

단순지지된 비등방성 대칭 적층 원통형 셸의 해석

Analysis of Simple Supported Anisotropic Symmetric Laminated Cylindrical Shells

채 상 윤¹⁾ · 임 성 순²⁾ · 장 석 윤³⁾

Chai, Sang Youn · Yhim, Sung Soon · Chang, Suk Yoon

요 약 : 본 연구의 목적은 복합재료의 이점을 증명하고, 비등방성 대칭 적층 원통형 셸의 거동을 분석하는 것으로서, 비등방성 대칭 적층 원통형 셸을 해석하기 위해서 전진차분법, 중앙차분법, 후진차분법으로 구성되어 있는 유한차분법을 적용하였다. 본 연구에서는 처짐과 모멘트를 자유도로 고려하였으며, 이는 모멘트 계산시 발생할 수 있는 오차를 줄일 수 있는 장점을 가지고 있다. 또한 4변이 모두 단순지지된 경계조건을 고려하였다. 수치해석 결과, 유한차분법에 의한 본 연구의 프로그램이 비등방성 대칭 적층 원통형 셸의 해석에 적합함을 알 수 있으며, 효과적인 보강섬유의 배치 방법을 제시하였다.

ABSTRACT : The objective of this study is to identify the advantages of composite materials and to investigate the behavior of the anisotropic symmetric laminated cylindrical shell structures. To analyze the anisotropic symmetric laminated cylindrical shell structures, the finite difference technique, that consists of forward, central and backward difference, is introduced. In this study, the degree of freedom consists of three displacements and, especially, two moments except twisting moment. It has the advantage of improving the accuracy for calculating the moments. All four edges are assumed to be simply supported. From the numerical results, it is proved that the finite difference technique can be used efficiently to analyze the anisotropic symmetric laminated cylindrical shells and gives a guide in deciding how to make use of the fiber angle the anisotropic symmetric laminated cylindrical shells.

핵심용어 : 복합재료, 적층, 원통형 적층 셸, 유한차분, 비등방성

KEYWORDS : Composite Materials, Laminate, Cylindrical Shell, Finite Difference, Anisotropic

1. 서 론

두 가지 이상의 재료로 이루어진 복합재료는 자

중에 비하여 높은 강성과 강도를 갖는다. 복합재료로 이루어진 구조물은 단일소재를 사용할 경우 발생할 수 있는 재료의 역학적인 단점을 보완하고

1) 학생회원, 서울시립대학교 토목공학과
2) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과, 공학박사
3) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과, 공학박사

본 논문에 대한 토의를 1999년 10월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

구조적 효율성을 증대시킬 수 있는 구조형식이다. 셸 구조물은 외관상 수려하고 경제적인 구조형식 중 하나이다. 또한 셸 구조물은 가볍고 강성이 높은 구조물이다. 이는 높은 강성과 가벼운 중량이 요구되어지는 조선, 우주항공, 토목, 건축, 에너지 산업에서 널리 사용되어 왔다는 사실로 입증된다. 기존의 셸구조물에서는 구조재료를 철강이나 비철금속 또는 콘크리트 등을 이용하였으나 앞서 언급한 복합재료를 사용함으로써 보다 높은 강성과 낮은 중량을 가진 셸 구조물을 설계할 수 있게 되었다. 셸 구조물은 기하학적 특성 때문에 다른 구조물에 비해 복잡한 거동을 나타내며 복합재료를 사용함으로써 해석상 어려움이 더욱 커지게 되었다.

일반적인 셸 이론은 1888년 Love에 의해서 발표되었으며 그는 얇은 셸에 있어서 Bending 효과에 비하여 Stretching 효과가 지배적이라는 주장을 하였다. 그후 Kirchhoff-Love의 가정을 바탕으로한 셸 이론은 얇은 탄성 셸의 해석을 위해 발전되었다. 탄성이론을 바탕으로 한 셸 이론 전개에 대한 역사는, 1924년에 Shtaerman은 축대칭 정적 하중하에서 회전하는 직교이방성 셸에 대한 논문을 발표하였으며, 1955년에 Chakrovorty는 구형 셸의 연구를 통해 직교이방성 셸의 진동에 관한 논문을 발표하였다.

1953년에 Ambartsumyan은 비등방성 적층셸의 Bending-Stretching Coupling의 효과를 연구 발표하였다. 이 연구에서 그는 1개층을 대칭으로 적층시킨 직교이방성 셸로 연구범위를 제한하였다. 1962년에 Taylor, Dong 등이 Donnell의 가정을 이용하여 적층된 비등방성 셸을 해석하였고, 축대칭 하중하에서 두 개 층이 앵글-플라이로 적층된 비등방성 원통형 셸의 해석을 통해 Bending-Stretching Coupling의 효과를 규명하였다. Becker와 Gerard 등에 의해 직교이방성 실린더의 안정성에 관한 연구가 이루어졌으며, 복합재료로 구성된 원통형 셸의 이질효과와 필라멘트식으로 감긴 원통의 좌굴강도가 Tsai 등에 의해 연구되었다. 1963년에 Cheng과 Ho는

Flügge의 셸이론을 근거로 횡압력, 축방향 압축 및 비틀림의 조합된 하중을 받는 적층된 비등방성 원통형 셸 구조물의 안정에 대한 연구를 수행하였다. 1965년에 Kingsbury는 축대칭 하중을 받는 균질한 비등방성 원통형 셸과 회전셸을 연구하여, 원통형 셸의 단부하중에 대한 해를 구했다. 또한 응력과 처짐을 보강섬유의 방향과 탄성계수의 합수로 표현하여, 회전셸의 해를 점근적 적분이론을 사용하여 구현하였다. 1967년에 Bert는 일반적인 비등방성 셸의 해석을 Vlasov의 셸 이론을 사용하여 전개하였다. 또한 Kunukassevil은 여러 층으로 구성된 일반적인 비등방성 원통형 셸의 진동에 대해 연구하였다. 1969년에 Bert 등은 얇은 임의의 적층 비등방성 원통형 셸에 대하여 고전적인 휨이론을 사용하여 2개의 층으로 구성된 직교 이방성 원통형 셸의 고유진동수에 대한 해석 결과를 Dong의 결과와 비교하였으며, Bending-Stretching Coupling의 중요성을 입증하였다. 1969년에 Reuter는 의해 등질이고 반무한한 직교이방성 원통형 셸의 탄성장파 전달에 대해서, 1969년 Martin은 Galerkin의 방법을 이용하여 비등방성 원뿔형 셸의 자유진동에 대해서 해석하였다.

