

비대칭단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 횡-비틀 후좌굴 유한요소해석

Lateral-Torsional Post-Buckling Analyses of Thin-Walled Space Frames with Non-symmetric Sections

박 효 기¹⁾ · 김 성 보²⁾ · 김 문 영³⁾ · 장 승 필⁴⁾

Park, Hyo Gi Kim, Sung Bo Kim, Moon Young Chang, Sung Pil

요 약 : 비대칭단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 횡후좌굴거동을 조사하기 위하여 기하학적 비선형 유한요소 해석법을 제시한다. 대변형효과를 고려한 연속체의 증분평형방정식으로부터, 도심에서 정의되는 뒹(warping)함수를 고려하고 유한한 회전각의 2차항 효과를 포함하는 변위장을 도입하여 초기응력을 받는 박벽 공간뼈대구조의 증분평형방정식을 유도한다. 박벽 공간뼈대구조를 유한요소로 나누고 변위장을 요소변위에 관한 Hermitian 다항식으로 나타내어 이를 평형방정식에 대입함으로써 접선강도행렬을 유도한다. 또한 updated Lagrangian co-rotational formulation에 근거하여, 증분변위로부터 강제회전변위와 순수변형성분을 분리시켜서 강제회전은 요소의 방향변화를 결정하고, 순수변형은 부재력증분을 산정하는 불평형하중 산정법을 제시한다.

ABSTRACT : In order to trace the lateral-torsional post-buckling behaviors of thin-walled space frames with non-symmetric cross sections, a geometrically non-linear finite element formulation is presented by applying incremental equilibrium equations based on the updated Lagrangian formulation and introducing Vlasov's assumption. The improved displacement field for non-symmetric thin-walled cross sections is introduced based on inclusion of second order terms of finite rotations, and the potential energy corresponding to the semitangential rotations and moments is consistently derived. For finite element analysis, tangent stiffness matrices of thin-walled space frame element are derived by using the Hermitian polynomials as shape functions. A co-rotational formulation in order to evaluate the unbalanced loads is presented by separating the rigid body rotations and pure deformations from incremental displacements and evaluating the updated direction cosines and incremental member forces.

핵심용어 : 뒹, 박벽 공간뼈대구조, 횡좌굴, 후좌굴, 비대칭단면

KEYWORDS : Warping, Thin-walled space frame, Lateral buckling, Post-buckling
Semitangential rotation, Semitangential moment, Non-symmetric section

1) 서울대학교 토목공학과 박사과정
2) 충북대학교 토목공학과 전임강사
3) 정회원, 성균관대학교 토목공학과 부교수
4) 정회원, 서울대학교 지구환경시스템공학부 정교수

본 논문에 대한 토의를 1999년 10월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서 론

공간뼈대구조의 좌굴, 대변형 그리고 후좌굴거동을 추적하기 위한 비선형 유한요소이론 및 해석법은 토목, 건축, 기계, 항공 그리고 선체 구조 공학의 여러분야에서 근간을 이루고 있는 연구주제이다. 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석에 관한 연구들은 대체로 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 강도행렬을 산정하는 직선요소와 isoparametric interpolation 함수를 형상함수로 사용하고 강도행렬을 산정할 때 가우스 수치적분법을 적용하는 곡선 보요소로 요약할 수 있다. 직선 보요소는 Wen과 Rahimzadeh⁽¹⁾의 연구, 곡선보 요소는 Bathe와 Bolourchi⁽²⁾의 논문에서 찾아볼 수 있다. Saafan⁽³⁾이 보-기둥 이론을 이용하여 평면뼈대에 대한 강도행렬을 유도하였고 Oran⁽⁴⁾은 이를 평면 및 공간뼈대로 확장시켜서 접선강도행렬을 제시하였다. Meek와 Tan⁽⁵⁾ 그리고 Papadrakakis⁽⁶⁾는 각각 arc-length method와 vector iteration method를 적용하여 공간뼈대구조의 후좌굴해석을 수행하였다. 김과 장^(7,8)은 변위 및 하중중분 알고리즘을 사용하여 강결된 평면뼈대구조의 복잡한 평형경로를 추적하였다.

공간뼈대구조의 3차원 후좌굴 해석시 각 절점은 세 축방향으로 유한한 회전변위를 일으킨다. 이때 방향이 다른 고정된 축들에 대한 회전각(axial rotation)들이 non-commutativity의 성질을 나타낸다. Argyris는 고정된 축에서 정의된 회전각에 근거하여 유한한 각도로 만나는 공간뼈대구조의 후좌굴해석을 수행하면 상당한 오류가 발생한다는 것을 처음으로 지적하였다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 Argyris⁽⁹⁾는 회전각은 commutativity의 성질을 갖는 semitangential rotation으로 정의하고 natural mode formulation을 이용하여 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석법을 개발하였다. Kuo등⁽¹⁰⁾은 유한 회전을 고려하여 공간뼈대의 비선형 해석을 수행하였으며, Kouhia와 Tuomala⁽¹¹⁾는 updated Lagrangian formulation에 근거하여 공간뼈대구조의 기하학적 및 재료적

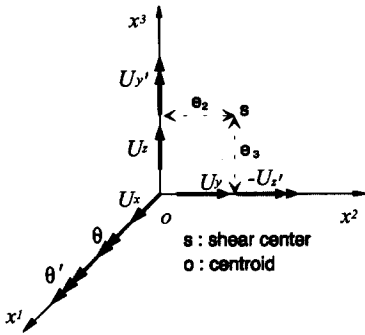
비선형 거동을 조사하였다. 그리고 김과 안⁽¹²⁾은 구속된 비틀을 무시한 경우와 이를 고려한 경우에 박벽 공간뼈대구조의 기하학적인 비선형 유한요소해석법을 제시하였다.

본 논문에서는 비대칭단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 기하학적인 비선형성이 고려될 수 있는 유한요소법을 제시한다. 이를 위하여 탄성 및 기하학적 강도행렬을 산정하고, 변형된 상태에서의 내력을 구하는 불평형하중 산정법을 적용한다. 가상일의 원리를 이용하여 초기응력을 받는 3차원 연속체의 평형방정식으로부터 구속된 뒤틀효과를 고려하고 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 개선된 변위장을 도입하여 비대칭 단면을 갖는 박벽 공간뼈대에 대한 증분 평형방정식을 얻는다. 뼈대구조물을 유한요소로 분할하여 박벽 공간뼈대요소의 변위장을 요소변위벡터에 관한 Hermitian다항식으로 나타내고 이를 평형방정식에 대입함으로써 탄성 및 기하학적 강도행렬을 산정한다. 이때 축방향변위에 대해서는 1차, 횡방향 변위와 비틀각에 대해서는 3차 Hermitian 다항식을 사용한다. 박벽 공간뼈대구조의 횡-비틀좌굴 및 후좌굴 거동에 대한 예제들을 통하여 본 연구의 유한요소해석에 의한 결과와 문헌의 해석결과를 비교 검토함으로써 본 연구에서 제시된 이론 및 방법의 타당성과 유용성을 입증한다.

