을 가지는 에르미뜨 거리가 있다는 것과 이 영역이 볼록 영역과 해석 동형인라는 조건 사이에 밀접한 연관이 있을 것이라고 생각하여 왔었다. 그러나, 위의 결과는 볼록 영역과 결코 해석동형인 될 수 없는 E_b 위에도 음의 곡률을 가지는 에르미뜨형 거리가 존재한다는 내용도 포함하고 있어서 괄목할 만하다고 할 수 있을 것이다.

한편으로는 위의 일반화된 틀렌 영역 위의 Wu 거리가 대단히 특이한데, 이의 구조 또한 논문 [10] 과 [11] 에 자세히 설명되어 있다. 이 경우 Wu 거리는 영역 위의 대부분의 점에서 실 해석 가능이지만 놀랍게도 한 번 미분 가능할 뿐 두 번 미분 불가능한 점이 존재한다. 심지어는 영역의 경계가 매우 매끄러운 b 의 값이 자연수인 경우에도 이러한 특이한 현상이 생긴다는 사실이 관찰되었다. 그런 한편, $b > 1$ 인 경우에는 강 의사 볼록 경계점 근방에서는 Wu 거리의 해석 곡률이 아예 상수 -2 가 되는 근방이 존재하는 특이한 현상이 관찰되기도 한다. 이러한 놀라운 현상은 어찌하여 생기는 것인지에 대한 연구 또한 본 논문의 저자와 Cheung 교수에 의하여 수행 되었고, 이의 응용으로서, 이전에는 연구에 어려움이 많았던 고차원 틀렌 영역의 Wu 거리의 임계 행동의 상당 부분을 이해할 수 있게 되었다.

콤팩트 복소 다양체의 연구는 비 콤팩트 복소 다양체에는 적용되기 어려운 위상수학 및 대수기하학적 방법론의 적용이 가능하기 때문에 상당히 다른 방향의 연구가 가능하다. 프랑스의 J.P. Demailly 교수는 1995년 미국 캘리포니아 산타 크루즈 대학에서 개최된 미국 수학회의 하계 연구소 강연에서 위에 소개한 고바야시 가설의 반례가 존재함을 발표하였다. 이 반례의 정확한 성립 여부는 아직 그 세부 증명이 출판되기를 기다리는 상황에 처해 있지만, 이러한 반례의 구성이 유계 영역의 경우에는 적용되지 않으므로, 유계 의사볼록 영역에 관한 고바야시 가설의 성립 여부는 아직도 미해결 문제로 남아 있다고 말할 수 있다.

3.3. 미해결 연구 과제 소개

여기에서는 위의 토의와 관련된 크고 작은 미해결 문제를 나열하려고 한다.

문제 2. 틀렌 영역 E_b ($b \geq 2$ 자연수)의 경우에는 소위 고유 해석 사상 (proper holomorphic map) $f : E_b \rightarrow B^2$ 이 존재하는 것이 강 의사 볼록 경계점 근방에서 Wu 거리의 곡률이 음의 상수 -2 가 되게 하는데 결정적인 역할을 한다. (이 부분은 이미 증명되었다.) 그렇다면, 이와 같은 현상이 일반적

인 유계 볼록 영역으로서 단위구 영역 B^2 로 가는 고유 해석 사상을 가지는 경우에도 관찰 될 것인가?

이 문제의 해결은 틀렌 영역의 Cheung-Kim 정리의 ([10, 11]) 근본적인 이 유를 밝힐 뿐 아니라, 보다 일반적인 영역의 Wu 거리의 곡률이 가지는 임계 행동을 조사할 수 있는 방법론을 제시하게 될 것이다.

문제 3. 매우 일반적인 질문이다. 일반적인 벡터다발에 정의된 편슬러 형 길이 함수의 단위구 영역마다 최적 타원체를 생각함으로써 새로운 에르미뜨형 내적을 소개할 수가 있는데, 편슬러 길이 함수의 곡률이 음일 경우에 최적 타원체로 주어지는 에르미뜨형 내적의 곡률도 음이 되겠는가?

이 문제는 소위 벡터 다발의 Grauert positivity 와 Griffiths positivity 라는 두 개념 사이의 관계를 묻는 것으로 유명한 문제이다. 우리가 이제까지 다루었던 고바야시 거리가 접다발에 정의된 편슬러형 길이 함수에 대응되고, Wu 거리는 그의 최적 타원체로 생성된 에르미뜨 거리인 점을 생각한다면, Wu 거리의 곡률 문제가 이 문제와 매우 밀접한 관계가 있음을 인식하게 될 것이다. 이 문제는 또한 해석 다가 함수 (analytic multifunction)의 연구와도 관련이 있을 것으로 보인다.

문제 4. 종수 (genus) 가 2 이상인 콤팩트 리만 곡면의 타이키뮐러 공간은 복소 $3g - 3$ 차원 유계 의사 볼록 영역이다. 이 영역의 Wu 거리의 해석 곡률은 음인가?

일반적으로 타이키뮐러 공간에 정의된 Wu 거리의 리만 단면 곡률은 양수 가 되는 경우가 있음이 최근 메이서 교수와 올프 교수의 공동 연구 결과 ([34])로부터 도출되었다. 그렇다면, 해석 곡률도 양수가 되는 경우가 있겠는가? 만일 그렇다면, Wu 거리의 해석 곡률이 음이 될 것이라는 예상은 반례를 맞이하게 될 것이며, 이 경우 타이키뮐러 공간의 타이키뮐러-고바야시 거리의 편슬러 해석 곡률이 항상 음이 되는 현상에 대비되는 놀라운 현상이 나타나는 결과를 초래할 것이다.

문제 5. 비교적 작은 문제이다. Wu 거리계의 거리 축약성에 나타나는 인수인 정의역 다양체의 복소 차원의 제곱근은 과연 필수 불가결한 최선의 인수인가?

이 문제의 답은 긍정적일 것이라고 예상되는데, 아마도 이중 원반 영역 $D \times D$ 와 복소 2차원 단위구 사이의 해석 사상을 생각함으로써 증명이 가능할 것이라고 생각되는 비교적 쉬운 문제라고 생각된다.

문제 6. 강 의사 볼록 유계 영역에서 Wu 거리의 곡률의 임계 행동을 분석하라.

Wu 거리의 임계 행동은 이미 연구된 바가 있으나, 이 결과로부터 곡률의 임계 행동을 추론하는 것이 당장 가능한 것 같지는 않다. 따라서, 이 문제는 클렘 벡 정리 등의 곡률 문제에 비추어 매우 자연스러운 문제라 하겠다. 이 문제는 현재 몇몇 학자들에 의하여 이탈리아에서 연구가 지금 진행되고 있다.

문제 7. 위 틀렌 영역의 경우, Wu 거리는 어느 경우에도 캘러형이 아니다. Wu 거리가 캘러형인 영역은 어떠한 영역이겠는가?

Wu 거리 자체가 최근 발견된 만큼, 거의 대부분의 질문이 전인 미답의 상태이고, 여러 가지 자연스런 질문이 또한 대두될 수 있다. 그러나, 여기에서는 이 정도로 문제의 소개를 멈추려 한다.