본 연구에서는 복합재료로 이루어지고, 4변이 단순지지된 비등방성 대칭 적층 원통형 셸의 거동을 Δ^2 의 오차를 갖는 유한차분 수치해석 기법을 이용하여 해석하였다. 또한 처짐과 모멘트에 대한 자유도를 함께 고려하여 평형방정식을 구성하였다. 본 연구에서는 해석결과에 대한 검증을 위하여 등방성 판의 정해와 비교하였으며, 등방성 원통형 셸의 경우 범용 유한요소 해석 프로그램인 SAP2000과 비교, 분석하였다. 본 연구에서는 각 층의 재료의 배치가 중립축에 대하여 대칭으로 적층된 경우의 비등방성 원통형 셸의 해석을 위해서 면내력강도와 휨강도만을 고려하여 식을 전개하였다. 비등방성 원통형 셸의 거동을 분석하기 위하여 각각 동일한 두께를 갖는 4개의 층으로 구성된 원통형 셸을 기본으로 하는 해석 모델을 사용하였으며, 보강섬유의 보강방법, 중심

각의 변화 그리고 길이비의 변화에 따른 영향을 비교, 분석하였다.

2. 기본이론

본 연구에서는 Kirchhoff-Love의 변형 전 중립면에 수직인 단면은 변형후에도 평면을 유지하고 중립면에 수직하다는 가정과, 쉘의 두께는 다른 두 방향의 길이에 비하여 매우 작다는 가정에 의한 얇은 쉘(Thin Shell)을 해석 모델로 하였다.

2.1 좌표계와 변위장

본 연구에서는 반경방향을 Z축, 원주(Circumferential)방향을 θ 축, 생성원(Generator)방향을 X축으로 하는 좌표계(x, z, θ)를 사용하였으며 그림 1에 나타내었다. 여기서, u, v, w 는 각각 미소변형이론에 의한 중립축에서의 생성원 방향의 변위, 원주 방향의 변위, 그리고 반경 방향의 변위를 나타낸다.

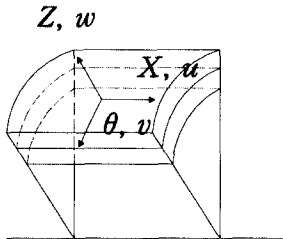


그림 1. 원통형 쉘의 좌표계와 변위

2.2 응력-변형도 관계

미소변형이론에 의한 원통형 쉘의 미소요소에서의 변형도-변위 관계와 곡률-변위 관계를 매트릭스 형태로 표현하면 식 (1)과 같으며, r은 쉘의 반경이다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_X \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{\theta X} \\ \chi_X \\ \chi_\theta \\ \chi_{\theta X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial X} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial X^2} \\ 0 & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial X} & -\frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial X \partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1)$$

2.3 힘-변위 관계

원통형 쉘 요소의 면내력, 면외력 그리고 외력을 그림 2, 3에 나타내었다. 그림 2와 그림 3에서 $N_X, N_\theta, N_{X\theta}$ 는 단면력을, $M_X, M_\theta, M_{X\theta}$ 는 모멘트를, Q_X, Q_θ 는 전단력을 그리고 q_X, q_θ, q_Z 는 각각의 면에 수직하게 작용하는 등분포 하중을 의미한다.

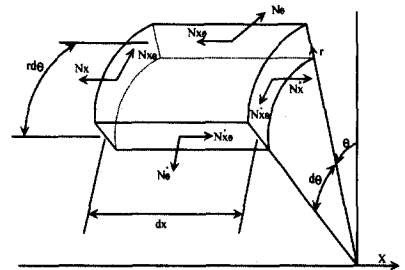


그림 2. 쉘 요소의 면내력

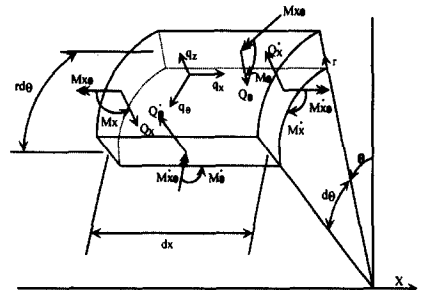


그림 3. 쉘 요소의 면외력 및 외력

단면력과 모멘트는 각각의 응력을 쉘의 두께에 대하여 적분을 하여 구할 수 있으며 식 (2)에 나타내었다. 여기서, A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} 는 각각 면내력강도, 휨-면내력 연계강도, 그리고 휨강도를 나타내며, 식 (3)과 같다. 식 (3)의 \bar{C}_{ij} 는 재료층에서의 탄성강도를 좌표변환하여 구한 구조층에서의 탄성강도를 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial X} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial X^2} \\ 0 & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial X} & -\frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial X \partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{C}_{ij_k} dz \quad (3a)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{C}_{ij_k} z dz \quad (3b)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{C}_{ij_k} z^2 dz \quad (3c)$$

본 연구에서는 각 층의 재료의 배치가 중립축에 대하여 대칭으로 적층된 경우, 즉 대칭 적층 원통형 쉘의 해석을 위해서 면내력강도와 휨강도만을 고려하였다.

2.4 평형방정식

본 연구에서는 평형방정식을 그림 2와 3에 정의된 내력과 외력에 대한 힘의 평형조건을 이용하는 벡터장에서 유도하였으며, 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial X} & 0 & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial X^2} & -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & -\frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial X \partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ax \\ -a\theta \\ az \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.5 모멘트 소거

본 연구에서는 처짐과 모멘트(M_x, M_θ)를 자유도로 고려하여 평형방정식을 구성하였다. 모멘트를 자유도에 포함시킴으로서 반복 연산회수를 줄일 수 있기 때문에 모멘트 계산시 발생할 수 있는 오차를 줄일 수 있다. 모멘트를 자유도로 고려할 경우, M_x 와 M_θ 는 단순지지 경계조건에서의 경계점 처리가 간단하지만 비틀림 모멘트($M_{x\theta}$)는 경계점 처리가 까다롭다. 따라서 모든 모멘트를 자유도로 고려하는 것이 아니라, M_x 와 M_θ 만을 자유도에 포함시키고, $M_{x\theta}$ 는 다른 자유도로 치환하여 자유도에서 소거하고자 하였다. 본 연구에서는 비틀림모멘트를 자유도에서 소거하기 위해서 식 (2)에서 정의된 M_x 와 M_θ 와 식 (3c)에서 정의된 휨강도(D_{11}, D_{12}, D_{22})를 이용하여 식 (5)와 같은 연산을 수행하였다.

$$D_{12}M_x - D_{11}M_\theta \quad (5a)$$

$$D_{22}M_x - D_{12}M_\theta \quad (5b)$$

윗식에서 $\frac{1}{r} w_{,\theta\theta}$, $w_{,xx}$ 를 구한 후 식 (2)의 마지막 항에 대입하면 식 (6)과 같이 비틀림 모멘트를 구할 수 있으며, 상세한 과정은 부록 1에 나타내었다.