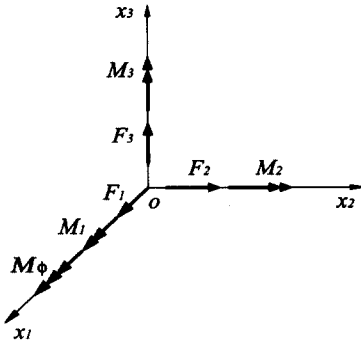
2. 박벽 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소이론

본 장에서는 박벽 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 해석법을 제시하기 위하여, 비대칭단면을 갖는 박벽 공간뼈대요소의 변위장을 도입하여 3차원 연속체의 증분평형방정식으로부터 뼈대요소의 증분방정식을 유도한다. 이때 Hermitian 다항식을 사용하여 구속된 뒤틀효과를 고려하는 박벽 공간뼈대요소의 접선강도행렬을 산정하고, 불평형하중 산정법을 제시한다.

2.1 박벽 공간뺨대요소의 변위파라미터와 단면력



(a) Displacement parameters



(b) Stress resultants

그림 1. Notation for displacement parameters and stress resultants

그림 1a는 도심에서 정의된 부재좌표계 (x_1, x_2, x_3) 에 대하여 비대칭단면을 갖는 박벽 공간뺨대요소의 변위장을 7개의 변위파라미터로 나타낸 것이다. S는 전단중심을 표시하고, x_1 은 도심축, x_2 와 x_3 는 주축을 나타낸다.

U_x, U_y, U_z 는 x_1, x_2, x_3 축방향의 강제이동 변위를, $\theta, -U_z', U_y'$ 은 x_1, x_2, x_3 축에 대한 강제회전변위를 각각 나타낸다. θ' 는 단면의 뒹(warping)변형에 의한 x_1 축 방향으로의 변화율을 나타내는 뒹 파라미터이다. 비대칭 박벽단면의 변위파라미터, 단면계수 그리고 단면력의 변환식을 유도하기 위하여, 전단중심축에서 주축과 평행

한 좌표계 (x_1^s, x_2^s, x_3^s) 를 새로이 도입한다. 도심축에서 전단중심의 좌표를 (e_2, e_3) 로 표시하면 이들 두 좌표계 사이의 변환관계는 다음과 같다.

$$x_2 = x_2^s + e_2 \quad (1a)$$

$$x_3 = x_3^s + e_3 \quad (1b)$$

부재 내 임의의 한 점이 휨과 비틀 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때, 박벽 공간뺨대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = U_x - U_z' x_3 - U_y' x_2 - \theta' \phi \quad (2a)$$

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = U_y - \theta x_3 \quad (2b)$$

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = U_z + \theta x_2 \quad (2c)$$

$$U_1^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}[-\theta U_z' x_2 + \theta U_y' x_3] \quad (3a)$$

$$U_2^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}[-(\theta^2 + U_y'^2)x_2 - U_y' U_z' x_3] \quad (3b)$$

$$U_3^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}[-(\theta^2 + U_z'^2)x_3 - U_z' U_y' x_2] \quad (3c)$$

식 (2)와 식 (3)은 각각 변위파라미터의 1차항과 2차항을 나타낸다. ϕ 는 도심에서, ϕ^s 는 전단중심에서 정의된 뒹함수를 각각 나타내며 이들 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\phi = \phi^s - x_2 e_3 + x_3 e_2 \quad (4)$$

또한, 도심의 주축 x_2, x_3 에서 정의되는 단면상수들은 다음과 같다.

$$I_2 = \int_A x_3^2 dA, \quad I_3 = \int_A x_2^2 dA$$

$$I_{2\phi} = \int_A x_3 \phi dA, I_{3\phi} = \int_A x_2 \phi dA$$

$$I_\phi = \int_A \phi^2 dA \quad (5)$$

이제 식 (4)와 식 (5)를 고려하면, 다음과 같이 두 좌표계에서 정의되는 단면상수 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$I_{3\phi} = -I_3 e_3, \quad I_{2\phi} = I_2 e_2$$

$$I_\phi = I_\phi^e + I_3 e_3^2 + I_2 e_2^2 \quad (6)$$

Vlasov의 가정에 따라 면내변형도($\epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}$)는 무시하고, 면내응력($\tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{23}$)은 영으로 가정한다. 그림 1a의 변위파라미터에 대응하는 단면력은 그림 1b와 같이 나타낼 수 있으며, 이들 단면력에 대한 정의식은 다음과 같다.

$$F_1 = \int_A \tau_{11} dA, \quad F_2 = \int_A \tau_{12} dA$$

$$F_3 = \int_A \tau_{13} dA$$

$$M_1 = \int_A (\tau_{13} x_2 - \tau_{12} x_3) dA$$

$$M_2 = \int_A \tau_{11} \cdot x_3 dA$$

$$M_3 = - \int_A \tau_{11} x_2 dA$$

$$M_\phi = \int \int_A \tau_{11} \phi dA$$

$$M_R = \int_A (\tau_{12} \phi_{,2} + \tau_{13} \phi_{,3}) dA$$

$$M_P = \int_A \tau_{11} (x_2^2 + x_3^2) dA \quad (7)$$

여기서, τ_{ij} 는 응력성분이고 F_1, F_2 그리고 F_3 는 각각 축력과 전단력이다; M_2 와 M_3 는 각각 x_2 와 x_3 축에 대한 휨모멘트이다; M_1 은 x_1

축에 대한 비틀모멘트, M_R 와 M_ϕ 는 각각 x_1 축에 대한 구속된 비틀모멘트와 바이모멘트(Bimoment)이다; M_P 는 임의의 부재축에서 정의된 Wagner effect⁽¹³⁾를 나타내는 단면력이며 전단 중심축에서 정의된 M_P^e 의 결과식⁽¹⁴⁾을 참조하면 다음 식과 같이 표현된다.

$$M_P = \beta_1 F_1 + \beta_2 M_2 + \beta_3 M_3 + \beta_\phi^e M_\phi \quad (8)$$