4. 제2종 Wu 거리와 쌍곡 다양체의 대수성

Wu 교수가 새로운 불변 거리계를 소개한 그의 1993년 논문 ([42]) 에는 위에서 소개한 제1종 Wu 거리계 이외에도 여러 가지 불변 거리계가 구성되어 있다. 이 중에서 제1종 Wu 거리가 먼저 관심을 끈 이유는 그 개념이 불변 거리계 중에서 가장 일반적으로 많은 기여를 하는 고바야시 거리계와 밀접한 관계를 가지기 때문이었다. 그렇다고 하여, 우리의 관심을 제1종 Wu 거리에만 집중시켜야 할 당위성은 없는 법이다. 이 절에서는 소위 우리가 제2종 Wu 거리계 (Wu metric of the second kind) 라고 부르는 개념을 소개하고, 이 거리계

를 이용하여 카라테오도리 쌍곡성을 가지는 복소 다양체의 대수적 매립 문제를 해결한 Wu 교수의 결과를 소개하려고 한다. 아울러, 이 방면의 미해결 연구 과제에 관하여도 언급할 예정이다.

4.1. 카라테오도리 쌍곡성

먼저, 전통적인 카라테오도리 거리계 (Carathéodory metric) 의 개념부터 소개한다.

복소 다양체 (혹은 영역) M 의 복소 접다발을 TM 이라고 쓰고, 점 $p \in M$ 에서의 접공간을 $T_p M$ 으로 표시하기로 하자. 앞에서와 마찬가지로 D 는 단위 원반 영역을 의미하기로 한다. 이제, 집합

$$\mathcal{F}_p = \{f : M \rightarrow D \mid f(p) = 0 \text{ 를 만족하는 해석 사상}\}$$

을 생각하면, 카라테오도리 길이 함수 $C_M : TM \rightarrow \mathbf{R}$ 은 관계식

$$C_M(p; v) = \sup\{|df_p(v)| \mid f \in \mathcal{F}_p\}$$

에 의하여 정의된다.

보충 2. 위의 정의를 보다 미분기하학적으로 ‘본질적인’ (intrinsic) 형태를 갖추도록 고칠 수 있는데, 예를 들면, 단위원반 영역 D 의 포앙카레 길이 함수를 P_D 로 쓸 때 위의 카라테오도리 길이 함수는 관계식

$$C_M(p; v) = \sup\{P_D(f(p); df_p(v)) \mid f : M \rightarrow D \text{ 는 해석 함수}\}$$

를 만족한다. 이 관계식이 위에 소개한 카라테오도리 길이 함수의 정의와 동치임을 확인하여 보기 바란다.

보충 3. 전통적으로 카라테오도리 거리 $d_M^C : M \times M \rightarrow \mathbf{R}$ 은 수식

$$d_M^C(p, q) = \sup\{d_P(f(p), f(q)) \mid f : M \rightarrow D \text{ 는 해석 함수}\}$$

에 의하여 정의된다. 여기서 d_P 는 단위원반 영역의 포앙카레 거리를 나타낸다. 이제 카라테오도리 길이 및 거리에 관한 여러 성질을 간단히 정리하기로 하자.

- (C1) $C_D = P_D$, $d_D^C = d_P$ 를 만족한다. 즉, 단위 원반 영역에서는 카라테오도리 길이 함수와 거리 함수가 포앙카레 길이 및 거리와 각각 일치한다.
- (C2) C_M 은 연속함수이다.
- (C3) C_M 은 삼각부등식 $C_M(p; v + w) \leq C_M(p; v) + C_M(p; w)$ 를 만족한다.
- (C4) 카라테오도리 거리계는 해석사상에 관한 거리 축약성을 가진다.
- (C5) 카라테오도리 길이 (및 거리) 는 일반적으로 양의 정부호성을 가지지 않는다. 예를 들어, 리우빌의 정리 때문에 $C_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$ 이 성립하고, 또한 최대 절대값 정리 때문에 모든 콤팩트 복소 다양체 M 에 대하여 $C_M \equiv 0$ 가 성립한다. 또한 없앨 수 있는 특이점에 관한 정리 (removable singularity theorem) 에 의하여 콤팩트 다양체에서 유한 개수의 점을 제거한 구멍 뚫린 다양체에서도 여전히, 카라테오도리 길이 및 거리가 0 이 된다.
- (C6) 카라테오도리 길이 함수를 적분하여 최단거리 개념으로 거리를 구성할 수 있는데 (본 논문의 2.1 참조), 이렇게 구성한 거리는 고바야시 거리계의 경우와는 달리 d^C 와 일반적으로 일치하지 않는다. (본 논문 2.3 의 정리 2 와 대조하여 볼 것.)

위의 성질들은 대부분 카라테오도리 거리계의 유용성을 대변하지만, (C5) 만은 대단히 부정적인 면을 보여준다고 하겠다.

콤팩트 다양체를 대수적으로 매립하는 데에 카라테오도리 쌍곡성을 사용하겠다고 이 절의 머리에서 약속한 것을 상기하여 보자. 전통적인 카라테오도리 거리계를 이용한 단순한 쌍곡성의 정의를 하여서는 아무 쓸모가 없음을 (C5) 가 알려주고 있으므로 무엇인가 새로운 정의가 필요할 것은 명백한데, 현재 널리 받아들여지고 있는 정의는 다음과 같다.

정의 3. (고바야시) 복소 다양체 M 이 해석가능 피복사상 (holomorphic covering mapping) $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ 을 가지며 동시에 \tilde{M} 의 카라테오도리 길이 함수 $C_{\tilde{M}}$ 이 양의 정부호성을 가지면, M 이 카라테오도리 쌍곡성 (줄여서 C-쌍곡성)을 지니고 있다고 정의한다.

이 정의를 자세히 살펴보면, $C_M \equiv 0$ 가 성립하는 경우에도 M 은 C-쌍곡일 수가 있는데, 종수 (genus) 가 2 이상인 콤팩트 리만 곡면의 경우가 그 대표적인 예가 됨을 쉽게 확인할 수 있다.

다른 한편, C-쌍곡 다양체 M 의 경우 위의 정의를 만족하는 피복사상 $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ 을 이용하여 \tilde{M} 의 카라테오도리 길이(거리) 함수 $C_{\tilde{M}}$ 를 “밀어 내린” (push-down) 거리가 M 위에 수식

$$C'_M(q; \xi) = C_{\tilde{M}}(\tilde{q}; d\pi_{\tilde{q}}^{-1}(\xi))$$

(단, $\tilde{q} \in \pi^{-1}(q)$) 에 의하여 정의된다. 이 정의는 일견 불완전해 보이지만, $C_{\tilde{M}}$ 이 피복다양체 \tilde{M} 의 덤개변환 (deck transform) 에 의하여 보존되기 때문에 아무런 문제도 발생하지 않는다. 이렇게 정의된 길이 함수들이 축약 거리계를 정의함을 또한 확인할 수 있다.

