

비등방성 복합적층판 및 셸 구조의 휨, 자유진동 및 좌굴해석

Bending, Free Vibration and Buckling Analysis of Anisotropic Composite Laminated Plate and Shell Structures

윤 석 호¹⁾

Yoon, Seok Ho

요 약 : 복합재료로 구성된 복합적층판 및 셸과 같은 구조물은 탄성계수와 전단탄성계수의 비가 매우 커서 전단변형의 영향이 크므로 정확한 해를 얻기 위하여 해석 및 설계에서 필수적으로 전단변형을 고려해야 하며, 고차의 전단변형이론에 의한 해석은 더욱 정확한 해를 얻을 수 있다. 본 연구는 단순지지 경계조건을 갖는 복합적층판 및 셸에 대하여 3차 전단변형 이론을 적용하여 플라이 각도, 층의 수에 따른 복합적층판 및 셸의 휨, 진동, 좌굴 특성을 연구한다.

ABSTRACT : The ratios of elastic to shear modulus of the structures as laminated composite plates and shells, are very large. They are much susceptible to effect of shear deformation. In order to obtain the accurate solutions of laminated composite plate and shells, the effects of shear strain should be considered for the analysis and design of them. Especially, the more exact solution can be obtained in applying to higher-order shear deformation theory. Therefore, in this paper, the third-order shear deformation theory is used to present the distributions of bending, the characteristics of natural frequencies and the buckling load according to the effects of ply orientation, number of layers for the laminated composite plates and shells with simply supported boundary conditions.

핵심용어 : 복합적층판 및 셸, 휨, 고유진동수, 좌굴하중, 연계강도

KEYWORDS : Laminated composite plates and shells, Bending, Natural frequency, Buckling load, Coupling stiffness

1) 정회원, 경동대학교 토목설계공학과 전임강사, 공학박사

본 논문에 대한 토의를 1999년 8월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서론

복합적층판 및 셸은 두가지 이상의 재료를 조합하여 적층시킴으로서 자중을 경감시키고 큰 강도를 발휘하는 구조물로 비등방성 구조가 되어 역학적인 거동이 예측하기 어려울 정도로 복잡하고 재료 성질 및 배열에 따라 거동특성이 다양하다. 이러한 복합 적층구조는 탄성계수와 전단 탄성계수의 비가 매우 커서 전단변형을 무시한 얇은 구조로 해석하면 결과는 많은 오차가 나타나게 되므로 정밀한 전단변형을 고려한 해석을 수행하여야 한다⁽¹⁾. 고차 전단변형이론에 의한 복합적층판 및 셸의 휨⁽²⁾, 자유진동^{(3),(4)}, 좌굴⁽⁵⁾ 등에 대한 많은 연구가 진행되었으나 본 연구는 3차 전단변형 함수에 의한 복합적층판 및 셸의 휨, 자유진동, 좌굴해석으로 플라이 각도, 층수의 변화에 따른 연계강도 영향에 의한 복합적층판 및 셸의 거동을 분석하고자 한다.

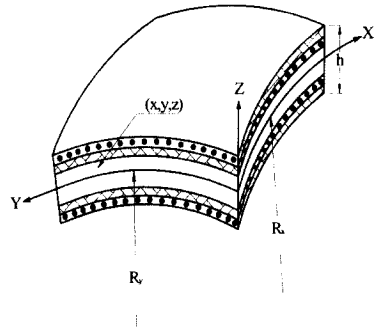


그림 1. 복합적층셸의 형상 및 기호

2. 기본이론

얇은 셸로 처짐이 작고 셸의 두께 및 다른 치수가 셸의 곡률반경에 비하여 작고 중립면에 직각 방향 변형도를 무시한다는 Love의 가정⁽⁶⁾하에서 셸의 임의 두 점 (x, y, z) 와 $(x + dx, y + dy, z + dz)$ 간의 거리를 dS 를 다음과 같이 나타낸다.

$$(dS)^2 = L_x^2(dx)^2 + L_y^2(dy)^2 + L_z^2(dz)^2 \quad (1)$$

여기서 L_x, L_y, L_z 는 Lamé계수로 $L_x = a_x \left(1 + \frac{z}{R_x}\right)$,

$L_y = a_y \left(1 + \frac{z}{R_y}\right)$, $L_z = 1$ 이며, 본 연구는 곡률의

효과가 적은 얇은 셸이므로 기하학적 메트릭 텐서인 일반화 좌표 a_x, a_y 는 각각 1이 된다.

그림 1과 같이 셸의 직교좌표계를 (X, Y, Z) 로 나타내고 셸의 중립면의 X 및 Y 축방향 곡률 반경을 R_x, R_y 로 나타내며, 중립 면으로부터 거리

z 만큼 떨어진 임의점 (x, y, z) 의 X 및 Y 축방향 변위 u, v 는 중립면의 변위 u_0, v_0 와 전단효과를 고려하기 위해 중립면의 수직치짐 w 와 연관된 물리량을 z 에 대해 3차식으로 나타내고, 중립 면의 Z 축 방향 변위 w 는 Love의 가정에 의하여 두께에 따라 일정하다고 가정하여 직교 좌표계를 갖는 셸의 임의점 (x, y, z) 에서 시간 t 일때 변위를 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) u_0 + z \phi_x + z^2 \zeta_x + z^3 \eta_x \\ v(x, y, z, t) &= \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) v_0 + z \phi_y + z^2 \zeta_y + z^3 \eta_y \\ w(x, y, z, t) &= w_0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 u, v, w 는 셸의 임의점 (x, y, z, t) 에서 X, Y, Z 방향 변위이고, u_0, v_0, w_0 는 셸의 중립면상 임의점 $(x, y, 0, t)$ 의 변위이고, ϕ_x, ϕ_y 는 중립면에 수직인 선분의 X 및 Y 방향 회전각 변위를 나타내며, 수직치짐의 곡률 및 곡률변화를 표현하는 함수 $\zeta_x, \eta_x, \zeta_y, \eta_y$ 는 x, y 의 함수로 전단 변형도 $\epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$ 가 셸의 상부표면과 하부표면에서 0이 된다는 조건을 이용하면 $\epsilon_{xz}(x, y, \pm \frac{h}{2}, t) = 0$, $\epsilon_{yz}(x, y, \pm \frac{h}{2}, t) = 0$ 이므로 식(3)의 값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \zeta_x = \zeta_y = 0 \\ \eta_x = -\frac{4}{3h^2} \left(\phi_x + \frac{1}{\alpha_x} \frac{\partial w_o}{\partial x} \right) \\ \eta_y = -\frac{4}{3h^2} \left(\phi_y + \frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