여기서,

$$\beta_1 = \beta_1^e - e_2^2 - e_3^2 \quad (9a)$$

$$\beta_2 = \beta_2^e + 2e_3 - e_2 \beta_\phi^e \quad (9b)$$

$$\beta_3 = \beta_3^e - 2e_2 - e_3 \beta_\phi^e \quad (9c)$$

또한, 단면력에 대한 정의식에 후크의 법칙을 적용하고, 변위-변형도 관계식에 변위를 대입하여 단면에 대하여 적분을 행하면 다음의 단면력-변위 관계식을 얻을 수 있다.

$$F_1 = EA U_x', \quad F_2 = M_3'$$

$$F_3 = -M_2', \quad M_1 = GJ \theta'$$

$$M_2 = -EI_2 U_z'' - EI_{3\phi} \theta''$$

$$M_3 = EI_3 U_y'' + EI_{2\phi} \theta''$$

$$M_\phi = -EI_{3\phi} U_z'' - EI_{2\phi} U_y'' - EI_\phi \theta'' \quad (10)$$

여기서, EA, EI_2, EI_3, GJ 는 각각 축방향강성, x_2 및 x_3 축방향의 휨강성, 그리고 비틀강성을 의미하며, EI_ϕ 는 휨강성을 나타낸다.

2.2 박벽 공간뼈대요소의 증분 평형방정식 및 접선강도행렬

가상일의 원리를 이용한 3차원 연속체의 증분 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_V {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta {}_t e_{ij} d^t V + \int_V {}_t \tau_{ij} \delta ({}_t \eta_{ij} + {}_t e_{ij}^*) d^t V = {}_t {}^{+d} R - \int_V {}_t \tau_{ij} \delta {}_t e_{ij} d^t V \quad (11)$$

$$\text{여기서, } 2 {}_t e_{ij} = ({}_t U_{i,j} + {}_t U_{j,i}) \quad (12a)$$

$$2 {}_t \eta_{ij} = ({}_t U_{k,i} \cdot {}_t U_{k,j}) \quad (12b)$$

$$2 {}_t e_{ij}^* = ({}_t U_{i,i}^* + {}_t U_{j,i}^*) \quad (12c)$$

이고 ${}_t \tau_{ij}$ 는 시간 t 에서의 Cauchy stress를 나타낸다. ${}_t U_i$ 는 변위벡터성분이다. U_i 와 U_i^* 는 증분변위를 구성하며, 이 두 벡터성분은 각각 단면의 유한한 회전으로 인한 변위파라미터의 1차 및 2차항을 나타낸다. 박벽보의 변위장을 나타내는 식 (2)와 식 (3)을 식 (11)에 대입하고 식 (7)의 단면력에 대한 정의를 고려하면 식 (11)의 첫 번째와 두 번째 항은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta {}_t e_{ij} d^t V = \frac{1}{2} \delta \int [(EA U_x'^2 + EI_3 U_y''^2 + EI_2 U_z''^2 + GJ \theta'^2 + EI_\phi \theta''^2 + 2EI_{3\phi} \theta'' U_y'' + 2EI_{2\phi} \theta'' U_z'')] d^t x_1 \quad (13a)$$

$$\int {}_t \tau_{ij} \delta ({}_t \eta_{ij} + {}_t e_{ij}^*) d^t V = \frac{1}{2} \delta \int [{}^t F_1 (U_y'^2 + U_z'^2) + {}^t M_P \theta'^2 + {}^t F_2 U_z' \theta - {}^t F_3 U_y' \theta + {}^t M_1 (U_z' U_y'' - U_z'' U_y') + {}^t M_2 U_y'' \theta - U_y' \theta') + {}^t M_3 (U_z'' \theta - U_z' \theta')] d^t x_1 \quad (13b)$$

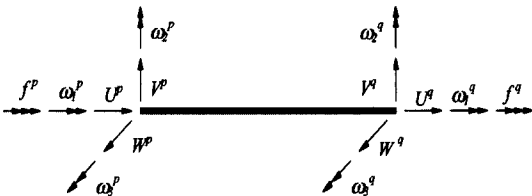


그림 2. Member displacement vector

표 1. 14×14 접선강도행렬 ${}^t K_e$

a_1	$-a_1$
a_2	.	e	v	b_1	$-f$.	$-a_2$.	k	$-v$	b_1	s	.	.
a_3	e'	$-b_2$	v	$-f'$.	.	$-a_3$	k'	$-b_2$	$-v$	s'	.	.	.
m	$-i'$	i	$-nn'$.	$-e$	$-e'$	$-m$	$-g'$	g	n
c_2	.	h'	.	$-v$	b_2	ii'	d_2	w	$-j'$
c_1	$-h$.	$-b_1$	$-v$	$-ii'$	$-w$	d_1	j
				o	.	f	f'	nn	$-t'$	t	p	.	.	.
												a_1	.	.
													a_2	.
														$-k$
														v
														$-b_1$
														$-s$
														a_3
														$-k'$
														b_2
														v
														$-s'$
														m
														x'
														$-x$
														n
														c_2
														u'
														c_1
														$-u$
														oo