그러나, $C_{\tilde{M}}$ 이 일반적으로 고바야시 길이 함수 $k_{\tilde{M}}$ 과 일치하지 않을 수 있기 때문에 C'_M 과 k_M 이 항상 일치한다고 할 수는 없다. 한편, 임의의 C-쌍곡 다양체는 고바야시 쌍곡성을 지니므로 — 이는 부등식 $C_X \leq k_X$ 이 모든 복소다양체 X 에서 성립하기 때문이다 — 결국 C-쌍곡 다양체는 고바야시 쌍곡 다양체보다는 더 특수한 것이라고 할 수 있다. 실제로, 이 절의 중심 내용은 이 특수성을 보다 증폭시킨 것으로서, 자세한 내용을 다음 다음 소절에서 보다 정확히 소개할 예정이다.

4.2. 제2종 Wu 거리의 구성

C-쌍곡 다양체의 구조 연구에 주요 역할을 담당할 제2종 Wu 거리계 역시 최적타원체를 사용하여 정의한다. 이를 위하여 우선 필요한 기호 몇을 정의하기로 하자. 우선 C-쌍곡 다양체 M 과 $C_{\tilde{M}}$ 이 양의 정부호성을 가지는 해석 피복사상 $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ 을 고정하고, 아래의 개념과 그에 상응하는 기호를 생각한다.

$Q_{\tilde{x}}$ 점 $\tilde{x} \in \tilde{M}$ 의 복소 접공간 $T_{\tilde{x}}\tilde{M}$ 위에 정의된
양의 준 정부호성 (positive semi-definite) 을
가지는 에르미뜨 형 내적 전체의 집합

$\mathcal{F}_{\tilde{x}}$ 조건 $f(\tilde{x}) = 0$ 를 만족하는 해석사상
 $f : \tilde{M} \rightarrow D$ 전체의 집합

β_0 \mathbf{C}^n 속의 단위구 영역 B^n 에서 곡률이 -4
가 되도록 표준화 한 포앙카레 베르그만 거리를
원점에서의 접공간 T_0B^n 에 국한한 내적

$$\Phi_{\tilde{x}} = \{f^*\beta_0 \mid f \in \mathcal{F}_{\tilde{x}}\}$$

접공간 $T_{\tilde{x}}\tilde{M}$ 위에 정의된 모든 에르미뜨형 대칭 이중 선형 형식 (Hermitian symmetric bilinear form) 전체의 집합이 유한 차원 벡터 공간을 이루므로, 여기에 유클리드 공간의 표준위상 구조를 주기로 하자. 그러면, \tilde{M} 의 카라테오도리 거리가 양의 정부호성을 가지므로, 집합 $\Phi_{\tilde{x}}$ 는 집합 $Q_{\tilde{x}}$ 의 내부점 (interior point) 을 적어도 하나 포함한다.

이제, 제1종 Wu 거리계를 정의할 때와 비슷한 최적타원체 방법을 적용하되, $\Phi_{\tilde{x}}$ 의 원소 중에서 행렬식의 값이 가장 큰 것을 찾아 보기로 하자. 복소함수의 정규족 (normal family) 의 수렴에 관한 몽텔의 정리에 의하여 이러한 원소는 반드시 존재한다. 조금만 더 생각하여 보면 본 논문 2.4.2 의 보조정리 1의 결과를 여기에 적용하여 이러한 원소가 유일하게 결정되는 것도 알 수 있다. 따라서, 이 원소를 $\gamma_{\tilde{x}}$ 라고 쓰면, 다양체 \tilde{M} 의 모든 점에 에르미뜨형 내적

을 주는 대응관계

$$\tilde{\gamma} : \tilde{x} \in \tilde{M} \mapsto \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$$

가 정의된다. 이렇게 정의된 $\tilde{\gamma}$ 는 다양체 \tilde{M} 의 해석 자기 동형 (holomorphic automorphism) 에 의하여 보존되므로, 관계식

$$\gamma_x(v, v) = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(d\pi_{\tilde{x}}^{-1}(v), d\pi_{\tilde{x}}^{-1}(v))$$

(단, $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$) 이 M 에 소위 “밀어 내린” 거리 개념을 정의한다. 이 대응 관계

$$\gamma : x \in M \rightarrow \gamma_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbf{R}$$

이 바로 제2종 Wu 거리 (The Wu metric of the second kind) 이다.

이 거리의 기본적인 성질을 살펴 보는 것도 흥미로울 수 있겠으나, 이러한 것은 관심있는 독자 스스로 발견하도록 하고 여기에서는 이 거리의 곡률에 관한 해석과 그 결과에 중점을 두고 있으므로, 다음 소절로 넘어가서 Wu의 정리와 그 증명을 소개하려고 한다.

4.3. 카라테오도리 쌍곡 다양체의 대수성

이 소절에서 증명하려는 주요 결과는 다음과 같다.

정리 6. (Wu) 콤팩트 C-쌍곡 복소 다양체의 제2종 Wu 거리는 초함수 미분형 (current) 의 의미로서 음의 리치 곡률 (Ricci curvature) 을 가진다.

이 결과가 결국에는 콤팩트 C-쌍곡 복소 다양체에서 복소 사영공간 \mathbf{P}^N (단, N 은 충분히 큰 자연수) 속으로 들어가는 해석 매립 사상 (holomorphic embedding map) 의 존재성을 내포하게 되지만, 지금은 그런 논의는 일단 접어두고 이 정리의 증명만을 토의하려고 한다.

증명. 이 정리의 결론은 순전히 국소적인 명제이므로, 필요할 때마다 주어진 콤팩트 C-쌍곡 다양체 (M 이라 부르자) 를 적당한 해석적 피복 다양체로 대치함으로써, 일반성을 유지하면서도 M 상의 임의의 점 x 마다 df_x 가 선형

동형 사상 (linear isomorphism) 이 되는 해석사상 $f : M \rightarrow B^n$ 이 존재한다고 가정하기로 하자.

B^n 상의 임의의 점 y 에 대하여 $\mu_y : B^n \rightarrow B^n$ 을 조건 $\mu(y) = 0$ 를 만족하는 단위구 영역 B^n 의 해석 자기 동형 사상이라고 하자. 그러면, 표준화된 포앙카레-베르그만 거리 β 에 관하여 등식 $\beta_y = \mu_y^* \beta_0$ 가 성립하고, 또한, 임의의 해석사상 $g : M \rightarrow B^n$ 에 대하여 관계식

$$g^* \beta_{g(x)} = g^* \circ \mu_{g(x)} = (\mu_{g(x)} \circ g)^* \beta_0$$

가 성립한다. 따라서, 제2종 Wu 거리의 정의에 의하여 부등식

$$\det g^* \beta_{g(x)} \leq \det \gamma_x, \quad \forall x \in M$$

이 성립한다. (여기서, γ 는 M 의 제2종 Wu 거리이다.)