따라서 식(3)을 식(2)에 대입하면 변위함수는 식(4)와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} u &= \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) u_o + z \cdot \left\{ \phi_x - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2 \left[\phi_x + \frac{1}{\alpha_x} \frac{\partial w_o}{\partial x} \right] \right\} \\ v &= \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) v_o + z \cdot \left\{ \phi_y - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2 \left[\phi_y + \frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial w_o}{\partial y} \right] \right\} \\ w &= w_o \end{aligned} \quad (4)$$

각 절점에서 자유도는 $u_o, v_o, w_o, \phi_x, \phi_y$ 이다. 미소변형이론에 의하여 3차원 탄성체의 변형도-변위 관계식에서 고차항을 무시하고, 쉘에 수직인 변형도를 무시하면 식(5)와 같은 쉘의 변형도-변위 관계식을 구할 수 있다⁽²⁾.

$$\begin{aligned} \epsilon_x = u_{,x} &= \epsilon_x^{(o)} + z \cdot (x_x^{(o)} + z^2 \cdot x_x^{(2)}) \\ &= u_{o,x} + \frac{w_o}{R_x} + \frac{1}{2} w_{o,x}^2 \\ &\quad + z \left\{ \phi_{x,x} - z^2 \frac{4}{3h^2} (\phi_{x,x} + w_{o,xx}) \right\} \\ \epsilon_y = v_{,y} &= \epsilon_y^{(o)} + z \cdot (x_y^{(o)} + z^2 \cdot x_y^{(2)}) \\ \epsilon_z = w_{,z} &= 0 \\ \epsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} &= \epsilon_{xy}^{(o)} + z \cdot (x_{xy}^{(o)} + z^2 \cdot x_{xy}^{(2)}) \\ \epsilon_{xz} = u_{,z} + w_{,x} &= \epsilon_{xz}^{(o)} + z^2 \cdot x_{xz}^{(2)} \\ \epsilon_{yz} = v_{,z} + w_{,y} &= \epsilon_{yz}^{(o)} + z^2 \cdot x_{yz}^{(2)} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{o,x} = \frac{\partial u_o}{\partial x}, w_{o,xx} = \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \dots$ 를 나타낸다.

화이버 방향인 재료축이 구조축인 X 축과 각도 θ 만큼 기울어져 있고 플라이-앵글을 갖는 쉘의 k번째 층의 구조축에 대한 응력-변형도 관계는

재료축의 강도를 좌표변환하여 표시하면 식(6)과 같다^{(7),(8)}.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (6)$$

두께 h 를 갖는 쉘의 내력은 식(7)과 같이 작용력을 두께에 대하여 적분하여 구할 수 있다⁽⁸⁾.

$$\begin{aligned} (N_i, M_i, P_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z, z^3) dz \quad (i = x, y, xy) \\ (Q_x, S_x) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}(1, z^2) dz \\ (Q_y, S_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}(1, z^2) dz \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에 변형도-변위 관계식 식(5)와 응력-변형도 관계식 식(6)을 대입하여 적분하면 단면력-변위 관계식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} \\ E_{11} & E_{12} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(o)} \\ \epsilon_y^{(o)} \\ \epsilon_{xy}^{(o)} \\ x_x^{(o)} \\ x_y^{(o)} \\ x_{xy}^{(o)} \\ x_x^{(2)} \\ x_y^{(2)} \\ x_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} & D_{55} & D_{45} \\ A_{45} & A_{44} & D_{45} & D_{44} \\ D_{55} & D_{45} & F_{55} & F_{45} \\ D_{45} & D_{44} & F_{45} & F_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(o)} \\ \epsilon_y^{(o)} \\ x_x^{(2)} \\ x_y^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서, 각 계수는 다음과 같다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij})$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)}(1, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)}(1, z^2, z^6) dz \quad (i, j = 4, 5)$$

운동방정식을 얻기 위하여 가상일의 원리를 적용하면 구조계 전체에 대한 포텐셜 에너지는 변형

에너지라는 내적 포텐셜과 외력에 의해 발생하는 외적 포텐셜, 운동에너지의 합으로 나타낼 수 있으며 이는 식(9)와 같이 표시된다⁽⁹⁾.

$$\begin{aligned}
 O = & \int_0^t \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x^{(k)} + \sigma_y \delta \varepsilon_y^{(k)} \right. \right. \\
 & + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^{(k)} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}^{(k)} + \sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz}^{(k)}] dx dy \Big\} dz \\
 & - \int_{\Omega} q \cdot \delta w dx dy - \delta \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \int_{\Omega} \rho [(\dot{u})^2 \right. \right. \\
 & + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] dx dy \Big\} dz \Big) dt
 \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)의 각 항목을 적분하여 $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \phi_x, \delta \phi_y$ 항목을 0으로 놓으면 식(10)과 같은 방정식을 얻을 수 있다⁽¹⁰⁾.

$$\begin{aligned}
 \delta u : & N_{x,x} + N_{xy,y} = \bar{I}_1 u_{,tt} + \bar{I}_2 \phi_{x,tt} - \bar{I}_3 w_{,ttx} \\
 \delta v : & N_{xy,x} + N_{y,y} = \bar{I}_{11} v_{,tt} + \bar{I}_{22} \phi_{y,tt} - \bar{I}_{33} w_{,tty} \\
 \delta w : & Q_{x,x} + Q_{y,y} - \frac{4}{h^2} (S_{x,x} + S_{y,y}) \\
 & + \frac{4}{3h^2} (P_{x,xx} + P_{y,yy} + 2P_{xy,xy}) \\
 & - \frac{N_x}{R_x} - \frac{N_y}{R_y} + \hat{N}_x w_{,xx} + \hat{N}_y w_{,yy} \\
 & + 2\hat{N}_{xy} w_{,xy} = \bar{I}_3 u_{,ttx} + \bar{I}_5 \phi_{x,tt} \\
 & - \bar{I}_{33} v_{,tty} + \bar{I}_5 \phi_{y,tt} + I_1 w_{,tt} \\
 & - \frac{16I_7}{9h^4} (w_{,ttxx} + w_{,ttyy}) - q \\
 \delta \phi_x : & M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + \frac{4}{h^2} S_x - \frac{4}{3h^2} (P_{x,x} \\
 & + P_{xy,y}) = \bar{I}_2 u_{,tt} + \bar{I}_4 \phi_{x,tt} - \bar{I}_5 w_{,ttx} \\
 \delta \phi_y : & M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y + \frac{4}{h^2} S_y - \frac{4}{3h^2} (P_{xy,x} \\
 & + P_{y,y}) = \bar{I}_{22} v_{,tt} + \bar{I}_4 \phi_{y,tt} - \bar{I}_5 w_{,tty}
 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 상수 $\bar{I}_i, \bar{I}_{ii} (i=1,2,3,4,5)$ 는 부록 1에 나타내었으며 $\hat{N}_x, \hat{N}_y, \hat{N}_{xy}$ 는 면내방향 외력이다. 식(10)에 식(8)의 단면력-변위 관계식을 대입하면 쉘에 대한 지배방정식을 구할 수 있다.