$$a_1 = EA/L, a_2 = -6F_1^p / (5L) + 12 EI_3 / L^3$$

$$a_3 = -6F_1^q / (5L) + 12 EI_2 / L^3$$

$$b_1 = -F_1^p / 10 + 6 EI_3 / L^2$$

$$b_2 = -F_1^q / 10 + 6 EI_2 / L^2$$

$$c_1 = -2F_1^p L / 15 + 4 EI_3 / L$$

$$c_2 = -2F_1^q L / 15 + 4 EI_2 / L$$

$$d_1 = F_1^p L / 30 + 2 EI_3 / L$$

$$d_2 = F_1^q L / 30 + 2 EI_2 / L$$

$$e = (11 M_2^p - M_2^q) / (10L) + 12 EI_{3\phi} / L^3$$

$$f = M_2^p / 10 + 6 EI_{3\phi} / L^2$$

$$g = (2M_2^p + M_2^q) / 10 + 6 EI_{3\phi} / L^2$$

$$h = L(3M_2^p - M_2^q) / 30 + 4 EI_{3\phi} / L$$

$$i = (2M_2^p - M_2^q) / 5 + 6 EI_{3\phi} / L^2$$

$$ii = (-M_2^p - 2M_2^q) / 10 + 6 EI_{3\phi} / L^2$$

$$j = LM_2^p / 30 - 2 EI_{3\phi} / L$$

$$k = -(M_2^p - 11 M_2^q) / (10L) - 12 EI_{3\phi} / L^3$$

$$m = 3(-M_2^p + M_2^q) / (5L) + 12 EI_{\phi} / L^3 + 6GJ / 5L$$

$$n = (M_2^p) / 10 - 6 EI_{\phi} / L^2 - GJ / 10$$

$$nn = (M_2^q) / 10 + 6 EI_{\phi} / L^2 + GJ / 10$$

$$o = L(-3M_2^p + M_2^q) / 30 + 4 EI_{\phi} / L + 2L \cdot GJ / 15$$

$$oo = L(-M_2^p + 3M_2^q) / 30 + 4 EI_{\phi} / L + 2L \cdot GJ / 15$$

$$p = L(M_2^p - M_2^q) / 60 + 2 EI_{\phi} / L - L \cdot GJ / 30$$

$$s = M_2^q/10 - 6EI_{3\phi}/L^2 \quad t = -LM_2^q/30 - 2EI_{3\phi}/L$$

$$u = L(M_2^p - 3M_2^q)/30 + 4EI_{3\phi}/L, \quad v = -M_1^p/L$$

$$w = -M_1^p/2, \quad x = [M_2^p - 2M_2^q]/5 + 6EI_{3\phi}/L^2$$

여기서 (e', f', g', h', i', ii', j', k', s', t', u', x')은 (e, f, g, h, i, ii, j, k, s, t, u, x)의 (M₂^p, M₂^q, I_{3φ})를 (M₃^p, M₃^q, I_{2φ})으로 대체시킴으로써 얻을 수 있다.

그림 2는 구속된 뒀을 고려한 박벽 공간뼈대요소의 부재변위벡터를 표시한 것이다. 박벽보의 임의 점의 변위를 부재변위로 나타내기 위해서는 요소의 변형을 적절히 나타낼 수 있는 형상함수를 선택하여야 한다. 본 논문에서 축방향변위는 선형변화로 가정하여 1차 Hermitian 다항식을 사용하고, 휨거동에 의한 횡방향 처짐과 비틀회전각은 3차 Hermitian 다항식을 사용한다. 이러한 사항들을 고려하면 박벽 공간뼈대요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다.

$$U_x = (1 - \beta) \cdot U^p + \beta \cdot U^q, \quad \beta = x_1/L \quad (14a)$$

$$U_y = h_1 \cdot V^p + h_2 \cdot L \cdot \omega_3^p + h_3 \cdot V^q + h_4 \cdot L \cdot \omega_3^q \quad (14b)$$

$$U_z = h_1 \cdot W^p - h_2 \cdot L \cdot \omega_2^p + h_3 \cdot W^q - h_4 \cdot L \cdot \omega_2^q \quad (14c)$$

$$\theta = h_1 \cdot \omega_1^p - h_2 \cdot L \cdot f^p + h_3 \cdot \omega_1^q - h_4 \cdot L \cdot f^q \quad (14d)$$

여기서, h_i는 3차 Hermitian 다항식을 나타낸다. 식 (14)를 식 (13)에 대입하여 적분을 행하면 증분평형방정식 (11)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta U_e^T {}^t K_e U_e = {}^{t+\Delta t} R - \delta U_e^T {}^t F_e \quad (15)$$

$$U_e = \langle U^p, V^p, W^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, U^q, V^q, W^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q \rangle \quad (16a)$$

$${}^t F_e = \langle {}^t F_1^p, {}^t F_2^p, {}^t F_3^p, {}^t M_1^p, {}^t M_2^p, {}^t M_3^p, M_\phi^p, {}^t F_1^q, {}^t F_2^q, {}^t F_3^q, {}^t M_1^q, {}^t M_2^q, {}^t M_3^q, M_\phi^q \rangle \quad (16b)$$

여기서 {}^t K_e는 부재좌표계에서 14 × 14 접선강도행렬을 나타낸다. 이 강도행렬의 자세한 결과는 표 1에 제시하였다. U_e와 {}^t F_e은 각각 구속된 뒀을 고려한 부재좌표계에서의 증분변위 및 부재력벡터를 나타내고, < >는 열벡터를 의미한다.

2.3 박벽 공간뼈대구조의 불평형하중 산정

구조물의 기하학적 비선형 해석시 변형된 상태에 대응하는 부재력을 정확히 산정하는 것이 매우 중요하다. 이를 위하여 updated Lagrangian co-rotational formulation에서는 구조물 평형방정식으로부터 산정한 부재의 증분변위 U_e에서 강제변위 U_r와 순수변형성분 U_d을 분리시키는 것이 필요하다. 이를 식으로 나타내면 식 (17)과 같다.

$$U_t = \langle U_r ; U_d \rangle \quad (17a)$$

$$U_r = \langle u_r, v_r, w_r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$$

$$U_d = \langle u, \theta_{13}, \theta_{23}, \theta_{12}, \theta_{22}, \omega, f^p, f^q \rangle \quad (17b)$$

여기서 < u_r, v_r, w_r >과 < γ₁, γ₂, γ₃ >는 각각 강제이동 및 회전변위를 나타내며, 식 (17)의 각 항들은 아래의 식으로 산정한다.

$$u_r = (U^p + U^q)/2 \quad v_r = (V^p + V^q)/2$$

$$w_r = (W^p + W^q)/2 \quad (18a)$$

$$\gamma_1 = (\omega_1^q + \omega_1^p)/2 \quad \gamma_2 = -(W^q - W^p)/L$$

$$\gamma_3 = (V^q - V^p)/L \quad (18b)$$

$$u = U^q - U^p \quad \omega = \omega_1^q - \omega_1^p$$

$$f^p = f^p \quad f^q = f^q \quad (18c)$$

$$\theta_{12} = \omega_2^p - \gamma_2 \quad \theta_{22} = \omega_2^q - \gamma_2$$

$$\theta_{13} = \omega_3^p - \gamma_3 \quad \theta_{23} = \omega_3^q - \gamma_3 \quad (18d)$$

여기서 $\theta_{13}, \theta_{23}, \theta_{12}, \theta_{22}$ 는 그림 3에서 보는 바와 같이 재단회전각증분이며 ω 는 부재양단의 상대적인 비틀림각증분을 나타낸다 그리고 u 는 상대적인 축방향변위증분을 나타내며 f^p 와 f^q 는 각각 바이모멘트(Bimoment)에 의한 부재양단의 비틀림각증분을 나타낸다.