이제 임의의 점 $p \in M$ 을 고정하고, 해석함수의 정규족 수렴에 관한 몽텔의 정리 (Montel's theorem) 를 적용하여, 조건 $f(p) = 0, \gamma_p = f^* \beta_0$ 를 만족하는 해석사상 $f : M \rightarrow B^n$ 을 선택한다. 미분형 df_p 가 쌍대사상이므로, f 를 p 근방에서 M 의 국소 좌표계로 사용할 수 있는데, 이 경우 좌표계 근방 (U 라고 표시하기로 하자) 을 필요할 때마다 약간 줄이는 것을 허용하면, 이 좌표계 근방에서 다음 관계식

$$\begin{aligned} p &= 0 \\ \log \frac{\det \beta_0}{\det \gamma_0} &= 0 \\ \log \frac{\det \beta_x}{\det \gamma_x} &\leq 0, \quad \forall x \in U \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서, 우리는 초함수 미분형에 관한 아래 부등식

$$\partial \bar{\partial} \log \det \beta_x|_p \leq \partial \bar{\partial} \log \det \gamma_x|_p$$

를 얻게 되고, 여기에 $\partial \bar{\partial} \log \det \beta_x|_p$ 이 양의 정부호성을 가지는 점을 합하면, 적당한 양의 상수 A 에 대하여 부등식

$$\partial \bar{\partial} \log \det \gamma_x \geq A \gamma_x$$

이 U 상의 모든 점 x 에 대하여 성립하게 됨을 알 수 있다. 다시 말하면, 제2종 Wu 거리의 리치 곡률은 초함수 미분형의 의미로서 음의 정부호성을 가지게 되는 것이며, 따라서 증명이 완결되었다. \square

이제 Wu의 매립정리를 소개한다.

정리 7. (Wu) 임의의 콤팩트 C-쌍곡 복소 다양체는 사영적 대수 다양체이다.

증명. M 을 콤팩트 C-쌍곡 복소 다양체라 하자. M 의 제2종 Wu 거리를 합성곱(convolution)을 이용하여 얼마든지 미분 가능한 에르미뜨형 거리로서 원래 Wu 거리에 근사시킴으로써 음의 리치 곡률을 가지는 미분 가능한 에르미뜨 거리를 만들 수 있다. 그러면, 고다이라(Kodaira)의 정리 ([19] 참고)에 의하여 원하는 결론을 얻게 된다. \square

4.4. 미해결 연구 과제 소개

위에서 소개한 Wu의 정리는 다음 연구 문제의 부분해라고 할 수 있을 것이다.

문제 8. 임의의 콤팩트 고바야시 쌍곡 복소 다양체가 사영적 대수 다양체임을 증명하라.

이 문제는 정수론에도 그 파급 효과가 있다고 하는데, S. Lang의 이름이 연관되어 있는 문제이다. 이 문제와 관련하여

문제 9. 고바야시 쌍곡 복소 다양체의 제1종 Wu 거리는 음의 리치 곡률을 가지는가?

라는 문제도 생각하여 볼 수 있을 것이다. 아마도 틀렌 영역의 경우에는 증명이 가능할 것이라고 예상되지만, 일반적인 경우의 증명을 가능하게 할 만한 방법론이 아직 발견된 것이 없으므로 비교적 고바야시 거리에 관한 연구가 많은 강 볼록 영역의 경우를 조사하는 것이 좋을 것이라고 예상된다.

이에 덧붙여, 강 볼록 영역의 경우 고바야시 거리와 카라테오도리 거리가 일치하는 좋은 성질이 있으므로, 이와 관련하여

문제 10. 유계 강 볼록 (bounded strongly convex) 영역에서 제1종 Wu 거리와 제2종 Wu 거리가 항상 일치하는지를 조사하라.

는 문제를 생각할 수도 있을 것이다. 만일 이 문제의 답이 긍정적이라면, 당장에 제1종 Wu 거리의 리치 곡률이 음임을 추론할 수 있기 때문이다.

일반적으로 거리계의 불변성은 그 정의가 접다발의 선형 구조에만 의존하게 함으로써 저절로 얻어지는 것이 보통이다. 따라서 최적 타원체 이외의 다른 선형 구조를 이용한 새로운 불변 거리계를 발견하여 곡률 등의 문제를 보다 쉽게 해결하려는 시도도 유망할 것이라고 예상된다.

5. Wu 거리의 대칭성과 자기동형군 연구

이 절에서는 조금 대상을 바꾸어, 유계 의사볼록 영역의 자기동형군에 관한 연구에서의 Wu 거리의 유용성을 조사하여 보려고 한다. 불변 거리의 중요한 특성 중 하나가 쌍대 해석 사상의 기하학적 성질을 해석할 수 있다는 점인 만큼 불변거리를 이용하여 자기 동형군을 연구하는 것은 매우 당연하고도 자연스러운 일일 것이다. 여전히, 자세한 증명과 난삽한 논증보다는 전체적인 개관과 구상의 소개에 역점을 두며 주요 내용을 서술하려고 한다.

5.1. 자기동형군 및 대칭영역 연구 개관

이제부터는 이 논문의 끝까지, 별도의 설명이 없는 한 복소 유클리드 공간 C^n 내의 유계 영역에 초점을 맞추기로 한다. 따라서, 장황한 수사를 피하기 위하여 단순히 ‘영역’이라고 하면, 복소 유클리드 공간 내의 유계 영역을 의미하기로 한다.

영역의 자기동형군 (the group of holomorphic automorphisms) 이 수학 연구의 관심 대상으로 부각된 것은 아마도 복소 2차원의 경우 리만 사상 정리 (Riemann mapping theorem) 가 성립하지 않음을 보인 포앙카레의 증명이 제

시된 20세기 초엽이 아닌가 생각한다. 복소 2차원 단위구 영역 (unit ball) 과 이중 원반 영역 (bi-disc) 이 서로 해석 동형 (biholomorphic) 이 될 수 없음을 보인 이 증명은, 이를 영역의 자기동형군이 서로 위상군 (topological group) 으로서 동형일 수 없음을 보이는 데에 근거한 것으로서, 해석 동형성 연구에 획기적인 전기를 마련하였다고 할 수 있다.

불변 거리계의 입장에서 보면, 자기 동형은 복소 해석학적 구조 뿐만 아니라 기하학적 구조도 보존하고 있으므로, 자기 동형군이 매우 거대하여 임의의 한 점을 영역 내의 어느 점으로든 자기 동형으로 변환할 수 있는 소위 동질성 (homogeneity) 을 지니는 경우에는 영역 자체가 매우 특별하여야 할 것이다. 이러한 예상은 카르탕 교수의 유명한 대칭 공간 (symmetric space) 연구 논문에서 그 뜻이 명백하여졌고, 대칭 영역을 포함한 대칭 공간의 분류 문제를 매듭지은 이 연구 결과는 수학 연구의 역사에서 기념비적인 것이 되었다. 이 후, 대칭영역은 아니지만 동질 영역의 분류 문제 역시 연구되었고 상당한 결과가 이미 알려져 있다.

대칭성을 직관적으로 이해하면, 대칭성이 적을수록 제약이 줄어들고, 대칭성이 많을수록 제약이 늘어나는 것이 보통이므로, 자기동형군이 거대한 영역은 매우 제한되어 있을 것이라고 예상할 수 있을 것이다. 실제로, 복소 차원이 2 이상이면, 영역이 위상적으로 축약 가능 (contractible) 하더라도 대부분의 영역이 항등 사상을 제외한 다른 자기 동형을 가지지 않는다. ([7], [17] 참고.) 따라서, 자기 동형군으로 영역을 식별하려는 시도를 하려면 자기 동형군이 상당히 크지만 동질 영역이 되기에는 약간 작은 경우를 생각하는 것이 적절한 연구 방향일 것이다.