$$M_{x\theta} = \eta_1 M_x + \eta_2 M_\theta - \eta_3 \frac{1}{r} v_{,x} + 2\eta_3 \frac{1}{r} w_{,\theta x} \quad (6)$$

$$\text{여기서, } \eta_1 = \frac{D_{16}D_{22} - D_{12}D_{26}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}$$

$$\eta_2 = \frac{D_{11}D_{26} - D_{12}D_{16}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}$$

$$\eta_3 = \eta_1 D_{16} + \eta_2 D_{26} - D_{66}$$

식 (2)와 식 (6)을 식 (4)에 대입하여 정리하면 식 (7)과 같은 힘과 변위와의 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_{11}u_{,XX} + A_{12}\frac{1}{r}v_{,OX} + A_{12}\frac{1}{r}w_{,OX} + A_{16}v_{,XX} \\ + 2A_{16}\frac{1}{r}u_{,OX} + A_{26}\frac{1}{r^2}v_{,OO} + A_{26}\frac{1}{r^2}w_{,O} \\ + A_{66}\frac{1}{r}v_{,OX} + A_{66}\frac{1}{r^2}u_{,OO} = -q_X \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} A_{12}\frac{1}{r}u_{,OX} + A_{22}\frac{1}{r^2}v_{,OO} + A_{22}\frac{1}{r^2}w_{,O} + A_{26}\frac{1}{r}v_{,OX} \\ + A_{26}\frac{1}{r^2}u_{,OO} + A_{16}u_{,XX} + A_{26}\frac{1}{r}v_{,OX} + A_{26}\frac{1}{r}w_{,OX} \\ + A_{66}v_{,XX} + A_{66}\frac{1}{r}u_{,OX} + \frac{1}{r^2}M_{O,O} + \eta_1\frac{1}{r}M_{X,X} \\ + \eta_2\frac{1}{r}M_{O,X} - \eta_3\frac{1}{r^2}v_{,XX} + 2\eta_3\frac{1}{r^2}w_{,OXX} = -q_O \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} A_{12}\frac{1}{r}u_{,OX} + A_{22}\frac{1}{r^2}v_{,O} + A_{22}\frac{1}{r^2}w + A_{26}\frac{1}{r}v_{,OX} \\ + A_{26}\frac{1}{r^2}u_{,O} - M_{X,XX} - 2\eta_1\frac{1}{r}M_{X,OX} - 2\eta_2\frac{1}{r}M_{O,OX} \\ + 2\eta_3\frac{1}{r^2}v_{,OXX} - 4\eta_3\frac{1}{r^2}w_{,OXX} - \frac{1}{r^2}M_{O,OO} = q_Z \end{aligned} \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} M_X + D_{11}w_{,XX} - D_{12}\frac{1}{r^2}v_{,O} + D_{12}\frac{1}{r^2}w_{,OO} \\ - D_{16}\frac{1}{r}v_{,OX} + 2D_{16}\frac{1}{r}w_{,OX} = 0 \end{aligned} \quad (7d)$$

$$\begin{aligned} M_O + D_{12}w_{,XX} - D_{22}\frac{1}{r^2}v_{,O} + D_{22}\frac{1}{r^2}w_{,OO} \\ - D_{26}\frac{1}{r}v_{,OX} + 2D_{26}\frac{1}{r}w_{,OX} = 0 \end{aligned} \quad (7e)$$

3. 수치해석

3.1 유한차분의 적용

본 연구에서는 Δ^2 의 오차를 갖는 유한차분법을 이용하여 평형방정식을 유한차분 방정식으로 변환하였다. 식 (7)에 각 방향의 미소요소 길이의 증분과 유한차분을 적용하여 식 (8)과 같은 유한차분 방정식을 유도하였으며, 차분상수는 부록 2에 나타내었다. 유한차분식으로 표현된 평형 방정식에서 i, j 는 각각 생성된 방향, 원주 방향의 절점을 나타낸다. 원주방향의 절점은 위에서 아래로 향하는 것을, 생성원방향의 절점은 왼쪽에서 오른쪽 방향으로 향하는 것을 정(+)으로 하는 부호규약을 사용하였다.

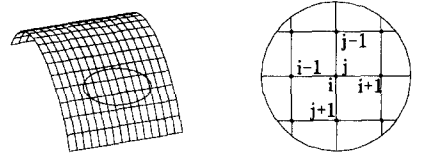


그림 4. 원통형 셸의 절점의 정의

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} f_{01} u_{i-1} \\ f_{02} u_i \\ -f_{01} u_{i+1} \end{array} \right]_{j-1} + \left[\begin{array}{c} -f_{03} u_{i-1} \\ f_{04} u_i \\ f_{03} u_{i+1} \end{array} \right]_j + \left[\begin{array}{c} -f_{01} u_{i-1} \\ f_{02} u_i \\ f_{01} u_{i+1} \end{array} \right]_{j+1} \\ & + \left[\begin{array}{c} f_{05} v_{i-1} \\ f_{06} v_i \\ -f_{05} v_{i+1} \end{array} \right]_{j-1} + \left[\begin{array}{c} -f_{07} v_{i-1} \\ -f_{08} v_i \\ f_{07} v_{i+1} \end{array} \right]_j + \left[\begin{array}{c} -f_{05} v_{i-1} \\ f_{06} v_i \\ f_{05} v_{i+1} \end{array} \right]_{j+1} \\ & + \left[\begin{array}{c} -f_{09} w_i \end{array} \right]_{j-1} + \left[\begin{array}{c} -f_{10} w_{i-1} \\ f_{10} w_{i+1} \end{array} \right]_j + \left[\begin{array}{c} f_{09} w_i \end{array} \right]_{j+1} \\ & = -q_X \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} f_{05} u_{i-1} \\ f_{06} u_i \\ -f_{05} u_{i+1} \end{array} \right]_{j-1} + \left[\begin{array}{c} -f_{07} u_{i-1} \\ -f_{08} u_i \\ f_{07} u_{i+1} \end{array} \right]_j + \left[\begin{array}{c} -f_{05} u_{i-1} \\ f_{06} u_i \\ f_{05} u_{i+1} \end{array} \right]_{j+1} \\ & + \left[\begin{array}{c} f_{11} v_{i-1} \\ f_{12} v_i \\ -f_{11} v_{i+1} \end{array} \right]_{j-1} + \left[\begin{array}{c} -f_{13} v_{i-1} \\ -f_{14} v_i \\ f_{13} v_{i+1} \end{array} \right]_j + \left[\begin{array}{c} -f_{11} v_{i-1} \\ f_{12} v_i \\ f_{11} v_{i+1} \end{array} \right]_{j+1} \\ & + \left[\begin{array}{c} -f_{15} w_{i-1} \\ -f_{16} w_i \\ f_{15} w_{i+1} \end{array} \right]_{j-1} + \left[\begin{array}{c} f_{17} w_{i-1} \\ -f_{17} w_{i+1} \end{array} \right]_j + \left[\begin{array}{c} -f_{15} w_{i-1} \\ f_{16} w_i \\ f_{15} w_{i+1} \end{array} \right]_{j+1} \\ & + \left[\begin{array}{c} -f_{18} M_{X_i} \end{array} \right]_{j-1} + \left[\begin{array}{c} f_{18} M_{X_i} \end{array} \right]_{j+1} \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} -f_{19} M_{\theta_i} \\ \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} -f_{20} M_{\theta_{i-1}} \\ f_{20} M_{\theta_{i+1}} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} f_{19} M_{\theta_i} \\ \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$= -q_{\theta} \quad (8b)$$