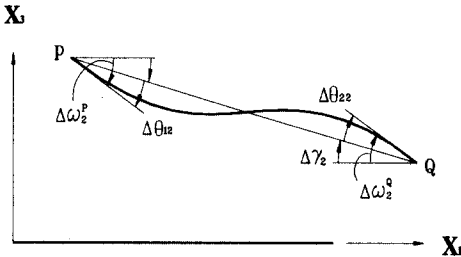
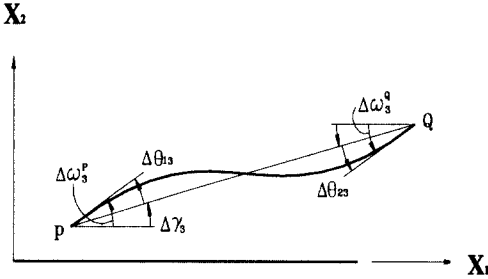


그림 3. Pure deformations of the beam projection on the x_1 - x_2 and x_1 - x_3 plane

부재좌표계에서 식 (18)를 정리하면 증분변위 U_e 와 U_t 의 관계식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_e = A_e \cdot U_t \quad (19)$$

여기서 A_e 는 적합행렬을 나타내며 자세한 결과

식은 표 2에 제시하였다.

표 2. 14×14 적합행렬 A_e

1	·	·	·	·	·	$-\frac{1}{2}$	·	·	·	·	·	·	·	·
·	1	·	·	·	$-\frac{1}{2}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	1	·	$\frac{1}{2}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	$-\frac{1}{2}$	·	·	·	·
·	·	·	·	1	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	1	·	1	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·
1	·	·	·	·	$\frac{1}{2}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	1	·	·	·	$L/2$	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	1	·	$-\frac{1}{2}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	$\frac{1}{2}$	·	·	·
·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·
·	·	·	·	·	1	·	·	1	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1

표 3. 14×14 점선강도행렬 $'K_t$

·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	$-l'$	l	·	i	ii	$-i'$	$-ii'$	·	·	·	·
·	·	·	·	$-l'$	a_1	·	w	$-w$	·	·	$-k'$	·	·	·
·	·	·	·	l	a_1	·	·	$-w$	w	k	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	a_2	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	i	w	·	c_1	d_1	$-w$	$-y$	$-h$	j	·	·
·	·	·	·	ii	$-w$	·	d_1	c_1	w	·	$-z$	t	$-u$	·
·	·	·	·	$-i'$	$-w$	·	·	w	c_2	d_2	y'	h'	$-j'$	·
·	·	·	·	$-ii'$	w	·	$-w$	·	d_2	c_2	z'	$-t'$	u'	·
·	·	·	·	·	$-k'$	k	$-y$	$-z$	y'	z'	m	nn	$-n$	·
·	·	·	·	·	·	·	$-h$	t	h'	$-t'$	nn	o	p	·
·	·	·	·	·	·	·	j	$-u$	$-j'$	u'	$-n$	p	oo	·

$$a_1 = -F_1^p L \quad a_2 = EA/L$$

$$c_1 = -2F_1^p L/15 + 4EI_3/L$$

$$c_2 = -2F_1^p L/15 + 4EI_2/L$$

$$d_1 = F_1^p L/30 + 2EI_3/L \quad d_2 = F_1^p L/30 + 2EI_2/L$$

$$h = L(3M_2^p - M_2^q)/30 + 4EI_{3\phi}/L$$

$$i = M_2^p / 2 \quad ii = M_2^q / 2$$

$$j = LM_2^p / 30 - 2EI_{3\phi} / L \quad k = 5(M_2^p - M_2^q) / 20$$

$$l = -(M_2^p + M_2^q) / 2$$

$$m = 3(-M_2^p + M_2^q) / (5L) + 12EI_{\phi} / L^3 + 6GJ / 5L$$

$$n = (M_2^p) / 10 - 6EI_{\phi} / L^2 - GJ / 10$$

$$nm = (M_2^q) / 10 + 6EI_{\phi} / L^2 + GJ / 10$$

$$o = L(-3M_2^p + M_2^q) / 30 + 4EI_{\phi} / L + 2L \cdot GJ / 15$$

$$oo = L(-M_2^p + 3M_2^q) / 30 + 4EI_{\phi} / L + 2L \cdot GJ / 15$$

$$p = L(M_2^p - M_2^q) / 60 + 2EI_{\phi} / L - L \cdot GJ / 30$$

$$t = -L M_2^q / 30 - 2EI_{3\phi} / L$$

$$u = L(M_2^p - 3M_2^q) / 30 + 4EI_{3\phi} / L$$

$$w = -M_1^p / 2$$

$$y = (3M_2^p - 4M_2^q) / 20 + 6EI_{3\phi} / L^2$$

$$z = (4M_2^p - 3M_2^q) / 20 + 6EI_{3\phi} / L^2$$

여기서 (h', i', ii', j', k', l', t', u', y', z')은 (h, i, ii, j, k, l, t, u, y, z)의 (M_2^p , M_2^q , $I_{3\phi}$)를 (M_3^p , M_3^q , $I_{2\phi}$)으로 대체시킴으로써 얻을 수 있다.

식 (19)를 식 (15)에 대입하면 아래와 같이 증분 변위 U_t 에 대응하는 접선강도행렬 $'K_t$ 를 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta U_e^T 'K_e U_e &= \delta U_t^T (A_e^T 'K_e A_e) U_t \\ &= \delta U_t^T 'K_t U_t \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 $'K_t$ 의 구체적인 계산 결과식은 표 3에 제시하였다. $'K_t$ 의 순수변형에 대응하는 8×8 행렬을 $'K_{td}$ (표 3에서 상자로 표시된 부분)로 나타내면, 부재력증분은 다음과 같이 얻는다.

$$K_{td} \cdot U_d = F_d \quad (21a)$$

$$F_d = \langle F, M_{13}, M_{23}, M_{12}, M_{22}, M_1, M_2^p, M_2^q \rangle \quad (21b)$$

여기서 순수변형벡터 U_d 의 축방향변형 u 는 휨 및 비틀변형으로 인한 축방향으로의 상대적인 길이의 변화에 대응하는 변위성분을 나타내는 Bowing 효과를 고려하여 아래와 같이 수정한 식을 사용한다.

$$u = U^o - U^p + \delta \quad (22a)$$

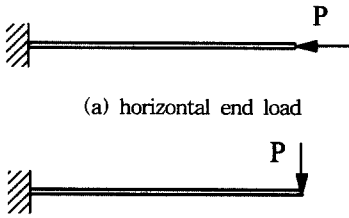
$$\begin{aligned} \delta &= (\theta_{12}^2 + \theta_{22}^2 + \theta_{13}^2 + \theta_{23}^2) \frac{L}{15} \\ &\quad - (\theta_{12}\theta_{22} + \theta_{13}\theta_{23}) \frac{L}{30} + \frac{(I_2 + I_3)\omega^2}{2A} \end{aligned} \quad (22b)$$

박벽 공간뼈대구조의 증분평형방정식에 대한 식 (15)을 전체좌표계로 좌표변환시키고 직접강도법을 적용하면 구조물전체의 증분방정식을 얻을 수 있다. 전체좌표계에서 증분평형방정식으로부터 증분변위가 구해지면, 각 부재에 대하여 부재력 증분을 산정하고 불평형하중을 결정하게 된다. 이때 증분형식의 반복계산법을 사용하는 경우, 불평형하중은 다음의 반복계산에서는 하중으로 작용한다.