그러면, 어떤 조건을 만족하는 자기 동형군이 올바른 연구 대상이 될 것인가? 우선, 자기 동형군이 콤팩트 부분집합 위에서 고른 수렴성을 정의하는 위상, 즉 콤팩트-오픈 위상 (compact-open topology) 을 원래부터 가지고 있기 때문에 당연히 위상군 (topological group) 의 구조를 가지고 있는데, 게다가 리이 군 (Lie group) 구조도 가지고 있음이 이미 알려져 있음을 생각하자. ([9]) 이런 관점에서 근대 연구의 흐름을 보면, 올바른 연구 조건은 자기 동형군이 비

콤팩트인 것임이 거의 당연하게 보이므로, 우리 역시 같은 입장을 취하기로 한다.

비 콤팩트 자기동형군을 가지는 영역¹³의 인식 및 분류 문제는 요사이 상당히 많은 연구가 이루어졌는데 우선 대표적인 결과를 전문적인 난삽한 논의와 자세한 용어 설명 없이 간단히 소개하기로 한다.

정리 8. (Wong, 1977/Rosay, 1979) 주어진 영역의 자기동형군 작용 (automorphism group action)에 의한 어떤 내부점의 궤도가 강 의사 볼록 경계점에 집적되면, 이 영역은 단위구 영역과 해석 동형이다.

이 정리의 결과로서, 다음 정리들이 성립한다.

정리 9. (Wong, 1977) 자기 동형군이 비 콤팩트인 강 의사 볼록 영역은 단위구 영역과 해석 동형이다.

정리 10. 콤팩트 복소 다양체의 해석적 피복공간이 되는 매끄러운 경계를 가지는 영역은 단위구 영역과 해석 동형이다.

다면수 복소 함수론 및 복소 기하학의 중심 연구 대상 중 하나인 유계 영역의 연구는 상당히 많은 부분이 경계면의 레비 (Levi) 기하적 성질과 연관되어 있다. 이 중, 근래에 가장 많이 고려되는 개념이 소위 “유한 접촉도” (finite type)라는 개념인데 ([12]), 이는 주어진 경계점을 지나는 모든 해석 다양체 (analytic variety)와 영역의 경계면과의 최대 접촉도를 의미하는 것이다. 일반적으로 매끄러운 경계면의 유한 접촉도는 짹수임이 알려져 있고, 따라서 위의 정리들은 유한 접촉도가 2인 경우, 즉 유한 접촉도가 가장 작은 경우를 다룬 것이라 할 수 있다.

일반적으로 실 해석 가능 (real analytic) 경계를 가지는 영역은 유한 접촉형 영역이며, 이 외에도 유한 접촉형 경계를 가지는 영역은 무한히 많다. 따라

¹³유계 영역의 자기 동형군이 비 콤팩트라는 조건은 영역 내의 임의의 점의 자기 동형군 작용 (automorphism group action)에 의한 궤적 (orbit)이 적어도 하나의 경계점을 집적점으로 가져야 한다는 조건과 동치이다. 이 명제는 부동군 (isotropy subgroup)이 몽델의 정리에 의하여 콤팩트가 되는 현상으로부터 도출된다.

서 위의 정리와 같은 맥락의 정리를 증명하는 것이 바람직하다는 생각에 모두 동의할 것이다. 이에 관한 정리중 대표적인 것을 여기에 실는다.

정리 11. (Bedford/Pinchuk 1988) 복소 2차원 영역이 실 해석 가능 경계를 가지고, 자기 동형군이 비 콤팩트이면, 이 영역은 적당한 자연수 m 에 대하여 틀렌 영역 $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^{2m} < 1\}$ 과 해석 동형이다.

이 정리는 보다 일반적인 형태로 개선되었고, 지금 이 논문을 쓰는 순간에도 연구가 진행되고 있다. 보다 자세한 명제와 증명 방법에 관하여는 문헌 [4, 5]를 추천한다.

영역의 경계가 무한 접촉형인 경우의 대표적인 경우는 경계가 완전히 레비 평탄 (Levi flat)인 경우와 그렇지 않은 경우의 두 가지를 생각하여야 할 것이다. 대표적인 정리는 다음과 같다.

정리 12. (K. T. Kim 1992) 경계가 구분적 레비 평탄형 (piecewise Levi flat)인 복소 영역의 자기 동형군이 비 콤팩트이면, 이 영역은 단위 원반 영역과 다른 (복소) 영역의 데카르트 곱으로 나타나는 영역과 해석 동형이다.

특히 복소 2차원의 경우에는 이러한 영역은 이중 원반 영역과 해석 동형임을 확인하기 바란다.

위에서 다루는 영역은 거의 모든 경계점이 레비 평탄형인데, 이러한 영역이 유계인 경우에는 경계점 중 특이점 (singular point)이 반드시 생기게 된다. 그러나 왕-로제이 정리, 베드포드-핀추크 정리 등에서 보듯이 경계가 전체적으로 매끄러운 영역의 자기동형군을 연구하는 연구의 흐름에서는 유계 영역으로서 경계가 전체적으로 매끄러우면서도 무한 접촉형 경계점이 있는 영역의 자기 동형군 궤적에 대한 연구 결과가 필요하게 될 것이다. 이에 관한 일반적인 정리는 아직 발견되지 않았으나, 연구 방향을 제시하는 아래 가설이 1987년 경에 제시되었다.

가설 1. (Greene-Krantz 가설) 매끄러운 경계를 가지는 유계 의사복소 영역의 자기 동형군 궤도는 무한 접촉형 경계점 근방에 집적될 수 없다.

이 가설과 관련된 제반 연구도 일부 부분 해결이 출판된 바 있고, 지금도 여러 학자에 의하여 연구되고 있다. 얼른 훑어만 보아도, 이 방면의 연구 결과가 비 콤팩트 자기동형군을 가지는 영역의 완전 분류에 근접하였다고 말하기에는 매우 부족한 점을 발견하게 될 것이다. 그러나, 이 연구 방향을 자세히 소개하는 것이 이 논문의 중심 내용이 아닌 만큼, 이에 관한 논의 및 소개는 이 정도로 하고, 이 논문의 주제와 일관되도록, 자기동형군 연구에서 나타나는 Wu 불변 거리계를 포함한 여러 불변 거리계의 역할에 대하여 소개하려고 한다.

5.2. 임계 행동 분석 vs. 측도 확대법

5.2.1. 왕-로제이 방법론. Wong 의 정리가 발표된 1977년 경의 연구 상황을 살펴보면, 고바야시 거리 및 카라테오도리 거리의 임계 행동에 관한 Graham 교수의 연구가 이미 알려져 있었고, 이보다 약간 앞서 위에서도 짧깐 언급하였던 Fefferman 교수의 베르그만 핵함수의 임계행동 연구도 이미 활용될 수 있는 주요 방법론으로 주어져 있었다. Wong 교수는 자신의 논문에서 거리 개념 보다는 부피 개념에 초점을 맞추고, 고바야시/아이젠만 부피 개념과 카라테오도리 부피 개념이 일치하는 점을 소유한 유계 영역은 반드시 단위구 영역이어야 한다는 Wu 의 정리에 착안하였다.