$$\begin{bmatrix} f_{09} u_i \\ \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} f_{10} u_{i-1} \\ -f_{10} u_{i+1} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} -f_{09} u_i \\ \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$+ \begin{bmatrix} -f_{11} v_{i-1} \\ -f_{12} v_i \\ f_{11} v_{i+1} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} -f_{13} v_{i-1} \\ -f_{14} v_i \\ -f_{13} v_{i+1} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} f_{11} v_{i-1} \\ -f_{12} v_i \\ -f_{11} v_{i+1} \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$+ \begin{bmatrix} -f_{21} w_{i-1} \\ 2f_{21} w_i \\ f_{21} w_{i+1} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} -2f_{21} w_{i-1} \\ f_{22} w_i \\ -2f_{21} w_{i+1} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} -f_{21} w_{i-1} \\ 2f_{21} w_i \\ f_{21} w_{i+1} \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$+ \begin{bmatrix} f_{23} M_{X_{i-1}} \\ f_{24} M_{X_i} \\ -f_{23} M_{X_{i+1}} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} -2f_{24} M_{X_i} \\ \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} -f_{23} M_{X_{i-1}} \\ f_{24} M_{X_i} \\ f_{23} M_{X_{i+1}} \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$+ \begin{bmatrix} f_{25} M_{\theta_{i-1}} \\ -f_{25} M_{\theta_{i+1}} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} -f_{25} M_{\theta_{i-1}} \\ f_{25} M_{\theta_{i+1}} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} -f_{25} M_{\theta_{i-1}} \\ f_{25} M_{\theta_{i+1}} \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$= -q_Z \quad (8c)$$

$$\begin{bmatrix} f_{27} v_i \\ \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} f_{28} v_{i-1} \\ -f_{28} v_{i+1} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} -f_{27} v_i \\ \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$+ \begin{bmatrix} f_{29} w_{i-1} \\ f_{30} w_i \\ -f_{29} w_{i+1} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} -f_{31} w_{i-1} \\ -f_{32} w_i \\ f_{31} w_{i+1} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} -f_{29} w_{i-1} \\ f_{30} w_i \\ f_{29} w_{i+1} \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$+ \begin{bmatrix} f_{33} M_{X_i} \\ \end{bmatrix}_j = 0 \quad (8d)$$

$$\begin{bmatrix} f_{34} v_i \\ \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} f_{35} v_{i-1} \\ -f_{35} v_{i+1} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} -f_{34} v_i \\ \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$+ \begin{bmatrix} f_{36} w_{i-1} \\ f_{37} w_i \\ -f_{36} w_{i+1} \end{bmatrix}_{j-1} + \begin{bmatrix} -f_{38} w_{i-1} \\ -f_{39} w_i \\ f_{38} w_{i+1} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} -f_{36} w_{i-1} \\ f_{37} w_i \\ f_{36} w_{i+1} \end{bmatrix}_{j+1}$$

$$+ \begin{bmatrix} f_{33} M_{\theta_i} \\ \end{bmatrix}_j = 0 \quad (8e)$$

임의의 j 선상위의 모든 i 점에서의 처짐 및 모멘트의 값을 표시한 매트릭스는 식 (9)와 같다.

$$[A] X_{j-1} + [B] X_j + [C] X_{j+1} = F_j \quad (9)$$

여기서, A, B, C 는 각각 $j-1, j, j+1$ 에 대한 부 매트릭스를 의미하며, 각각의 부 매트릭스는 다시 $i-1, i, i+1$ 에 대한 부 매트릭스로 구성되어 진다.

3.2 원통형 셸의 전체 시스템 매트릭스 구성

임의의 점에서의 자유도는 u, v, w, M_X, M_{θ} 의 5개이므로 경계조건을 고려하지 않은 원통형 셸 구조물 전체에 대한 시스템 매트릭스의 크기는 $(5 \times N \times M)(5 \times N \times M)$ 과 같다. 여기서, N, M 은 각 방향으로의 분할수를 나타낸다. 이와 같이 결정된 시스템 매트릭스의 크기는 경계조건을 고려할 경우 감소하게 되며 또한 경계조건의 종류에 따라서도 그 크기는 변하게 된다. 본 연구에서는 4번 단순지지인 경계조건을 갖는 원통형 셸에 대해 해석을 수행하였으며, 이러한 경계조건에서의 시스템 매트릭스의 크기는 $(5 \times (N-2) \times (M-2))(5 \times (N-2) \times (M-2))$ 이 되며 이러한 경계조건을 적용한 원통형 셸 구조물 전체에 대한 시스템 매트릭스는 식 (10)과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\{F\} = [K]\{X\} \quad (10)$$

여기서, $\{F\}$ 는 하중벡터로서 식 (11)과 같고, $\{X\}$ 는 처짐 및 모멘트 벡터이며 식 (12)에 나타내었다. 또 $[K]$ 는 시스템 매트릭스를 의미하며 식 (13)과 같다. 식 (13)의 시스템 매트릭스 $[K]$ 에서 계수의 행과 열의 위치는 각각 $5(i-2)(j-2) + N_e, 5(i-2)(j-2) + N_d$ 가 된다. N_e 는 식 번호를, N_d 는 자유도 번호를 의미한다.

$$\{F\} = \{F_1 F_2 \cdots F_j \cdots F_{n-3} F_{n-2}\}^T \quad (11)$$

$$\{X\} = \{X_1 X_2 \cdots X_j \cdots X_{n-3} X_{n-2}\}^T \quad (12)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [B] & [C] & & & \\ [A] & [B] & [C] & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & [A] & [B] & [C] \\ & & & & [A] & [B] \end{bmatrix} \quad (13)$$

변위 및 모멘트 벡터 $\{X\}$ 는 시스템 매트릭스 $[K]$ 의 역행렬을 구해 하중벡터 $\{F\}$ 에 곱함으로써 구할 수 있으며 식 (14)와 같다.

$$\{X\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (14)$$

식 (14)에서 구한 변위와 모멘트 (M_X, M_θ)를 식 (2)에 대입함으로써 요소의 단면력 $N_X, N_\theta, N_{\theta X}$ 를 구할 수 있으며, 식 (6)에 대입하면 자유도에서 소거한 비틀림 모멘트를 구할 수 있으며, 단면력 및 비틀림 모멘트를 구하는 과정에서, 지점을 제외한 내부점에서는 시스템 매트릭스를 구성할 때와 동일한 방법인 중앙차분법만을 이용할 수 있다. 그러나 지점(경계점)에서는 중앙차분법만을 사용할 경우 미지점에 대한 처리가 어렵기 때문에 중앙차분법을 사용하여 지점에서의 값을 구현할 수 없다. 따라서 지점에서 단면력 및 비틀림모멘트를 구하기 위해서는 전진차분법, 중앙차분법, 후진차분법을 모두 이용해야 한다.