3. 수치해석 예

본 논문에서 제시된 비선형 유한요소이론을 적용하여 구속된 뒤틀효과를 고려하는 박벽 공간 뼈대구조에 대하여 기하학적 비선형해석을 수행한다. 일축대칭 및 비대칭 단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조에 대하여 안정성해석(선형좌굴해석)과 기하학적 비선형해석(후좌굴해석)을 수행하기 위한 유한요소해석 프로그램을 개발하였다. 본 연구에서 개발된 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 8 절점 ABAQUS 쉘요소⁽¹⁵⁾를 이용하여 해석한 결과와 본 연구에 의한 수치해석 결과들을 비교 검토한다.

3.1 직선 캔틸레버의 횡좌굴

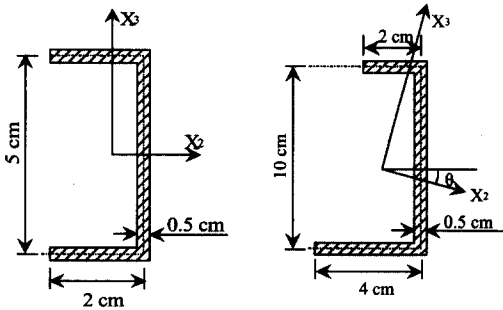


(a) horizontal end load



(b) vertical end load

그림 4. Lateral-torsional buckling of straight cantilever under end load



(a) Type A

(b) Type B

$$\begin{aligned}
 A &= 4.5 \text{ cm}^2, & E &= 30,000 \text{ N/cm}^2, & G &= 11,500 \text{ N/cm}^2 \\
 J &= 0.375 \text{ cm}^4, & e_2 &= 1.15033 \text{ cm}, & I_2 &= 17.7500 \text{ cm}^4 \\
 I_3 &= 1.82986 \text{ cm}^4, & I_4 &= 31.33086 \text{ cm}^6, & I_{\theta 2} &= -20.41830 \text{ cm}^5 \\
 \beta_1 &= 4.35108 \text{ cm}^2, & \beta_3 &= -0.33038 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

(c) Section properties of Type A

$$\begin{aligned}
 A &= 8.0 \text{ cm}^2, & E &= 30,000 \text{ N/cm}^2, & G &= 11,500 \text{ N/cm}^2 \\
 J &= 0.6667 \text{ cm}^4, & e_2 &= 1.5894 \text{ cm}, & e_3 &= 2.5723 \text{ cm} \\
 I_2 &= 114.821 \text{ cm}^4, & I_3 &= 7.6048 \text{ cm}^4, & I_4 &= 411.32 \text{ cm}^6 \\
 I_{\theta 2} &= 182.4822 \text{ cm}^5, & I_{\theta 3} &= 19.5618 \text{ cm}^5, & \theta &= 0.10906 \text{ rad} \\
 \beta_1 &= 6.1592 \text{ cm}^2, & \beta_2 &= 0.5171 \text{ cm}, & \beta_3 &= 7.8811 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

(d) Section properties of Type B

그림 5. Section properties of monosymmetric and unsymmetric channel section

그림 4(a)와 그림 4(b)는 각각 캔틸레버 끝단의 수평하중과 수직하중에 의해 횡-비틀좌굴을 일으키는 길이가 200cm인 직선 캔틸레버구조를 나타낸 것이다. 20개의 직선유한요소로 분할하여, 일축 대칭인 채널 단면과 비대칭 채널 단면을 갖는 직선 캔틸레버구조의 횡-비틀좌굴해석을 수행하였다. 해석에 사용된 재료의 성질 및 단면 제원은 그림 5와 같다. 표 4는 일축대칭 단면을 갖는 직선 캔틸레버의 좌굴하중에 대한 본 연구의 수치해석 결과와 8 절점 ABAQUS 셸요소를 이용한 해석 결과를 나타낸다. 두 결과가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

표 4. Lateral buckling loads of monosymmetric thin-walled straight cantilever

buckling loads	thin-walled straight beam	ABAQUS(shell element)
$(P_x)_{cr}$	3.2971	3.4193
$(P_y)_{cr}$	1.6324	1.6220

그림 6(a)는 일축 대칭단면의 경우에 횡방향으로 $P_x/1000$ 와 수평하중 P_x 를 받는 직선 캔틸레버구조의 후좌굴거동을 추적한 해석결과(수평하중

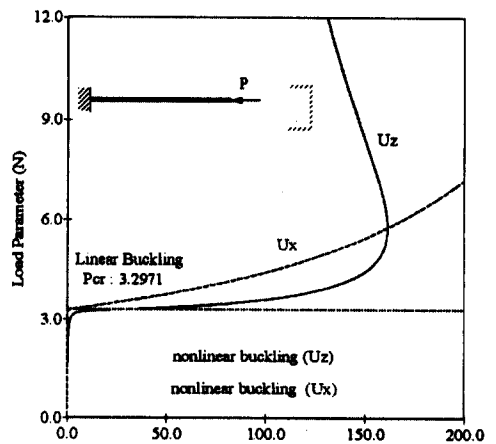


그림 6(a). Lateral buckling of straight cantilever under horizontal end load. Load-displacement diagram

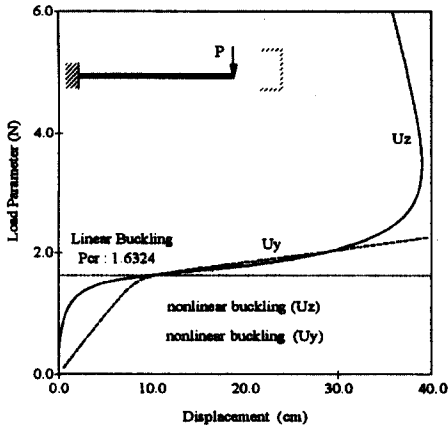


그림 6(b). Lateral buckling of straight cantilever under vertical end load. Load-displacement diagram

P_x 와 횡변위 U_z 및 수평변위 U_x 의 관계곡선)와 선형 횡좌굴해석에 의해 얻은 임계하중값을 함께 나타낸 것이다. 직선 캔틸레버부재가 압축력을 받으므로 임계하중값 근처에서 좌굴이 발생하여 과도한 수평변위를 일으키며, 이 후에 하중이 급격히 증가하는 후좌굴거동을 관찰할 수 있다.