이제, 영역 G 가 경계점 $p \in \partial G$ 에서 강 의사 볼록이라고 하자. 그러면, 강 의사 볼록성의 정의로부터 p 점 근방의 해석적 국소 좌표계를 바꾸어 p 는 원 점이 되고 영역 G 는 부등식

$$\operatorname{Re} z_1 > |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 + o(\|z\|^2)$$

으로 표시되게 할 수 있다. 어림으로 말하자면, 영역 G 는 내부로부터 경계점 p 를 향하여 접근하면 할수록 단위구 영역과 해석동형인 지겔 영역

$$\operatorname{Re} z_1 > |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2$$

과 구분할 수 없을 정도로 가까워진다고 할 수 있다. 실제로, Wong 교수는 계산을 통하여, 고바야시-아이젠만 부피요소 (volume element) K 와 카라테오도리 부피요소 C 의 점 $q \in G$ 에서의 비 $(C/K)|_q$ 의 값이 내부점 q 가 경계

점 p 에 한없이 가까이 접근함에 따라 1로 수렴함을 증명하였다. 여기에서 영역 G 의 자기 동형사상 f_j ($j = 1, 2, \dots$) 들이 존재하여 어떤 점 $x \in G$ 에 대하여 j 가 무한대로 발산할 때 $f_j(x)$ 가 p 로 한없이 가까워진다고 하자. 그러면, 자기 동형이 C/K 의 값을 보존하는 불변성 때문에 항등식

$$(C/K)|_x = \lim_{j \rightarrow \infty} (C/K)|_x = \lim_{j \rightarrow \infty} (C/K)_{f_j(x)} = 1$$

을 얻게 된다. 따라서, 정규족에 관한 Wu의 정리를 쓰면 원 영역 G 가 단위구 영역과 동형이 되는 것이다.

이러한 방법론을 자기동형군 궤도가 집적되는 경계점 근방에 국소화 하는 방법은 Rosay 교수가 찾아내었고, 이러한 봉우리 함수 (peak function)를 이용한 국소화 방법론은 후에 여러 연구에 영향을 주었다. 특히 앞 절에서 서술한 매끄러운 경계를 가지며 콤팩트 다양체를 피복하는 영역이 단위구 영역과 해석 동형이라는 결과는 순전히 이 국소화의 결과에 의하여 증명될 수 있는 것인데, 이 결과는 카르탕 교수의 대칭영역 분류 이후 상당히 오랫동안 증명이 얻어지지 못한 문제를 해결한 것이었다.¹⁴

5.2.2. 핀추크 측도 확대법. 위의 방법론과는 관점을 달리 하는 방법론이 1980년을 전후하여 등장하였는데, 이름하여 측도 확대법 (the scaling method)이라고 불리우는 이 방법의 요체는, 자기 동형군의 궤도가 집적되는 점 (궤도 집적점이라 부르기로 하자) 근방에 미세 국소화를 계속하는 과정 대신에, 이를 뒤집어 궤도 집적점을 기준으로 주어진 영역 (G 라 하자) 을 점진적으로 확대

¹⁴ 카르탕 교수의 대칭 영역 분류를 보면 단위구 영역의 경우를 제외한 모든 다른 대칭 영역은 그 경계에 미분 불가능한 특이점을 가진다. 따라서, 이러한 특이점을 가지는 대칭 영역을 해석 동형으로 변환하여 새로 변환된 영역의 경계 전체가 매끄러운 곡면이 되는 유계 영역이 되도록 할 수 있겠는가라는 질문이 자연스럽게 대두된다. 왕의 정리에 관한 로제이 교수의 국소화에 따르면, 대칭 영역은 동질 영역이어서 모든 경계점이 자기 동형군 궤도의 집적점인데이다, 경계 전체가 C^2 의미로서 매끄러우면 반드시 경계점 중 한 점은 강 볼록 (따라서 강 의사 볼록), 점이 되므로, 결국 이러한 영역이 단위구 영역과 반드시 해석 동형이어야 한다. 이 결론이 위의 변환 및 재 매립 문제를 해결하는 바를 이제 쉽게 확인할 수 있을 것이다.

하되, 확대 사상의 함수열을 L_j 라고 하면 $L_j \circ f_j$ 가 수렴하는 정규족을 이루고 그 부분수열의 극한으로 나타나는 사상이 원래 영역을 (유계가 아니기는 하지만) 지겔 영역 또는 툴렌형 영역 등으로 해석동형적으로 변환하도록 하려는 것이 그 목적이다. 이런 방법이 기술적으로 묘한 점은, 자기 동형 f_j 에 관하여 구체적으로 아는 바가 없더라도 $f_j(G) = G$ 인 성질 때문에 $L_j \circ f_j(G) = L_j(G)$ 가 성립하기에, 궤도 집적점 근방 내 G 의 경계의 레비 기하만으로 구성된 L_j 만 이해하면 원하는 해석 동형과 모형을 얻게 되는 것이다.

여기에는 구체적인 논증을 제시하지는 않겠으나, 궤도 집적점이 강 의사 볼록 점인 경우에는 $L_j(G)$ 가 국소 하우스도르프 집합 수렴의 관점에서 지겔 영역으로 수렴하게 되고, 결과적으로 영역 G 가 지겔 영역과 해석 동형이 되는 결론에 도달하게 된다는 정도로만 서술하는 데에서 만족하려고 한다.

위의 측도 확대법은 기본적으로 Pinchuk 교수의 방법론을 소개한 것인데, 이 방법의 정확한 운용에는 몇 가지 난삽한 점이 없지 않은 것이 또한 단점이라고 하겠다. 따라서 이런 점을 보완할 겸 또 다른 관점을 제시하려고 한다.

5.2.3. 대칭성을 도출하는 측도 확대법. Pagano 박사와의 공동 연구를 통하여 본 논문의 저자가 최근 제시한 방법은 측도 확대법을 통하여 에르미뜨 대칭성, 즉 카르탕 교수의 원래 방법과 관련되는 대칭 공간의 구조를 만들어 내는 방법론이다. 간단히 요약하면 다음과 같다.