4. 해석 예 및 결과분석

4.1 해석모델

유한차분법은 평형방정식을 차분방정식으로 쉽게 변환할 수 있으며, 오차의 한계를 선택적으로 결정할 수 있는 장점을 지닌 수치해석 기법이다. 즉, 임의의 점에 대한 미분방정식을 차분식으로 표현할 때 주위의 점에 대한 함수값으로 근사화 할 수 있다. 이때 임의의 점을 구현하기 위해서 필요한 주위의 지지점의 수, 즉 필요한 차분점 수에 따라 오차의 범위가 결정된다.

본 연구에서는 4변이 모두 단순지지인 원통형 셸에 대한 해석을 수행하였으며 그림 5에 나타내었다. 하중조건은 반경 방향으로 면에 수직하게 작용하는 등분포 하중에 대해서 해석을 수행하였다.

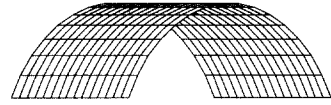


그림 5. 해석모델

본 연구에서는 Boron fiber가 Epoxy matrix에 묻혀있는 재료를 사용하여 각 층의 두께가 동일한 4개의 층을 적층시킨 모델을 기본으로 하여 해석을 수행하였다. 이때 1축의 탄성계수 201, 2축의 탄성계수 21.7, 전단탄성계수 5.4, 포인슨비가 0.17인 재료를 사용하였으며 사용된 단위 GPa 이다.

본 연구에서는 유한차분법의 정확도를 검증하기 위하여 등방성 판의 정확해와 비교하였으며, 범용 유한요소 해석 프로그램인 SAP2000과 비교하였다. 각층의 두께는 0.25로 동일한 4개의 층으로 구성하였고, 원통형 셸의 변장비(X 축 길이와 θ 축 길이의 비)를 1:1로 하였으며, 원통형 셸의 반경은 중심각과 원주방향의 변장비에 따라 조절하여 해석을 수행하였다. 또한 기본 중심각을 60° 로 하였으며, 보강섬유의 보강각도를 변화시키면서 그에 따른 결과를 분석하였다. 또한 원통형 셸의 중심각을 변화시키면서 그에 따른 변화를 분석하였다.

4.2 정확도 분석

본 연구의 원통형 셸 해석프로그램의 정확도를 검증하기 위하여 등방성 원통형 셸의 해석 결과를 범용 유한요소 해석 프로그램인 SAP2000과 비교하였으며 그 결과를 그림 6, 그림 7, 표 1에 나타내었다. 그림 6은 원통형 셸 중앙에서의 반경방향 최대치짐을 비교한 것이며, 그림 7은 결과의 상대적인 오차를 나타낸 것이다. 또한 표 1은 본 연구의 프로그램의 결과와 SAP2000의 결과 및 상대적인 오차를 도표화한 것이다.

$$\text{상대오차(\%)} = \left| \frac{\text{유한차분} - \text{SAP2000}}{\text{SAP2000}} \right| \times 100 \quad (15)$$

표 1. 유한차분법과 SAP2000의 쉘의 중앙 최대처짐 비교

분할수	중앙최대처짐		상대오차 (%)
	유한차분법	SAP2000	
5×5	-2.628281	-3.215120	22.33
7×7	-2.844281	-3.135280	10.23
9×9	-2.930145	-3.118930	6.44
11×11	-2.972135	-3.113210	4.75
13×13	-2.995619	-3.110500	3.83
15×15	-3.010028	-3.108990	3.29
17×17	-3.019486	-3.108060	2.93
19×19	-3.026022	-3.107450	2.69
21×21	-3.030723	-3.107020	2.52
23×23	-3.034216	-3.106720	2.39
25×25	-3.036882	-3.106490	2.29

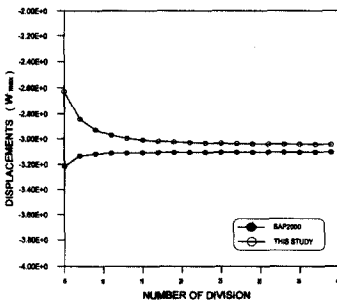


그림 6. 유한차분법과 SAP2000의 중앙 최대처짐(w) 비교

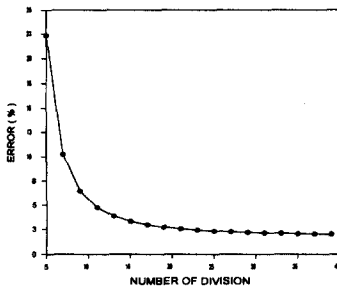


그림 7. 유한차분법과 SAP2000과의 상대오차

본 연구의 프로그램과 SAP2000을 이용한 등방성 원통형 쉘의 해석 결과, 두 방법 모두 요소의 절점수가 증가할수록 일정한 값으로 수렴해 가는 것을 그림 6에서 확인할 수 있다. 두 방법

간의 상대적인 오차는 분할수가 11×11일 경우 5% 미만으로 나타났다. 또한 분할수가 증가할수록 오차는 줄어들고 있으며 25×25의 분할수에서 2.29%의 상대적인 오차를 나타내고 있다(그림 7, 표 1). 이 결과로서 본 연구의 프로그램이 원통형 쉘을 해석하는데 있어서 합리적인 결과를 제공할 수 있다는 것을 나타낸다.

본 연구에서는 등방성 판과의 비교를 위해서 재료의 배치가 등방성으로 구성된 원통형 쉘의 곡선요소를 판과 같은 직선요소로 만들었다. 등분포 하중을 반경 방향으로 작용시켜 원통형 쉘의 중앙 최대처짐을 등방성 판의 정확해와 비교함으로써 본 연구의 프로그램을 검증하고자 하였다. 따라서, 본 연구에서 원통형 쉘을 판의 형태로 만들기 위해서 반경은 3819.72, 중심각은 0.015° (0.000263 radian)를 사용하였다. 그림 8은 원통형 쉘과 판으로 변환된 원통형 쉘을 나타낸 것이다.