3. 해석 방법

쉘의 변위를 경계조건에 맞는 이중삼각함수 형태의 푸리에 급수로 가정하여 평형방정식에 대입하여 해를 구하는 방법을 사용한다.

파이버로 보강된 크로스-플라이 적층셀은 그림 2와 같이 각각 0° 와 90° 방향으로 보강된 1방향 보강 셀이 적층되어 있으며 역대칭 앵글-플라이 적층판은 그림 3과 같이 각각 θ° 와 $-\theta^\circ$ 의 각도로 중립면에 대하여 역대칭으로 적층되어 있다.

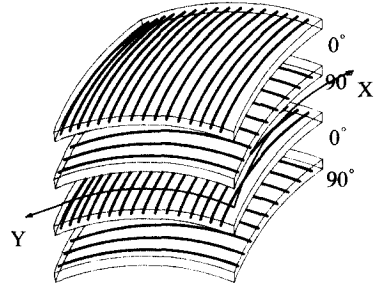


그림 2. 크로스-플라이 셀의 적층형상

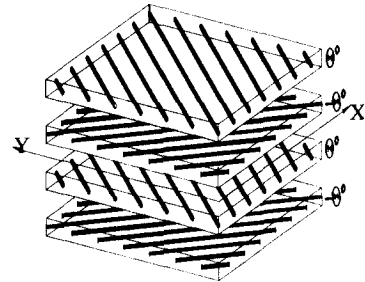


그림 3. 역대칭 앵글-플라이 판의 적층형상

크로스-플라이인 경우 쉘의 강성값은 식(11)과 같이 된다⁽⁷⁾.

$$\begin{aligned}
 A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = E_{16} = E_{26} = 0 \\
 F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = A_{45} = D_{45} = F_{45} = 0
 \end{aligned} \quad (11)$$

역대칭 앵글-플라이인 경우 쉘의 강성값은 식(12)와 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 A_{16} = A_{26} = B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0 \\
 E_{11} = E_{12} = E_{22} = E_{66} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = 0 \\
 A_{45} = D_{45} = F_{45} = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

네변이 단순지워진 적층셸의 변위 및 내력에 대한 경계조건은 식(13)과 같다.

$$\begin{aligned}
 w_0(x, 0, t) = w_0(x, b, t) = w_0(0, y, t) = w_0(a, y, t) = 0 \\
 w_{0,x}(x, 0, t) = w_{0,x}(x, b, t) = w_{0,y}(0, y, t) = w_{0,y}(a, y, t) = 0 \\
 \phi_x(x, 0, t) = \phi_x(x, b, t) = \phi_y(0, y, t) = \phi_y(a, y, t) = 0 \\
 My(x, 0, t) = My(x, b, t) = Mx(0, y, t) = Mx(a, y, t) = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

크로스-플라이 적층셸인 경우는

$$\begin{aligned}
 u_0(x, 0, t) = u_0(x, b, t) = v_0(0, y, t) = v_0(a, y, t) = 0 \\
 Ny(x, 0, t) = Ny(x, b, t) = Nx(0, y, t) = Nx(a, y, t) = 0 \\
 Py(x, 0, t) = Py(x, b, t) = Px(0, y, t) = Px(a, y, t) = 0
 \end{aligned}$$

이며 역대칭 앵글-플라이 적층셸인 경우는

$$\begin{aligned}
 u_0(0, y, t) = u_0(a, y, t) = v_0(x, 0, t) = v_0(x, b, t) = 0 \\
 Nxy(x, 0, t) = Nxy(x, b, t) = Nxy(0, y, t) = Nxy(a, y, t) = 0 \\
 Px(x, 0, t) = Px(x, b, t) = Py(0, y, t) = Py(a, y, t) = 0
 \end{aligned}$$

이 된다. 두께가 일정한 셸의 변위를 식(13)의 경계조건을 만족하는 이중삼각함수의 무한 급수형태로 가정하면 식(14)와 같다⁽⁸⁾.

$$\begin{aligned}
 w_0(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha x \sin \beta y e^{-i\omega t} \\
 \phi_x(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y e^{-i\omega t} \\
 \phi_y(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y e^{-i\omega t}
 \end{aligned} \tag{14}$$

크로스-플라이 적층셸인 경우는

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y e^{-i\omega t} \\
 v_0(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y e^{-i\omega t}
 \end{aligned}$$

이며 역대칭 앵글-플라이 적층셸인 경우는

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y e^{-i\omega t} \\
 v_0(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} V_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y e^{-i\omega t}
 \end{aligned}$$

이 된다. 여기서 $\alpha = m\pi / a$, $\beta = n\pi / b$ 이며 a, b 는 X 축 및 Y 축 방향의 변장이다.

식(14)의 변위를 운동 방정식 식(10)에 대입하여 행렬방정식 형태로 표시하면 식(15)와 같다.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{mn} \\ \ddot{V}_{mn} \\ \ddot{W}_{mn} \\ \ddot{X}_{mn} \\ \ddot{Y}_{mn} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} \\
 + \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (m, n = 1, 2, \dots, \infty)
 \end{aligned} \tag{15}$$

또는 $[M_{ij}]\{\ddot{\Delta}\} + [C_{ij}]\{\Delta\} + [G_{ij}]\{\Delta\} = \{F\}$ 으로 표현된다.

여기서 매트릭스 $[C_{ij}]$ 는 5×5 의 강성계수행렬, $[M_{ij}]$ 는 5×5 의 질량계수행렬, $[G_{ij}]$ 는 5×5 의 기하학적 강성계수행렬이다. $[C_{ij}]$, $[M_{ij}]$ 와 $[G_{ij}]$ 의 각 요소는 부록 2에 나타내었다.

윗해석은 기하학적 비선형 효과와 가속도벡터를 무시한 정적 평형방정식 $[C_{ij}]\{\Delta\} = \{F\}$ 로부터 여러 가지 각도로 배열된 적층판의 임의점에서 처짐값을 구한다.

자유진동 해석은 기하학적 비선형 효과를 무시한 동적평형방정식 $[M_{ij}]\{\ddot{\Delta}\} + [C_{ij}]\{\Delta\} = \{0\}$ 로부터 고유치 문제를 해결한다⁽³⁾.

좌굴 해석은 기하학적 비선형 문제로 가속도 벡터를 무시한 방정식 $[C_{ij}]\{\Delta\} + [G_{ij}]\{\Delta\} = 0$ 에서 x 및 y 방향으로 압축을 받는 적층판 및 셸의 좌굴하중 N_{cr} 를 구한다.