또한, 그림 6(b)는 일축 대칭 단면에 대해서 횡방향으로 $P_y/1000$ 와 수직하중 P_y 를 받는 직선 캔틸레버구조의 후좌굴거동을 추적한 해석결과(수직하중 P_y 와 횡변위 U_z 및 수직변위 U_y 의 관계곡선)를 나타낸 것이다. 이 예제의 경우 직선 캔틸레버구조에 수직하중을 가하므로, 변위가 발생하면서 부재가 선형좌굴하중값 보다 약간 작은 값에서 좌굴이 발생하여 과도한 횡변위가 발생하며 수직변위 U_y 는 선형좌굴하중값 근처에서 급격히 변위가 증가함을 보여준다.

표 5는 비대칭 단면을 갖는 직선 캔틸레버의 좌굴하중에 대한 본 논문의 수치해석 결과와 8절점 ABAQUS 셸요소를 이용한 해석 결과를 나타낸다. 일축대칭 단면의 경우와 같이 ABAQUS의 해석 결과는 본 논문의 수치해석결과와 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

표 5. Lateral-torsional buckling loads of unsymmetrical thin-walled straight cantilever

buckling loads	thin-walled straight beam	ABAQUS(shell element)
$(P_x)_{cr}$	13.9043	14.023
$(P_y)_{cr}$	4.1154	4.1086

그림 7(a)는 비대칭 단면의 경우 횡방향으로 $P_x/1000$ 와 수평하중 P_x 를 받는 직선 캔틸레버구조의 후좌굴거동을 추적한 해석결과와 선형 횡좌굴하중을 함께 나타낸 것이다. 이 예제도 그림 6(a)와 유사하게 직선 캔틸레버부재가 압축력을 받음으로써 임계하중값 근처에서 좌굴이 발생하여 과도한 수평변위를 일으키는 후좌굴거동을 관찰할 수 있다.

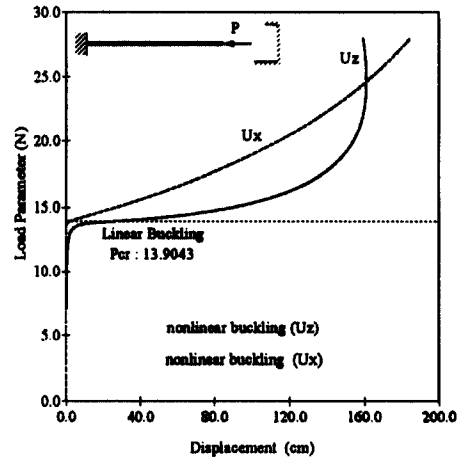


그림 7(a). Lateral buckling of straight cantilever under horizontal end load. Load-displacement diagram

그림 7(b)는 비대칭 단면에 대해서 횡방향으로 $P_y/1000$ 와 수직하중 P_y 를 받는 직선 캔틸레버구조의 후좌굴거동을 추적한 해석결과를 나타낸 것이다. 수직하중이 비대칭 단면의 도심에 작용하므로 비대칭 단면인 경우 도심과 전단중심간의 거리차이로 인한 모멘트가 전단중심에서 작용하는

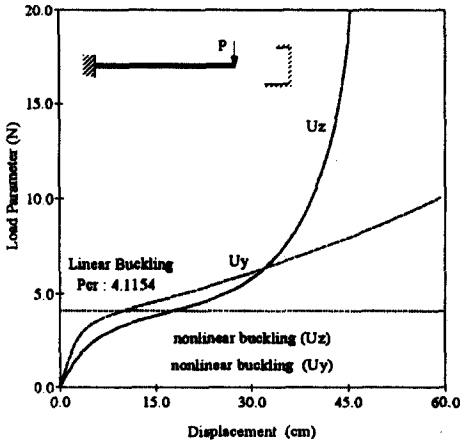


그림 7(b). Lateral buckling of straight cantilever under vertical end load. Load-displacement diagram

수직하중의 경우와 다르게 추가적으로 발생한다. 비대칭 단면의 경우 초기하중상태에서부터 비틀 작용을 받게 되고 후좌굴 거동도 그 영향을 받아 선형 좌굴하중값보다 작은 값에서 좌굴현상을 보이며 전체적인 후좌굴 거동에 비틀이 크게 영향을 주는 것으로 판단된다. 수직변위 U_y 도 횡 변위와 마찬가지로 선형좌굴하중값 보다 작은 값에서 변위가 증가함을 알 수 있다.

3.2 곡선 캔틸레버의 횡좌굴

그림 8(a)와 그림 8(b)는 각각 캔틸레버 끝단의 수평하중과 수직하중에 의해 횡좌굴을 일으키는

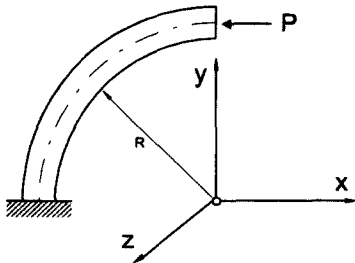


그림 8(a). Lateral buckling of curved cantilever under horizontal end load

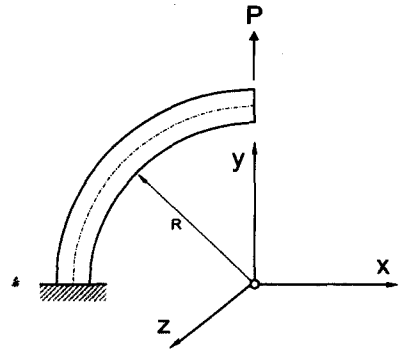


그림 8(b). Lateral buckling of curved cantilever under vertical end load

곡선 캔틸레버구조를 나타낸 것이다. 50개의 직선 유한요소로 분할하여 해석하였으며, 해석에 사용된 재료의 성질 및 단면제원은 3.1절의 직선 캔틸레버의 해석에서 사용한 것과 동일한 일축대칭 채널 단면과 비대칭 채널 단면을 선택하였다.(그림 5 참조)

표 6은 일축대칭 단면을 갖는 곡선 캔틸레버의 좌굴하중에 대한 본 논문의 수치해석 결과와 8절점 ABAQUS 셸요소를 이용한 해석 결과를 나타낸다. 수평하중 P_x 와 수직하중 P_y 에 대한 임계하중값이 모두 ABAQUS의 해석 결과보다 다소 크게 나타나지만, 비교적 본 연구의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