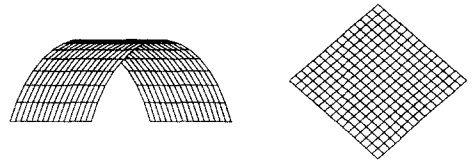


그림 8. 곡선요소에서 직선요소로의 변환

그림 9는 분할수에 따른 등방성 판과 판으로 변환된 원통형 쉘의 중앙 최대처짐을 비교한 것이며, 비교 결과를 표 2에 나타내었다. 표 2와 그림 9에서 보이는 바와 같이 요소의 분할수가 5×5일 때 97.25%의 정확도를 보이며 7×7로 요소를 분할하였을 때 99%를 상회하는 아주 높은 정확도를 보이고 있음을 알 수 있다. 이 결과는 본 연구의 프로그램으로 등방성 판의 거동을 해석하는데 사용될 수 있음을 나타낸다.

표 2. 원통형 쉘의 중앙 최대처짐과 판의 정확해와의 비교

절점수	중앙 최대 처짐값	정확도(%)
5×5	-2.094728	97.75
7×7	-2.105148	99.66

9×9	-2.108477	99.82
11×11	-2.109945	99.89
13×13	-2.110721	99.94
15×15	-2.111182	99.95
17×17	-2.111477	99.96
19×19	-2.111679	99.97
21×21	-2.111822	99.98
25×25	-2.112007	99.99
정확해	-2.112423	100.00

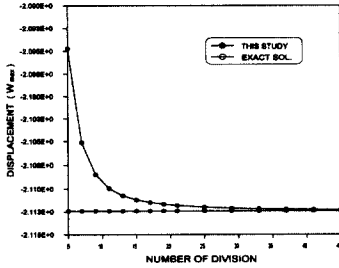


그림 9. 중앙 최대처짐과 정확해와의 비교

4.3 보강섬유의 보강각도에 따른 결과분석

그림 10은 반경방향의 처짐을 $\theta=1/2$ 점에서의 분포를 나타낸 것이다. 보강섬유의 보강각도가 일방향인 경우, 그렇지 않은 경우끼리 서로 일치하고 있으며, 보강섬유를 일방향으로 보강하였을 경우 더 큰 처짐을 나타내고 있다. 그림 11은 $\theta=1/2$ 점에서의 M_x 의 분포를, 그림 12는 $X=1/2$ 점에서의 M_θ 의 분포를 나타낸 것이다. M_x, M_θ 모두 일방향 보강을 하였을 경우가 그렇지 않은 경우보다 축의 중앙부위에서는 작은 값을 그리고 지점과 중앙부위 사이에서는 큰 값을 나타내고 있음을 알 수 있다. $M_{X\theta}$ 의 분포는 그림 13에 나타냈으며, 일방향으로 보강섬유를 배치한 경우의 값이 크게 나타났다. 또한 지점과 축의 중앙 사이에서 최대값 및 최소값을 나타내고 있음을 알 수 있다. N_x, N_θ (그림 14, 15)는 일방향 보강을 하였을 경우가 그렇지 않은 경우보다 큰 값을 나타낸다. 그러나 그림 16의 $N_{X\theta}$ 는 일방향 보강을 하였을 경우 최대값 및 최소값을 나타내고 있다.

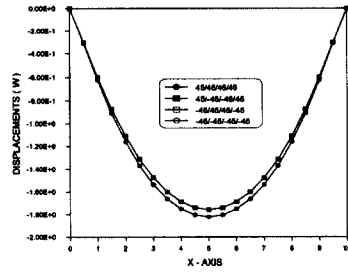


그림 10. 처짐 w 의 X 축상의 분포($\theta = 1/2$ 점)

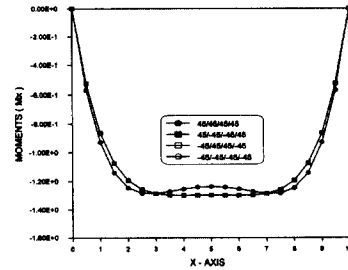


그림 11. M_x 의 X 축상의 분포($\theta = 1/2$ 점)

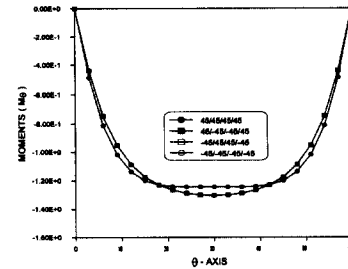


그림 12. M_θ 의 θ 축상의 분포($X = 1/2$ 점)

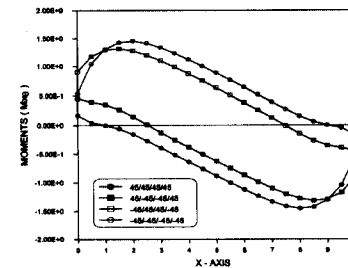


그림 13. $M_{X\theta}$ 의 X 축상의 분포($\theta = 1/4$ 점)

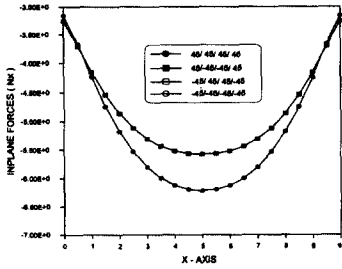


그림 14. N_x 의 X 축상의 분포 ($\theta = 1/2$ 점)

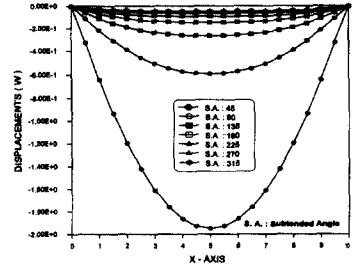


그림 17. w 의 X 축상의 분포 ($\theta = 1/2$ 점)

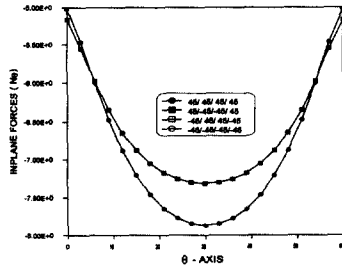


그림 15. N_θ 의 θ 축상의 분포 ($X = 1/2$ 점)

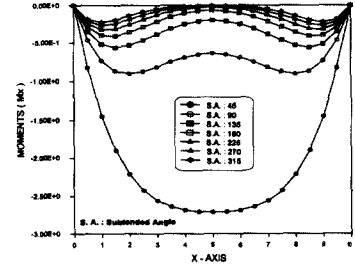


그림 18. M_x 의 X 축상의 분포 ($\theta = 1/2$ 점)

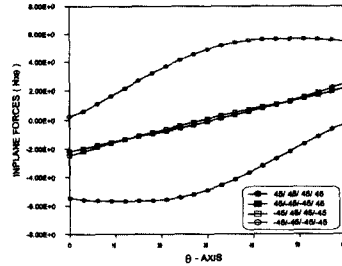


그림 16. $N_{X\theta}$ 의 θ 축상의 분포 ($X = 1/4$ 점)

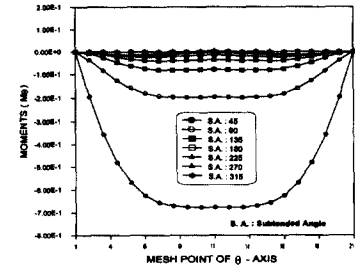


그림 19. M_θ 의 θ 축상의 분포 ($X = 1/2$ 점)

4.4 중심각 변화에 따른 결과분석

각층의 보강섬유를 [0/90/90/0]로 배치하고 X 축 길이와 θ 축 길이를 고정시킨 후, 중심각의 변화에 따른 원통형 쉘의 거동을 비교, 분석하였다. 이때 중심각을 45° 에서 315° 까지 45° 씩 증가시키면서 중심각 변화에 따른 영향을 처짐 및 모멘트에 대해서 분석하였다.