4. 해석에 및 결과분석

수치해석의 예로서 보론 화이버(boron-fiber)

가 에폭시 매트릭스(epoxy-matrix)에 재료축 방향으로 묻혀있는 경우로, 재료의 역학적 성질은 변장 $a = b = 1\text{ m}$, 밀도 $\rho = 8 \times 10^{-6}\text{ Nsec}^2/\text{cm}^4$, 두께 $h = 10\text{ cm}$, 재료축 2축 방향의 탄성계수 $E_2 = 2.1 \times 10^6\text{ N/cm}^2$ 이며 나머지 역학적 성질은 표 1과 같이 비례식으로 표시된 MODEL I 과 MODEL II를 사용한다.

표 1. 재료의 역학적 성질⁽¹¹⁾

MODEL	E_1/E_2	$G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2$	G_{23}/E_2	ν_{12}
I	25	0.5	0.2	0.25
II	40	0.6	0.5	0.25

이들 재료로 구성된 각층이 동일한 두께의 여러 층으로 구성되어 있고 각 층의 재료축이 구조축인 X축과 이루는 각도 변화 및 층수 변화로 나타나는 비등방성 성질에 따라 복합 적층판 및 셸의 변위, 모멘트, 응력, 자유진동, 좌굴 현상을 분석하였다.

(1) 휨 해석결과

결과의 정확성 검증으로 고전이론인 등분포 하중이 작용하는 경우의 Timoshenko⁽¹²⁾의 등방성 판 해석의 결과와 비교하기 위해 등방성 재료의 역학적 성질은 탄성계수 $E = 10.92\text{ N/cm}^2$, 포아송비 $\nu = 0.3$, 변장 $a = b = 1\text{ m}$, 등분포하중 $q = 1.0\text{ N/cm}^2$ 을 대입하여 1차전단변형이론(FSDT)과 본 연구에서 사용한 고차전단변형이론(HSDT)을 비교하여 표 2에 나타냈다.

등방성 판의 경우는 판의 길이-두께비가 100일때 전단변형 효과가 미소하기 때문에 1%미만의 미소한 오차가 발생하였으나 판의 길이-두께비가 10일때 5% 이상의 오차가 발생하기 때문에 길이에 비하여 두께가 두꺼운 길이-두께비가 20 이상인 판의 경우는 꼭 전단변형의 효과를 고려하여야만 정확한 결과를 구할 수 있다.

표 2. 복합적층판의 중앙처짐 $\{wE_2h^3/10^3/qa^4\}$

해석방법		Timosh-e nko ⁽¹²⁾	FSDT ⁽¹¹⁾	HSDT (present)
적층형태	a/h			
Isotropic	10	4.435	4.666	4.666
	100	4.435	4.438	4.438
0/90 /0/90	10	-	10.596	10.693
	100	-	8.111	8.112
45/-45 /45/-45	10	-	6.918	7.015
	100	-	4.434	4.435

MODEL I를 사용한 복합적층판의 해석에서 판의 길이-두께비가 10인 경우 전단변형의 효과 때문에 1차전단변형이론에 의한 결과는 본 연구에서 사용한 고차전단변형이론의 결과와 최대 1.4%의 오차가 발생하였다. 따라서 길이-두께비가 작은 두꺼운 복합적층판의 해석은 고차전단변형이론에 의하여 좀더 정확한 값을 구할 수 있다.

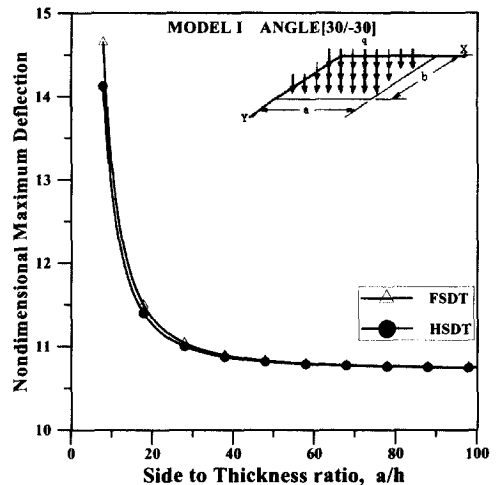


그림 4. 판의 길이-두께비에 따른 최대 처짐 $\{wE_2h^3/10^3/qa^4\}$

그림 4는 적층각이 [30°/-30°]인 역대칭 앵글-플라이 적층판에 대하여 길이-두께비의 변화에 따

큰 중앙점의 최대 처짐을 나타낸 것이다. 길이-두께비가 20이하인 경우 1차전단이론과 고차전단이론의 차이가 2.5% 이상의 오차가 발생하지만 길이-두께의 비가 30이상이 되면 두께에 의한 전단 변형효과가 감소하여 두 이론에 의한 해석에 큰 차이가 없다.

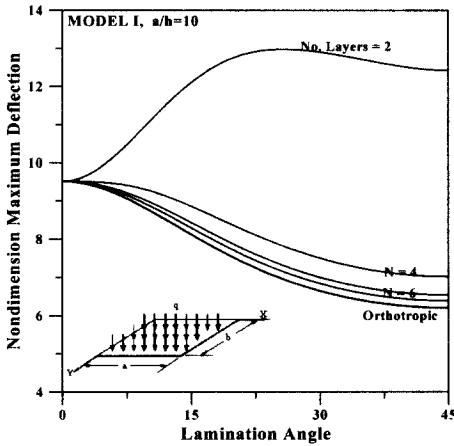


그림 5. 적층수 변화에 따른 최대 처짐 $(wE_2h^3/10^3/q a^4)$

그림 5는 모델 I에 대하여 적층각을 역대칭인 $[\theta^\circ / -\theta^\circ / \theta^\circ / -\theta^\circ / \dots]$ 의 각도로 층수를 변화시켜 가며 앵글-플라이 적층판의 적층수 변화에 따른 최대 처짐을 무차원으로 나타낸 것으로, 무한층으로 적층된 적층판은 휨강도 (D_{ij})와 면내력강도 (A_{ij})사이의 연계강도 (B_{ij}) (11)가 무시할 정도로 작아지기 때문에 직교이방성의 해와 일치하며 2층으로 이루어진 적층판의 해석에서 연계강도를 무시할 경우 50%이상의 처짐량이 줄어들게 되며 6개층 이상으로 적층된 경우 직교이방성 이론에 의한 결과와 미소한 차이가 발생하기 때문에 연계강도를 무시할 수 있다. 2개층으로 배열된 경우 연계강도가 없는 $[0^\circ / -0^\circ]$ 의 배열에서 최소처짐이 발생하고 $[26^\circ / -26^\circ]$ 의 배열에서 최대처짐이 발생하여 최소처짐의 1.4배이므로 4개층 이상의 처짐량과 비교해 보면 2개층인 경우 연계강도의

영향 때문에 처짐량이 증가함을 알 수 있다. 그림 5의 45° 인 경우를 보면 4개층 이상으로 적층된 경우는 45° 의 각도로 배열된 경우가 가장 적은 처짐량이 발생하였다.