효율적인 토의를 위하여, 여기에서는 그 경계가 구분적 레비 평탄형인 복소 2차원 볼록 영역의 경우를 생각하여 보자. (물론, 개략적인 증명만 소개할 뿐 세부 논증을 생략한다. 또한 용어의 정확한 정의에 관하여는 참고 문헌 [23] 을 추천한다.) 이 영역을 P 라 하고, 이 영역의 자기 동형군이 비 콤팩트임을 가정하면, 임의의 점 $x \in P$ 의 자기 동형군의 궤도 (예를 들어 $f_j(x)$ 라 쓰자) 가 집적되는 경계점이 반드시 있어야 한다. 그러면, 궤도 집적 경계점은 레비 평탄점일 수도 있고, 특이점일 수도 있을 것이다. 예를 들어 집적점이 레비 평탄형이라면, 이 점을 지나며 경계에 포함된 1차원 복소곡선 (A 라 쓰자) 이 존재하게 되는데, 경계가 볼록인 까닭에 최대 절대값 정리의 응용에 의하여 이러한 복소 곡

선은 1차원 복소 초평면 속에 포함되어야만 함을 추론할 수 있다. 따라서, 복소 선형 변환을 이용한 좌표 변환에 의하여, 이 초평면이 $\{(z, 0) \in \mathbf{C}^2 \mid z \in \mathbf{C}\}$ 가 되고 집적점은 원점이 되게 한 다음 측도 확대를 시도하면, 사실상 확대 변환 L_j 는

$$L_j(z, w) = (z, w/\mu_j)$$

로 주어지며, μ_j 는 궤도점 $f_j(x)$ 로부터 영역의 경계 까지의 거리로 주어진다고 어렵으로 말할 수 있다. 따라서, $L_j(P)$ 는 집합들로서 $A \times H$ (단, H 는 위쪽 반평면 영역) 으로 수렴하게 된다. 이제, $L_j \circ f_j(x)$ 의 극한점이 $A \times H$ 의 내부점 \hat{x} 가 되도록 L_j 를 택하고, $A \times H$ 가 이중 원반 영역과 해석 동형임을 이용하여 조건 $\iota(\hat{x}) = \hat{x}, d\iota_{\hat{x}} = -I$ 를 만족하는 $A \times H$ 의 자기동형 ι 를 선택한다. 그리고는 함수열

$$f_j^{-1} \circ L_j^{-1} \circ \iota \circ L_j \circ f_j$$

을 생각하는데, 이 함수열은 수렴하는 부분 수열이 반드시 존재할 뿐만 아니라, 그 극한이 영역 P 의 자기동형 사상이고 점 x 를 고정하며, 점 x 에서의 미분형은 $-I$ 가 된다. 이제 P 의 아인슈타인-캘러 거리를 생각하면, P 는 x 에서 에르미뜨형 대칭이다.

한편, 궤도 집적 경계점이 특이 경계점인 경우에도 비슷한 방법이 역시 (사실은 더 쉽게) 성립하는데, 이 경우에는 L_j 가 좀 달라지고, $L_j(P)$ 의 극한 집합이 $H \times H$ 가 되는 것만이 다르다. 따라서, 위의 결과와 합하여 P 가 대칭영역임을 추론할 수가 있게 되었다.

이제 카르탕 교수의 대칭영역 분류표를 보면, 복소 2차원 대칭영역은 단위구 영역이거나 이중 원반이어야 한다. 하지만, 단위구 영역은 위의 P 와 같은 해석다각형 영역과는 절대로 해석 동형이 될 수 없음이 이미 알려져 있으므로, 위에 소개한 이중 원반 영역의 특성화 정리 (K. T. Kim 의 정리의 2차원 경우) 의 증명을 얻게 된다.

하지만, 영역의 불록성은 복소함수론 및 복소기하학적 관점에서는 자연스러운 가정이 될 수 없다. 불록성은 해석 동형에 의하여 보존되는 개념이 아니기

때문이다. 따라서, 이를 보완하여 보다 일반적인 결과를 얻는 것이 바람직한데, 다음과 같은 결과가 알려져 있다.

정리 13. (Kim/Pagano 1998) 복소 2차원 공간 내의 주어진 일반형 해석 다각형 영역 (normal analytic polyhedron) P 의 자기 동형군이 비 콤팩트 이면, P 는 이중 원반 영역에 의하여 해석적으로 피복된다.

이 정리 역시 대칭성을 구성하는 측도 확대법이 증명의 중요한 방법론이기는 하지만, 위에 대략적으로 소개한 방법만으로는 증명이 불가능하다. 궤도 집적점이 특이점인 경우에는 위의 방법으로 충분하나, 집적점이 레비 평탄형인 경우에는 우선 측도 확대법 자체가 적용되는지를 증명할 수가 없다. 따라서, 집적점을 지나는 1차원 복소해석 곡선을 생각하고, 이의 피복 공간인 단위원반 영역을 생각한 다음, 이를 복소해석 곡선의 근방에 확장시키는 방법을 생각하여 확장된 사상도 피복 사상이 되게 한다. (이 과정은 대단히 난삽하므로 자세한 설명을 피하려 한다.) 그리고는 피복 영역에 측도 확대법을 사용하게 되는데, 이를 통하여 결론적으로는 고바야시 길이 개념을 보존하는 일종의 피복 사상 비슷한 해석사상이 이중원반으로부터 원래 해석다각형으로 들어오게 되는 현상이 발생한다. 그러면, 고바야시 길이로부터 최적 타원체를 이용하여 정의된 제1종 Wu 거리계가 이 사상에 의하여 보존되게 되고 (Wu 거리계만이 이런 특성을 가지고 있다!) 이중 원반 영역에서는 Wu 거리가 베르그만 거리계와 일치함을 이용하면, 결국 P 상의 점에서는 Wu 거리가 캘러형이고, 실 해석 가능하며, 곡률 텐서의 호환미분이 0 이 되어 국소 대칭성이 도출된다. 이를 정리하면, Wu 거리로 무장된 P 가 국소 대칭 공간 (locally symmetric space) 이므로, 대칭 공간에 의하여 해석적으로 피복되어야 한다. 이러한 대칭 공간은 비 콤팩트라야 하고, 따라서 카르탕 교수의 이론을 적용하면 단위구 또는 이중 원반과 해석 동형인데, 이 경우 역시 단위구의 가능성성을 쉽게 제거할 수 있어서, 위의 정리의 증명을 얻게 된다.

이 증명 과정의 주요점 중에서 Wu 거리계의 피복성이 작용하는 점에 유의 할 만한 가치가 있다고 본다. 또한 고바야시 거리계가 에르미뜨형이 아니어서

생기는 어려운 점을 Wu 거리 개념이 해결할 수 있을 가능성의 있다는 점도 Wu 거리 연구의 유용성을 보여주고 있다고 할 수 있다.

보충 4. 최근 쓰여진 Isaev 교수와 Krantz 교수의 논문 중에, 일반적으로 유계가 아닌 C^n 속의 고바야시 쌍곡 영역의 자기동형군의 차원이 n 차원 단위구 영역의 자기동형군의 차원과 같으면 이 쌍곡 영역은 단위구 영역과 자기동형이라는 정리와 이의 일반화를 증명한 것이 있다. 관심 대상인 영역이 유계 영역이면, 베르그만 거리 등을 이용한 증명이 이미 소수의 전문가들에게 알려져 있었으나, 위의 경우에는 베르그만 거리나 아인슈타인-캘러 거리는 그 존재성이 불확실한 문제점 때문에 종래의 방법론에는 한계가 있었다. 그러나, 거의 같은 증명이 Wu 거리계의 사용으로 유계가 아닌 고바야시 쌍곡 영역에도 적용될 수 있음을 위의 두 교수가 인식하고, 이로부터 일반화를 도출하기까지에 이르렀다. 이러한 연구 방향과 성취 역시

Wu 거리계가 고바야시 거리 개념의 비 예르미뜨형 단점을 보완
한다

는 ‘표어’의 정신과 부합된다 하겠다.