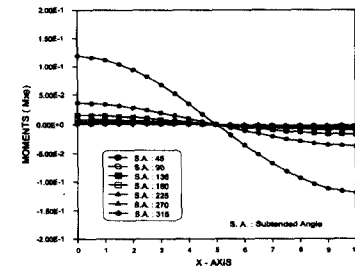


그림 20. $M_{X\theta}$ 의 X 축상의 분포 ($\theta = 1/4$ 점)

반경방향 처짐은 중심각이 45° 일 경우 가장 크게 나타났으며, 중심각이 증가할수록 감소하고 있음을 알 수 있다. M_x 의 분포는 중심각이 45° 일 경우에는 축의 중앙에서 최대값을 나타내지만 그 외의 중심각에서는 최대값이 X축 중앙에서 벗어난 위치에서 발생함을 알 수 있다. 이는 중심각의 증가에 따른 M_x 의 감소는 X축의 중앙 부위에서 가장 큰 반면 지점부근에서의 모멘트 감소는 적다는 것을 나타낸다. M_θ 의 θ 축상의 분포는 M_x 의 분포와 같은 경향을 나타내지만, 축의 중앙에서의 값의 감소 정도가 작게 나타나고 있음을 알 수 있다. 즉 모멘트의 감소의 정도가 M_x 에 비해 축 전체에 걸쳐 일정하다는 것을 나타낸다. $M_{x\theta}$ 의 분포를 살펴보면 중심각이 45° 일 경우 가장 큰 값을 나타내며, 중심각이 증가함에 따라 크기는 감소하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

원통형 셸은 반경을 크게, 중심각을 매우 작게 하였을 경우 판의 해석이 가능하다. 본 연구에서는 중심각과 반경을 조정하고 재료를 등방성으로 배치한 후 등방성 판의 정확해와 비교하였으며 그 결과 본 연구의 프로그램으로 등방성 판의 해석이 가능하다는 것을 알 수 있다. 또한 등방성 원통형 셸의 중앙 처짐을 범용 유한요소 해석 프로그램인 SAP 2000과 비교한 결과 2.29%의 오차가 발생하였다. 이로서 본 연구의 프로그램이 원통형 셸을 해석하는데 있어서 합리적인 결과를 제공할 수 있을 것으로 판단된다.

보강섬유의 배치방법에 따른 결과는 보강섬유를 원주방향과 평행하게 배치하였을 경우 높은 강성을 가지며, 각 층의 보강섬유를 동일한 방향으로 배치하였을 때 처짐 및 단면력이 크게 나타남을 알 수 있다. 따라서 각 층의 보강섬유를 동일한 방향으로 배치하는 것 보다 각 층을 다른 각도로 배치하는 것이 유리함을 알 수 있다. 복합 재료를 사용한 원통형 셸의 설계시 위의 보강섬

유 배치에 따른 결과를 고려한다면 보다 가볍고 강도가 높은 원통형 셸을 설계할 수 있을 것이다. 동일한 변장에 대하여 중심각의 변화에 따른 결과는 중심각이 작은 경우보다 큰 경우에 더 높은 강성을 가지는 것으로 나타났다. 이는 중심각이 큰 경우, 원주방향으로 작용하는 Hoop stress (원주응력)의 영향이 더 커지기 때문이라고 판단된다. 이상에서와 같이, 효과적인 원통형 셸의 설계를 위해서는 휨이론에 의거한 지점 부근에서의 상대적으로 큰 모멘트와 원주방향으로 작용하는 원주응력에 대한 영향을 고려해야만 한다는 것을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) A. A. LAKIS and M. SINNO, "Free Vibration of Axisymmetric and Beam-Like Cylindrical Shells, Partially Filled With Liquid," *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 33, pp235-268, 1992
- (2) O. AAMLID and P. G. BERGAN, "Non-linear Analysis of Sandwich Shells," *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 34, pp61-71, 1992
- (3) C. SANSOUR and H. BUFLER, "An Exact Finite Rotation Shell Theory, Its Mixed Variational Formulation and Its Finite Element Implementation," *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 34, pp73-115, 1992
- (4) A. BEAKOU and M. TOURATIER, "A Rectangular Finite Element for Analysing Composite Multilayered Shallow Shells in Statics, Vibration and Buckling," *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 36, pp627-653, 1993
- (5) Kant, T. and M. P. MENON, "Estimation of Interlaminar Stresses in Fibre Reinforced Composite Cylindrical Shells," *Computers & Structures*, Vol. 38, No. 2, pp131-147, 1991
- (6) B. S. K. SUNDARASIVARAO and N.

GANESAN. " Axisymmetric Deformation of Varying Thickness Cylindrical Shell with Various End Conditions, " Computers & Structures, Vol. 38, No. 1, pp63-72, 1991

- (7) K. R. SIVADAS and N. GANESAN, " Asymmetric Vibration Analysis of Thick Composite Circular Cylindrical Shells with Variable Thickness, " Computers & Structures, Vol. 38, No. 5/6, pp627-635, 1991
- (8) K. BHASKAR and T. K. VARADAN, " A Higher-Order Theory for Bending Analysis of Laminated Shells of Revolution, " Computers & Structures, Vol. 40, No. 4, pp815-819, 1991
- (9) M. D. OLSON, " Efficient Modelling of Blast Loaded Stiffened Plate and Cylindrical Shell Structures, " Computers & Structures, Vol. 40, No. 5, pp1139- 1149, 1991
- (10) B. S. K. SUNDARASIVARAO and N. GANESAN, " Deformation of Varying Thickness Composite Cylindrical Shell Subjected to Fluid Loading with Various End Conditions, " Computers & Structures, Vol. 41, No. 1, pp67-74, 1991

(접수일자 : 1998년 11월 2일)

부록 1. 식 (6)의 유도과정

본문 식 (2)의 M_X , M_θ , $M_{X\theta}$ 는 식 (a)와 같으며, 식 (a)와 본문 식 (3)의 휨강도를 이용하여 식 (b)를 유도할 수 있으며 식 (b)의 결과는 식 (c)와 같다.