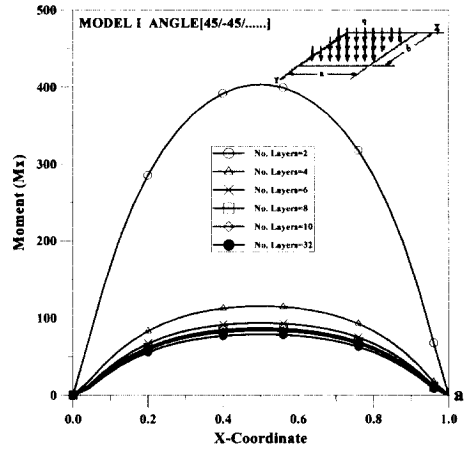


그림 6. 적층수 변화에 따른 b/2 점의 휨모멘트 $(M_x/q a^2)$

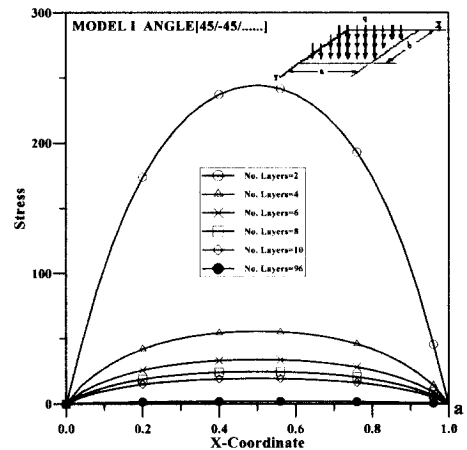


그림 7. 적층수 변화에 따른 b/2 점의 휨응력 $(\sigma_x 10^1 k^2/q b^2)$

그림 6과 그림 7은 모델 I에 대하여 적층각을 $[45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / -45^\circ / \dots]$ 의 역대칭으로 층수를 변화시켜 가며 앵글-플라이 적층판의 적층수의 변화에 따른 휨모멘트와 최대 휨응력을 무차원으로

나타낸 것으로 적층수가 증가할수록 휨모멘트 값과 최대휨응력 값이 현저하게 감소한다. 특히 2개층인 경우 4개층 이상의 적층판에 비하여 4배 이상의 휨모멘트와 휨응력이 발생하였다. 따라서 적층수의 증가는 구조물에 현저한 안정을 도모할 수 있다.

(2) 자유진동 해석결과

4변이 단순지지 되어있는 복합 적층판 및 셸을 디터미넨트 서치방법으로 고유치문제를 해석하여 고유진동수를 구하였다. 크로스-플라이 적층셸에서 곡률 반경과 셸의 길이를 변화시켜가며 길이-두께비가 10인 경우와 100인 경우의 고유진동수의 값을 표 3에 나타내었다.

표 3. 크로스-플라이 적층셸의 고유진동수값 비교

MODEL I		고유진동수 $\left(\omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}\right)$			
R/a	Theory	$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$		$0^\circ/90^\circ$	
		a/h = 10	a/h = 100	a/h = 10	a/h = 100
5	FSDT	12.474	31.107	9.261	28.839
	Present	12.044	31.102	9.937	28.839
10	FSDT	12.284	20.391	8.990	16.711
	Present	11.844	20.383	9.068	16.712
100	FSDT	12.221	15.245	8.898	9.783
	Present	11.777	15.234	8.977	9.784

셸의 길이-두께비가 10인 경우 고차전단변형이론과 1차전단변형이론에 의한 고유진동수값의 차이가 현저하게 나타나지만 100인 경우는 그 차이가 아주 미소하게 나타난다. 이것은 길이-두께비가 커짐에 따라 두께방향으로 영향을 주는 전단변형의 영향이 현저하게 감소하기 때문이다. 특히 적층수가 2개층인 경우 연계강도 B_{ij} 의 영향이 매우 커서 3개층 이상인 경우와 반대방향에서 수렴한다. 3개층 이상인 경우 1차전단변형이론에 의한 고유진동수값이 고차전단변형이론에 의한 값보다 크게 나타나지만, 2개층인 경우 연계강도의 영

향으로 그 반대이다. 셸의 반경-길이의 비가 증가하며 판의 형상에 접근함에 따라 변위량이 줄어들어 고유진동수값이 감소한다.

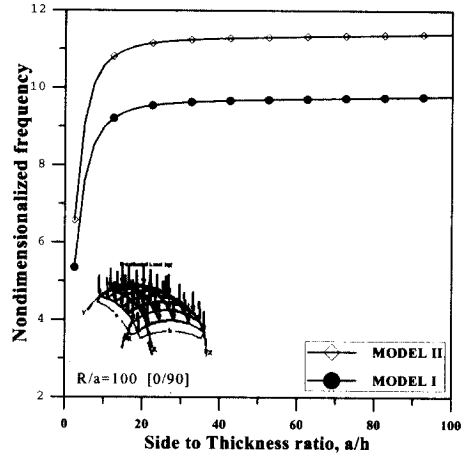


그림 8. 셸의 길이-두께비의 변화에 따른

고유진동수값 $\left(\omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}\right)$

그림 8에 적층각이 $[0^\circ/90^\circ]$ 인 적층셸에 대하여 길이-두께비의 변화에 따른 고유진동수값을 무차원으로 나타내었다. 길이-두께비가 20이하인 경우 고전이론에 의한 값과의 차이가 현저하게 발생하지만 길이-두께의 비가 30이상이 되면 두께에 의한 전단변형효과가 감소하여 고전이론에 의한 값에 수렴한다. 또한 탄성계수비의 값이 큰 경우인 모델II의 고유진동수가 크게 나타난다.

그림 9는 모델 I에 대하여 적층각을 역대칭인 $[\theta^\circ/-\theta^\circ/\theta^\circ/-\theta^\circ/\dots]$ 로 층수를 변화시켜가며 앵글-플라이 적층판의 고유진동수를 구하였다.

$\theta=45^\circ$ 인 경우를 보면 2개층인 경우의 고유진동수는 층이 무한대인 경우보다 30%나 적게 나온다. 이와 같은 이유는 휨강도와 면내력강도 사이의 연계강도 중에서 B_{16} , B_{26} 의 영향 때문이다. 층수를 증가시키면 연계강도가 현저하게 감소한다. 역대칭으로 적층된 2개층의 적층판의 경우에

는 연계강도가 아주 중요한 영향을 미친다는 것을 고려하여 설계하여야 한다.