보충 5. 리만 곡면 연구에 중요한 타이키뮬러 공간/영역의 연구에 일조하는 불변거리 중에서, 타이키뮬러 거리는 고바야시 거리와 일치함이 이미 알려져 있다. ([37]) 타이키뮬러 영역은 고차원 복소 유클리드 공간의 유계 영역이므로, 베르그만 거리계가 존재할 뿐만 아니라 이는 또한 완비 거리가 된다. 한 경택 교수의 업적인 베르그만 거리와 카라테오도리 거리의 비교 부등식 ([20])의 결과로 카라테오도리 거리와 고바야시 거리 모두 완비 거리가 되고, 따라서 Wu 거리도 완비 거리이며, 연속성을 가진다. 타이키뮬러-고바야시 거리와의 밀접한 관계 때문에 제1종 및 제2종 Wu 거리가 타이키뮬러 공간/영역의 연구에 상당한 의미를 가질 것이라고 예상하지만, 아직까지는 시도된 연구가 별로 없다. 새로운 연구 개척을 기대한다.

참고문헌

- [1] Ahlfors, L., *An extension of Schwarz's lemma*, Trans. Am. Math. Soc. **43** (1938), 359-364.
- [2] Azukawa, K. and Suzuki, M., *Negativity of the curvature operator of a bounded domain*, Tohoku Math. J. **39** (1983), 1-11.
- [3] Barth, T. J., *The Kobayashi metric induces the standard topology*, Proc. Am. Math. Soc. **35** (1972), 439-441.
- [4] Bedford, E. and Pinchuk, S., *Domains in C^2 with non-compact holomorphic automorphism group (translated from Russian)*, Math. USSR-Sb. **63** (1989), 141-151.
- [5] Bedford, E. and Pinchuk, S., *Domains in C^{n+1} with non-compact automorphism groups*, J. Geom. Anal. **1** (1991), 165-191.
- [6] Bland, J., *The Einstein-Kähler metric on $\{|z|^2 + |w|^{2p} < 1\}$* , Michigan Math. J. **33** (1986), 209-220.
- [7] Burns, D., Shnider, S. and Wells, R. O., *On deformations of strictly pseudoconvex domains*, Invent. Math. **46** (1978), 237-253.
- [8] Cartan, E., *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935), 116-162.
- [9] Cartan, H., *Sur les groupes de transformations analytiques*, Actualités Sci. et Ind. no. 198, Herman, Paris, 1935.
- [10] Cheung, C. K. and Kim, K. T., *Analysis of the Wu metric I: the case of convex Thullen domains*, Trans. Am. Math. Soc. **348** (1996), 1429-1457.
- [11] ———, *Analysis of the Wu metric II, the case of non-convex Thullen domains*, Proc. Am. Math. Soc. **125** (1997), 1131-1142.
- [12] D'Angelo, J. P., *Real hypersurfaces, orders of contact, and applications*, Ann. Math. **115** (1982), 615-637.
- [13] Eisenmann, D., *Intrinsic measures on complex manifolds and holomorphic mappings*, Memoir Am. Math. Soc., Providence, R. I., 1970.
- [14] Fefferman, C., *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1-65.
- [15] Graham, I., *Boundary behavior of the Carathéodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in C^n with smooth boundary*, Trans. Am. Math. Soc. **207** (1975), 219-240.

- [16] Grauert, H. and Reckziegel, H., *Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Abbildungen*, Math. Z. **89** (1965), 108-125.
- [17] Greene, R. E. and Krantz, S. G., *Deformation of complex structures, estimates for the $\bar{\partial}$ equation, and stability of the Bergman kernel*, Adv. Math. **43** (1982), 1-86.
- [18] Greene, R. E. and Krantz, S. G., *Techniques for studying automorphism groups of weakly pseudoconvex domains*, Ann. Math. Studies, Princeton U. Press, 1993.
- [19] Griffiths, P. and Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and sons, New York 1978.
- [20] Hahn, K. T., *Inequality between the Bergman metric and Carathéodory differential metric*, Proc. Am. Math. Soc. **68** (1978), 193-194.
- [21] Hoffman, K. and Kunze, R., *Linear algebra* (2/e), Prentice Hall, New Jersey 1971.
- [22] John, F., *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Studies and Essays presented to Richard Courant, Interscience, New York (1948), 187-204.
- [23] Kim, K. T., *Domains in C^n with a piecewise Levi flat boundary which possess a noncompact automorphism group*, Math. Ann. **292** (1992), 575-586.
- [24] Kim, K. T., *The Wu metric and minimum ellipsoids*, Proc. 3rd Pacific Rim Geom. Conf., Interscience, Boston (printing).
- [26] Kim, K.T. and Pagano, A., *Normal analytic polyhedra in C^2 with noncompact automorphism group*, Preprint.
- [27] Kim, K.T. and Yu, J., *Boundary behavior of the Bergman curvature in strictly pseudoconvex polyhedral domains*, Pacific J. Math. **176** (1996), 141-163.
- [28] Klembeck, P., *Kähler metrics of negative curvature, the Bergman metric near the boundary and the Kobayashi metric on smooth bounded strictly convex sets*, Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), 275-282.
- [29] Kobayashi, S., *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*, Bull. Am. Math. Soc. **82** (1976), 357-416.
- [30] Kobayashi, S., *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel-Dekker 1970.
- [31] _____ *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren Math. Wiss. **318**, 1998.
- [32] Krantz, S. G., *Function theory of several complex variables* (2/e), Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California 1992.
- [33] Kwack, M. H., *Families of normal maps in several variables and classical theorems in complex analysis*, GARC Lecture Note Series 33, Seoul Nat. Univ., Seoul, Korea 1996.

- [34] Masur, H. and Wolf, M., *Teichmüller space is not Gromov hyperbolic*, Ann. Acad. Sien. Fennicæ, Series A.I. Math. **20** (1995), 259-267.
- [35] Rosay, J. P., *Sur les caractérisation de la boule parmi les domaines de C^n par son groupe d'automorphismes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **XXIX** (1979), 91-97.
- [36] Royden, H. L., *Remarks on the Kobayashi metric*, Several Complex Variables II, Maryland 1970, Lecture notes in Math. 185, Springer, Berlin, 1971, 125-137.
- [37] _____, *Reports on the Teichmüller metric*, Proc. Nat. Acad. Sci. **65** (1970), 497-499.
- [38] _____, *The Ahlfors-Schwarz lemma in several complex variables*, Comment. Math. Helveticici **55** (1980), 547-558.
- [39] Siu, Y. T., *The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. Math. **112** (1980), 73-111.
- [40] Wong, B., *Characterization of the unit ball in C^n by its automorphism group*, Invent. Math. **41** (1977), 253-257.
- [41] Wu, H., *Normal families of holomorphic mappings*, Acta Math. **119** (1967), 193-233.
- [42] _____, *Old and new invariant metrics on complex manifolds*, Several Complex Variables, Math. Notes 38, Princeton Univ. Press, 1993, 640-682.
- [43] Zhong, J. Q., *The degree of strong degeneracy of the bisectional curvature of exceptional bounded symmetric domains*, Proc. Inter. Conf. Several Complex Variables, Hangzhou, China 1981.

경북 포항시 남구 효자동 산 31

포항공과대학 수학과

790-784

E-mail: kimkt@postech.ac.kr