$$M_X = -D_{11} w_{,XX} + D_{12} \frac{1}{r^2} v_{, \theta} - D_{12} \frac{1}{r^2} w_{, \theta\theta} + D_{16} \frac{1}{r} v_{, X} - 2D_{16} \frac{1}{r} w_{, \theta X} \quad (a1)$$

$$M_\theta = -D_{12} w_{,XX} + D_{22} \frac{1}{r^2} v_{, \theta} - D_{22} \frac{1}{r^2} w_{, \theta\theta}$$

$$+ D_{26} \frac{1}{r} v_{, X} - 2D_{26} \frac{1}{r} w_{, \theta X} \quad (a2)$$

$$M_{X\theta} = -D_{16} w_{,XX} + D_{26} \frac{1}{r^2} v_{, \theta} - D_{26} \frac{1}{r^2} w_{, \theta\theta}$$

$$+ D_{66} \frac{1}{r} v_{, X} - 2D_{66} \frac{1}{r} w_{, \theta X} \quad (a3)$$

$$D_{12}M_X - D_{11}M_\theta =$$

$$- D_{12} D_{11} w_{,XX} + D_{12} D_{12} \frac{1}{r^2} v_{, \theta} - D_{12}^2 \frac{1}{r^2} w_{, \theta\theta} + D_{12} D_{16} \frac{1}{r} v_{, X} - 2 D_{12} D_{16} \frac{1}{r} w_{, \theta X} + D_{11} D_{12} w_{,XX} - D_{11} D_{22} \frac{1}{r^2} v_{, \theta} + D_{11} D_{22} \frac{1}{r^2} w_{, \theta\theta} - D_{11} D_{26} \frac{1}{r} v_{, X} + 2D_{11} D_{26} \frac{1}{r} w_{, \theta X} \quad (b1)$$

$$D_{22}M_X - D_{12}M_\theta =$$

$$- D_{22} D_{11} w_{,XX} + D_{22} D_{12} \frac{1}{r^2} v_{, \theta} - D_{22} D_{12} \frac{1}{r^2} w_{, \theta\theta} + D_{22} D_{16} \frac{1}{r} v_{, X} - 2D_{22} D_{16} \frac{1}{r} w_{, \theta X} + D_{12}^2 w_{,XX} - D_{12} D_{22} \frac{1}{r^2} v_{, \theta} + D_{12} D_{22} \frac{1}{r^2} w_{, \theta\theta} - D_{12} D_{26} \frac{1}{r} v_{, X} + 2D_{12} D_{26} \frac{1}{r} w_{, \theta X} \quad (b2)$$

$$\frac{1}{r^2} w_{, \theta\theta} = \frac{D_{11}M_\theta}{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}} - \frac{D_{12}M_X}{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}} + \frac{1}{r^2} v_{, \theta} + \frac{D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26}}{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}} \frac{1}{r} v_{, X} - \frac{D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26}}{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}} \frac{1}{r} w_{, \theta X} \quad (c1)$$

$$w_{,XX} = \frac{D_{22}M_X}{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}} - \frac{D_{12}M_\theta}{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}} - \frac{D_{16}D_{22} - D_{12}D_{26}}{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}} \frac{1}{r} v_{, X} + \frac{D_{16}D_{22} - D_{12}D_{26}}{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}} \frac{2}{r} w_{, \theta X} \quad (c2)$$

식 (c)를 식 (a3)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 다른 자유도로 표현된 비틀림 모멘트를 구할 수 있다.

$$M_{X\theta} = \eta_1 M_X + \eta_2 M_\theta - \eta_3 \frac{1}{r} v_{, X} + 2\eta_3 \frac{1}{r} w_{, \theta X} \quad (d)$$

$$\text{여기서, } \eta_1 = \frac{D_{16}D_{22} - D_{12}D_{26}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}$$

$$\eta_2 = \frac{D_{11}D_{26} - D_{12}D_{16}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}$$

$$\eta_3 = \eta_1 D_{16} + \eta_2 D_{26} - D_{66}$$

부록 2. 차분상수

$$\Delta X = \frac{L}{N-1}, \quad \Delta\theta = \frac{\theta}{M-1}$$

여기서, L, θ 는 각각 X, θ 축의 길이를 나타내며, N, M 은 각 방향의 분할수를 나타낸다.

$$f_{01} = A_{16} \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X \Delta\theta} \quad f_{02} = A_{11} \frac{1}{\Delta X^2}$$

$$f_{03} = A_{66} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta\theta^2} \quad f_{04} = 2(f_{02} + f_{03})$$

$$f_{05} = (A_{12} + A_{66}) \frac{1}{r} \frac{1}{4\Delta X \Delta\theta}$$

$$f_{06} = A_{16} \frac{1}{\Delta X^2} \quad f_{07} = A_{26} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta\theta^2}$$

$$f_{08} = 2(f_{06} + f_{07}) \quad f_{09} = A_{12} \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X}$$

$$f_{10} = A_{26} \frac{1}{r^2} \frac{1}{2\Delta\theta} \quad f_{11} = A_{26} \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X \Delta\theta}$$

$$f_{12} = (A_{66} - \lambda_3 \frac{1}{r^2}) \frac{1}{\Delta X^2} \quad f_{13} = A_{22} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta\theta^2}$$

$$f_{14} = 2(f_{12} + f_{13}) \quad f_{15} = \lambda_3 \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta X^2 \Delta\theta}$$

$$f_{16} = A_{26} \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X} \quad f_{17} = -2f_{15} - A_{22} \frac{1}{r^2} \frac{1}{2\Delta\theta}$$

$$f_{18} = \lambda_1 \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X} \quad f_{19} = \lambda_2 \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X}$$

$$f_{20} = \frac{1}{r^2} \frac{1}{2\Delta\theta} \quad f_{21} = 4\lambda_3 \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta X^2 \Delta\theta^2}$$

$$f_{22} = f_{21} + A_{22} \frac{1}{r^2} \quad f_{23} = -\lambda_1 \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X \Delta\theta}$$

$$f_{24} = -\frac{1}{\Delta X^2} \quad f_{25} = -\lambda_2 \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X \Delta\theta}$$

$$f_{26} = -\frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta\theta^2} \quad f_{27} = D_{16} \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X}$$

$$f_{28} = D_{12} \frac{1}{r^2} \frac{1}{2\Delta\theta} \quad f_{29} = D_{16} \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X \Delta\theta}$$

$$f_{30} = D_{11} \frac{1}{\Delta X^2} \quad f_{31} = D_{12} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta\theta^2}$$

$$f_{32} = 2(f_{30} + f_{31}) \quad f_{33} = 1$$

$$f_{34} = D_{26} \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X} \quad f_{35} = D_{22} \frac{1}{r^2} \frac{1}{2\Delta\theta}$$

$$f_{36} = D_{26} \frac{1}{r} \frac{1}{2\Delta X \Delta\theta} \quad f_{37} = D_{12} \frac{1}{\Delta X^2}$$

$$f_{38} = D_{22} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta\theta^2}$$

$$f_{39} = 2(f_{37} + f_{38})$$