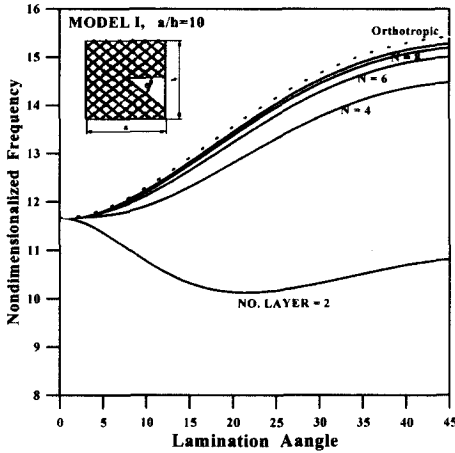


그림 9. 적층수의 변화에 따른

고유진동수값 $\left(\omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}\right)$

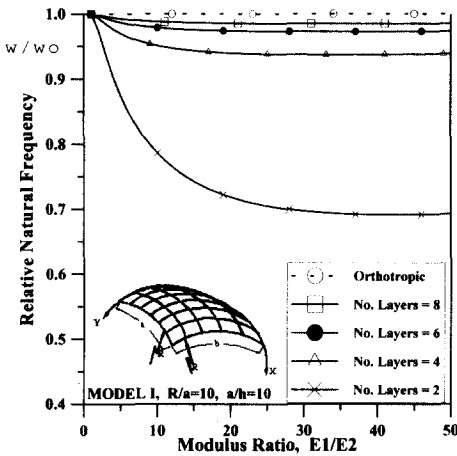


그림 10. 크로스-플라이 셸의 층수의 변화에 따른 상대고유진동수

그림 10은 모델 I에 대하여 $[0^\circ/90^\circ/\dots]$ 로 적층된 적층셸의 탄성계수비의 변화에 따른 직교이방성이론의 고유진동수에 대한 상대고유진동수를 나타낸 것이다. 2개층인 경우 직교이방성에 비하여 30%의 차이를 나타내며 6개층 이상인 경우 직교이방성의 고유진동수값에 5%이내의 차이가 나타난다.

(3) 좌굴 해석결과

4변이 단순지지 되어 있고 X축 방향의 면내하중을 받고있는 경우의 복합 적층판에 대하여 좌굴하중을 구하였다. 모델 II에 대하여 적층각도가 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 이며 $a/h=10$ 인 경우의 적층판의 E_1/E_2 의 변화에 따른 좌굴하중을 무차원 화하여 표 4에 나타내었다. 직교이방성이론과는 탄성계수비의 변화가 커짐에 따라 더욱 큰 차이를 나타냈으며 계산과정은 복잡하지만 정확한 해석으로 알려진 Noor의 3차원 해석(13) 값과 비교하면 1차전단변형이론에 의한 값에 비하여 수렴도가 좋음을 알 수 있다.

표 4. 크로스-플라이 적층판의 좌굴하중 $(N_x b^2/E_2 h^3)$

E_1/E_2	10	20	30
Theory			
Noor(13)	9.0164	13.743	17.783
Present	9.2315	14.254	18.667
FSDT	9.2552	14.332	18.815
Orthotropic	10.295	16.988	23.675

그림 11에서는 적층판의 변장비의 변화에 따른 좌굴하중을 나타냈다. 탄성계수의 비가 작은 모델 I에서 작은 좌굴하중이 나왔으며 두 모델 모두 Noor의 해석 결과를 기준하면 1차전단변형이론에 비해서 고차전단변형이론에 의한 해석이 좀더 수렴된 좌굴하중을 구할 수 있다.

그림 12에서는 적층판의 변장비에 따른 적층수를 변화시켜가며 좌굴하중을 나타내었다. 무한층을 갖는 적층판의 경우는 직교이방성판의 좌굴하중에 수렴한다. 적층수가 적은 경우는 휨강도와 면내력강도 사이의 연계강도가 좌굴하중에 중요한 영향을 보임을 알 수 있다. 2층으로 적층된 경우를 직교이방성 이론으로 해석을 하면 198%나 크게 계산된다.

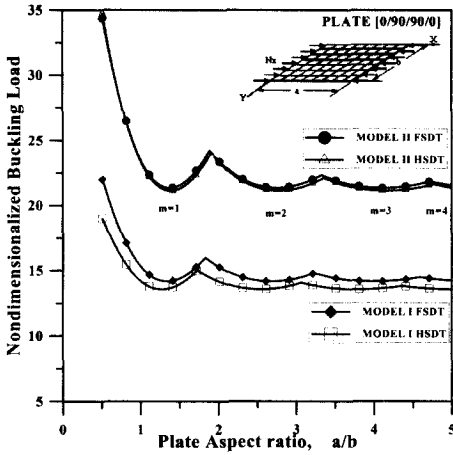


그림 11. 적층판의 변장비에 따른 좌굴하중 ($N_{cr}b^2/E_2h^3$)

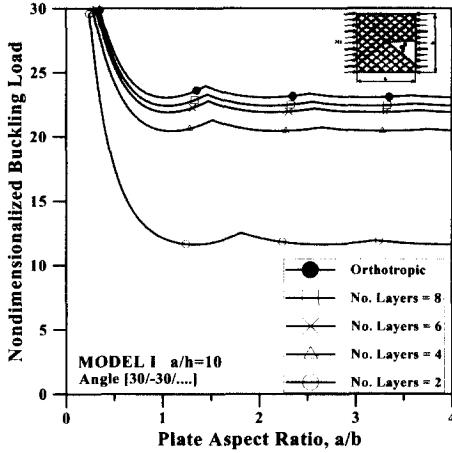


그림 12. 판의 변장비에 따른 좌굴하중 ($N_{cr}b^2/E_2h^3$)

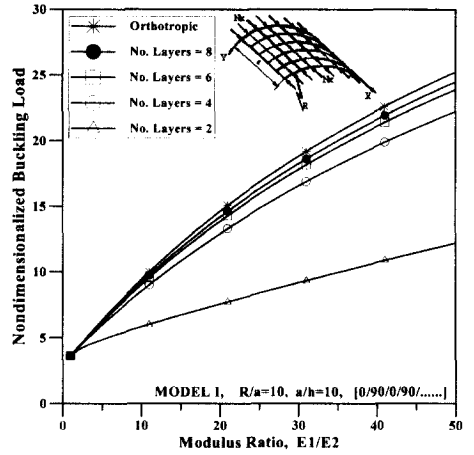


그림 13. 쉘의 탄성계수비 변화에 따른 좌굴하중 ($N_{cr}b^2/E_2h^3$)