표 6. Lateral buckling loads of monosymmetric thin-walled curved cantilever

buckling loads	thin-wallded straight beam	ABAQUS(shell element)
$(P_x)_{cr}$	0.6193	0.5912
$(P_y)_{cr}$	1.6288	1.5531

그림 9(a)는 일축대칭 단면인 경우 횡방향으로 $P_x/1000$ 와 수평하중 P_x 를 받는 곡선 캔틸레버 구조의 후좌굴거동을 추적한 해석결과를 나타낸 것이다. 곡선 캔틸레버부재가 압축력을 받음으로써 임계하중값 근처에서 좌굴이 발생하여 과도한

수평변위를 일으키며, 이 후에 하중이 급격히 증가하는 전형적인 후좌굴거동을 관찰할 수 있다. 또한, 그림 9(b)는 일축대칭 단면에 대해 횡방향으로 $P_y/1000$ 와 수직하중 P_y 를 받는 곡선 캔틸레버구조의 후좌굴거동을 추적한 해석결과를 나타낸 것이다. 앞의 예와는 달리 곡선 캔틸레버구조에 수직하중을 가하므로, 변위가 발생하면서 부재가 선형좌굴하중값 보다 약간 작은 값에서 좌굴이 발생하여 과도한 횡변위가 발생하는 후좌굴

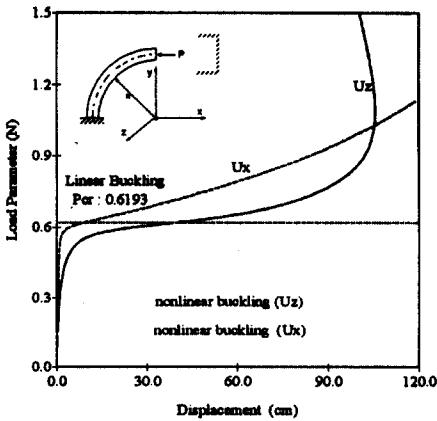


그림 9(a). Lateral buckling of curved cantilever under horizontal end load. Load-displacement diagram

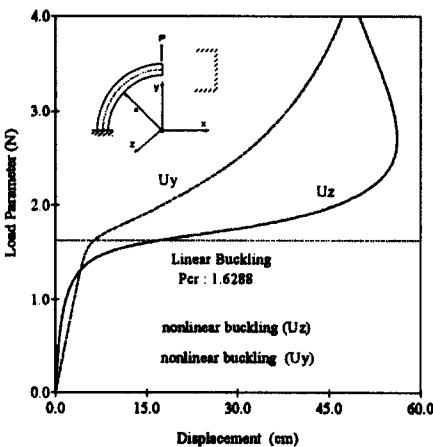


그림 9(b). Lateral buckling of curved cantilever under vertical end load. Load-displacement diagram

거동을 나타낸다. 수직변위 U_y 는 수직하중 P_y 을 받는 직선 캔틸레버구조에서의 후좌굴 거동과 비슷하게 선형좌굴하중값 근처에서 급격히 변위가 증가함을 알 수 있다.

4. 결론

비대칭단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 안정성 및 기하학적 비선형해석을 수행하기 위하여 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 개선된 변위장을 도입하여 구속된 뒤틀효과를 고려하는 박벽 공간뼈대구조에 대한 비선형 유한요소법을 제시하였다. 그리고 제시된 이론 및 방법의 타당성을 입증하기 위하여, 박벽 공간뼈대구조의 횡방향 후좌굴거동을 해석하고 문헌의 해석결과와 비교, 검토하였다. 결론적으로 본 연구에서 제시한 기하학적 비선형 유한요소법을 이용하면 비대칭단면을 갖는 임의의 직선 및 곡선형상을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 횡-비틀 후좌굴해석이 가능하다고 판단된다.

감사의 말

본 연구는 포항제철 석좌교수 연구기금의 지원에 의해 수행되었으며 저자는 이에 깊은 감사를 표합니다.

참고문헌

- (1) R. K. Wen and J. Rahimzadeh, "Nonlinear elastic frame analysis by finite element", J. Struct. Eng., ASCE, Vol. 109, 1983, pp 1952-1971.
- (2) K. J. Bathe, and S. Bolourchi, "Large displacement analysis three-dimensional beam structures", Internat. J. Numer. Meths. Eng., Vol. 14, 1979, pp961-986.
- (3) S. A. Saafan, "Non-linear behavior of structural plane frames", J. Struct. Engrg., ASCE, Vol.

- 89 1963, pp557-579.
- (4) C. Oran, "Tangent stiffness in plane frames", J. Struct. Eng., ASCE, Vol. 99 1973, pp 973-985.
- (5) J. L. Meek and H. S. Tan, "Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. Vol. 47, 1984, pp261-282.
- (6) M. Papadrakakis, "Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods", Computers & Structures, Vol. 14, 1981, pp393-402.
- (7) 김문영, 장승필, "전단변형을 고려한 평면뼈대 구조물의 기하적인 비선형 해석", 대한토목학회 논문집, 제10권 제1호, 1990, pp27-36.
- (8) 김문영, 장승필, "보존력 및 비보존력을 받는 구조물의 기하적 비선형 유한요소해석을 위한 하중 및 변위증분 알고리즘의 개발", 대한토목학회 논문집, 제10권 제2호, 1990, pp11-22.
- (9) J. H. Argyris, P. C. Dunne and D. W. Scharpf, "On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 14, 1979, pp401-451.
- (10) Kuo, S. R., Yang, Y. B., and Chou, J. H. "Nonlinear analysis of space frames with finite rotations.", J. Struct. Engrg., ASCE, Vol. 119(1), 1993, pp1-15.
- (11) Kouhia, R. and Tuomala, M. "Static and dynamic analysis of space frames using simple Timoshenko type element." Int. J. Numer. Methods Engrg., Vol. 33, 1993, pp1189-1221.
- (12) 김문영, 안성원, "박벽 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제10권 제1호, 1997, pp201-211.
- (13) W. F. Chen and T. Atsuta, "Theory of beam columns", Vol. 2, McGraw-Hill, Inc., NewYork, 1977, pp54-57.
- (14) M. Y. Kim, S. P. Chang and S. B. Kim, "Spatial stability analysis of thin-walled space frames", Internat. J. Numer. Meths. Eng., Vol.39, 1996, pp499-525.
- (15) ABAQUS, User's Manual Vol. I and Vol. II, Ver.5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1992

(접수일자 : 1998년 12월 9일)