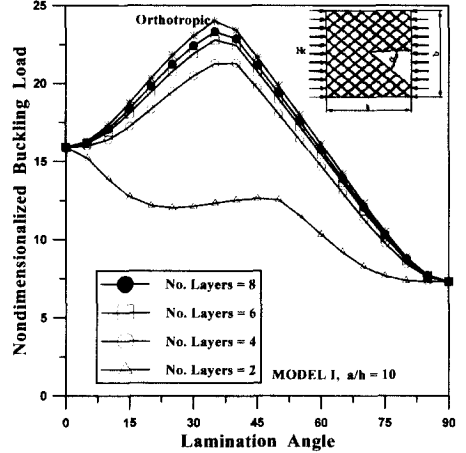


그림 14. 판의 적층각 변화에 따른 좌굴하중 ($N_{cr}b^2/E_2h^3$)

그림 13은 모델 I에 대하여 $[0^\circ/90^\circ/\dots]$ 로 적층된 적층셀의 탄성계수비의 변화에 따른 좌굴하중을 나타낸 것이다. 탄성계수비의 변화에 대하여 좌굴하중은 선형으로 비례하며 2개층인 경우 직교이방성셀의 좌굴하중에 비하여 46%의 좌굴하중을 나타내며 6층 이상인 경우 직교이방성셀의 좌굴하중에 91%이상의 좌굴하중이 나타난다. 따라서 적층수를 증가시키면 좌굴강도가 현저하게 증가한다.

그림 14는 모델 I에 대하여 플라이 각의 변화에 따라서 층수를 변화시켜가며 좌굴하중을 나타냈다. $\theta=45^\circ$ 인 경우를 보면 2개층인 경우의 좌굴하중은 연계강도 중에서 B_{16} , B_{26} 의 영향 때문에 $B_{16}=B_{26}=0$ 인 직교이방성 판보다 72%나 적게 나온다. 6개층인 경우 직교이방성인 경우의 4.3%의 오차가 발생하여 적층판 및 쉘의 적층수를 증가시키면 연계강도가 현저하게 감소하여 좌굴강도가 증가한다. 비대칭으로 적층된 적층판의 경우에

는 연계강도가 아주 중요한 영향을 미친다는 것을 고려하여 설계하여야 한다.

5. 결 론

본 연구에서는 직교이방성 적층판 및 셸에서 3차의 전단변형효과를 고려하여 휨, 자유진동, 좌굴해석을 한 결과, 전단변형효과는 판 및 셸의 길이-두께비가 감소할수록 크게 나타났으며 길이-두께비가 20이하인 경우는 고차전단변형이론을 적용하면 좀더 정확한 값을 구할 수 있다.

역대칭 앵글-플라이의 경우 층수를 증가시키면 처짐은 탄성계수비가 큰 쪽에서, 고유진동수와 좌굴하중은 탄성계수비가 작은 쪽에서 직교이방성 이론에 의한 값에 수렴한다.

2개 층의 적층판 및 셸인 경우에서 연계강도 (B_v)의 영향이 가장 크게 발생하여 각도가 $[26^\circ - 26^\circ]$ 일 경우가 가장 불리한 구조물이 되므로 $20^\circ \sim 30^\circ$ 사이의 각도를 갖는 적층판의 설계는 피해야 한다.

적층수를 증가시키면 연계강도의 영향이 감소되어 구조물에 현저한 안정을 도모할 수 있고 6층 이상에서는 직교이방성 이론의 해석결과에 거의 수렴하므로 직교이방성 이론으로 해석할 수 있다. 3개층 이상의 적층판 및 셸에서 45° 각도의 조합에서 처짐이 가장 작고, 35° 각도의 조합에서 좌굴하중이 가장 크므로 구조물의 사용목적에 따라서 적절한 각도의 조합이 필요하다.

감사의 말

이 논문은 1997년 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었으며 이에 감사의 뜻을 표합니다.

참 고 문 헌

- (1) Reddy, J.N., Analysis of Laminated Composite Plates Using a Higher-Order Shear Deformation Theory, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, 1985, pp.2201-2219.
 - (2) 장석윤, 윤석호, 한성천, 고차전단변형이론에 의한 비등방성 복합적층판의 해석, 한국강구조학회지, 제6권 1호, 3, 1994, pp.125-137.
 - (3) 장석윤, 윤석호, 한성천, 고차전단변형을 고려한 직교이방성 적층판의 고유진동수 특성, 한국강구조학회지, 제6권 3호, 9, 1994, pp.185-196.
 - (4) 장석윤, 윤석호, 한성천, 역대칭 복합적층판의 단순화된 고차전단변형을 고려한 휨과 동적 특성, 한국강구조학회지, 제9권 4호, 12, 1997, pp.601-609.
 - (5) 이상열, 임성순, 장석윤, 비등방성 복합 적층판의 임계좌굴하중 및 모드의 수치해석, 한국강구조학회지, 제10권 3호, 9, 1998, pp.451-461.
 - (6) Love, A.E.H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, New York, 1944, pp.51-58.
 - (7) Vinson, J.R., and Tsu Wei Chou, Composite Materials and Their Use in Structures, Applied Science Publishers LTD, 1985, pp.235-309.
 - (8) Reddy, J.N., and Miravete, A., Practical Analysis of Composite Laminates, CRC Press, 1995, pp.81-135.
 - (9) Reddy, J.N., Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley & Sons, 1984, pp.310-473.
 - (10) Langhaar, H. L., Energy Methods in Applied Mechanics, John Wiley & Sons, 1962, pp.233-247.
 - (11) Robert M. Jones, Mechanics of Composite materials, Scripta Book Co., 1975, pp.248-283.
 - (12) Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 2nd Edition, New York:McGraw-Hill, 1961, pp105-120.
 - (13) Noor, A.K., Stability of Multi-layered Composite Plates, Fiber Science and Technology, VOL8, 1975, pp.81-89.
- (접수일자 : 1998년 9월 30일)

부 록

부록 1 평형방정식의 계수값

$$\bar{I}_1 = I_1 + \frac{2}{R_x} I_2 \quad \bar{I}_{11} = I_1 + \frac{2}{R_y} I_2$$

$$\bar{I}_2 = I_2 + \frac{1}{R_x} I_3 - \frac{4}{3h^2} I_4 - \frac{4}{3h^2 R_x} I_5$$

$$\bar{I}_{22} = I_2 + \frac{1}{R_y} I_3 - \frac{4}{3h^2} I_4 - \frac{4}{3h^2 R_y} I_5$$

$$\bar{I}_3 = \frac{4}{3h^2} I_4 + \frac{4}{3h^2 R_x} I_5$$

$$\bar{I}_{33} = \frac{4}{3h^2} I_4 + \frac{4}{3h^2 R_y} I_5$$

$$\bar{I}_4 = I_3 - \frac{8}{3h^2} I_5 + \frac{16}{9h^4} I_7$$

$$\bar{I}_5 = \frac{4}{3h^2} I_5 - \frac{16}{9h^4} I_7$$

여기서

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_7) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz$$

이다.

부록 2 적층판 및 쉘의 행렬요소

(1) 공통요소 (판의 경우는 $R_x = R_y = \infty$)

$$C_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \quad C_{12} = A_{12}\alpha\beta + A_{66}\alpha\beta$$

$$C_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}$$

$$\begin{aligned} C_{33} = & \alpha^4(16H_{11}/9h^4) + \beta^4(16H_{22}/9h^4) + (32\alpha^2\beta^2/9h^4) \\ & (H_{12} + 2H_{66}) + \alpha^2(A_{55} - 8D_{55}/h^2 + 16F_{55}/h^4 \\ & + 8E_{11}/3h^2R_x + 8E_{12}/3h^2R_y) + \beta^2(A_{44} - 8D_{44}/h^2 \\ & + 16F_{44}/h^4 + 8E_{12}/3h^2R_x + 8E_{22}/3h^2R_y) \\ & + A_{11}/R_x^2 + 2A_{12}/R_xR_y + A_{22}/R_y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{45} = & \alpha\beta(D_{12} + D_{66} - (8/3h^2)(F_{12} + F_{66}) \\ & + (16/9h^4)(H_{12} + H_{66})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{34} = & (4\alpha^3/3h^2)(-F_{11} + (4H_{11}/3h^2)) - (4\alpha\beta^2/3h^2) \\ & (F_{12} + 2F_{66}) + (16\alpha\beta^2/9h^4)(H_{12} + 2H_{66}) + A_{55}\alpha \\ & - (8\alpha D_{55}/h^2) + (16\alpha F_{44}/h^4) - \alpha(B_{11}/R_x + B_{12}/R_y \\ & - 4/3h^2(E_{11}/R_x + E_{12}/R_y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{35} = & (4\beta^3/3h^2)(-F_{22} + (4H_{22}/3h^2)) - (4\alpha^2\beta/3h^2) \\ & (F_{12} + 2F_{66}) + (16\alpha^2\beta/9h^4)(H_{12} + 2H_{66}) + A_{44}\beta \\ & - (8\beta D_{44}/h^2) + (16\beta F_{44}/h^4) - \beta(B_{12}/R_x + B_{22}/R_y \\ & - 4/3h^2(E_{12}/R_x + E_{22}/R_y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{44} = & -(8\alpha^2/3h^2)F_{11} - (8\beta^2/3h^2)F_{66} + (16/9h^4) \\ & (H_{11}\alpha^2 + H_{66}\beta^2) + D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 + A_{55} \\ & - (8D_{55}/h^2) + (16F_{55}/h^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{55} = & \alpha^2(D_{66} - (8F_{66}/3h^2) + (16H_{66}/9h^4)) \\ & + \beta^2(D_{22} - (8F_{22}/3h^2) + (16H_{22}/9h^4)) \\ & + A_{44} - (8D_{44}/h^2) + (16F_{44}/h^4) \end{aligned}$$

$$M_{11} = I_1 + 2I_2/R_x$$

$$M_{13} = -4\alpha/3h^2(I_4 + I_5/R_x)$$

$$M_{14} = I_2 + I_3/R_x - 4I_4/3h^2 - 4I_5/3h^2R_x$$

$$M_{22} = I_1 + 2I_2/R_y$$

$$M_{23} = -4\beta/3h^2(I_4 + I_5/R_y)$$

$$M_{25} = I_2 + I_3/R_y - 4I_4/3h^2 - 4I_5/3h^2R_y$$

$$M_{33} = 16I_7/9h^4(\alpha^2 + \beta^2) + I_1$$

$$M_{34} = \alpha(-4I_5/3h^2 + 16I_7/9h^4)$$

$$M_{35} = \beta(-4I_5/3h^2 + 16I_7/9h^4)$$

$$M_{44} = I_3 - 8I_5/3h^2 + 16I_7/9h^4$$

$$M_{55} = I_3 - 8I_5/3h^2 + 16I_7/9h^4$$

$$M_{12} = M_{15} = M_{24} = M_{45} = 0$$

$$G_{33} = N_{cr} \cdot [\alpha^2 + (\frac{N_y}{N_x})\beta^2], \quad \text{other } G_{ij} = 0$$

여기서 N_{cr} 은 좌굴하중이고, \hat{N}_x, \hat{N}_y 는 면내에 작용하는 외력이다.

(2) 크로스-플라이 적층판 및 쉘의 요소

$$\begin{aligned}
 C_{13} &= -A_{11}a/R_x - A_{12}a/R_y \\
 &\quad - (4\alpha/3h^2)(E_{11}\alpha^2 + E_{12}\beta^2 + 2E_{66}\beta^2) \\
 C_{14} &= -\alpha^2(-B_{11} + (4E_{11}/3h^2)) \\
 &\quad - \beta^2(-B_{66} + (4E_{66}/3h^2)) \\
 C_{15} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{66} - (4E_{12}/3h^2) - (4E_{66}/3h^2)) \\
 C_{23} &= -\beta(A_{12}/R_x + A_{22}/R_y) \\
 &\quad - \alpha^2\beta((4E_{12}/3h^2) + (8E_{66}/3h^2)) - (4\beta^3/3h^2)E_{22} \\
 C_{24} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{66} - (4E_{12}/3h^2) - (4E_{66}/3h^2)) \\
 C_{25} &= \alpha^2(B_{66} - (4E_{66}/3h^2)) + \beta^2(B_{22} - (4E_{22}/3h^2))
 \end{aligned}$$

(3) 역대칭 앵글-플라이 적층판의 행렬요소

$$\begin{aligned}
 C_{13} &= -(4\alpha/3h^2)(3E_{16}\alpha^2\beta + E_{26}\beta^3) \\
 C_{14} &= 2\alpha\beta B_{16} - (8/3h^2)\alpha\beta E_{16} \\
 C_{15} &= \alpha^2 B_{16} + \beta^2 B_{26} - (4/3h^2)[\alpha^2 E_{16} + \beta^2 E_{26}] \\
 C_{23} &= (4/3h^2)[\alpha^3 E_{16} + 3\beta^2 \alpha E_{26}] \\
 C_{24} &= \alpha^2 B_{16} + \beta^2 B_{26} - (4/3h^2)[\alpha^2 E_{16} + \beta^2 E_{26}] \\
 C_{25} &= 2\alpha\beta B_{26} - (8/3h^2)\alpha\beta E_{26}
 \end{aligned}$$

여기서 h 는 쉘의 두께이고, $\alpha = m\pi / a$, $\beta = n\pi / b$ 이다.