

# 전단변형을 고려한 비등방성 원통형 쉘의 해석

## Analysis of Anisotropic Laminated Cylindrical Shells with Shear Deformation

장 석 윤<sup>1)</sup>

*Chang, Suk Yoon*

요 약 : 복합재료를 사용한 비등방성 원통형 쉘 구조형식은 단일소재의 재료역학적인 단점을 극복할 수 있다. 본 연구의 목적은 1차전단변형효과가 고려된 비등방성 원통형 쉘을 해석하는 것이다. 전단변형효과가 고려된 원통형 쉘의 거동은 기존의 고전적인 해와 길이-두께비에 따라 상당한 거동의 차이를 보이므로 이러한 전단변형효과와 고찰은 매우 중요하다고 사료된다. 또한 본 연구는 유한요소법에 근간한 상용 공학프로그램인 ANSYS와 본 연구의 프로그램결과를 비교, 검증하였으며, 비등방성 원통형 쉘의 중심각의 변화, 화이버의 보강각도 변화, 탄성계수비의 변화 등에 따른 쉘의 처짐 및 단면력을 분석하였다. 본 논문에서 사용한 유한차분법에 의한 해는 기존의 해석적인 방법으로는 해석하기 어려운 보다 다양하고 복잡한 조건을 갖는 문제에 대하여 보다 정확한 해를 얻을 수 있다. 따라서 본 논문에서 제시한 유한차분법을 이용한 다양한 비등방성 원통형 쉘의 해석결과는 복합 신소재를 사용하는 쉘 구조체의 실용화에 앞서 다양한 기준을 제시할 수 있을 것으로 판단된다.

ABSTRACT : The shell structures with composite materials have the advantages in strength, corrosion resistance, and weight reduction. The objective of this study is to analyze anisotropic composite circular cylindrical shells with shear deformation theory. In applying numerical methods to solve differential equations of anisotropic shells, this paper use finite difference method. The accuracy of the numerical method can be improved by taking higher order of interval  $\Delta$  to reduce error. This study compares the results of finite difference method with the results of ANSYS based on finite element method. Several numerical examples show the advantages of the stiffness increasement when the composite materials are used. Therefore, it is expected that results of this study give various guides for change of the subtended angles, load cases, boundary conditions, and side-to-thickness ratio.

핵심용어 : 1차전단변형이론, 원통형 쉘, 유한차분법

KEYWORDS : first shear deformation theory, cylindrical shells, finite difference method

1) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2000년 2월 29일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

## 1. 서론

두가지 이상의 재료를 사용한 비등방성 쉘 구조 형식은 단일재료보다 유리한 역학적 특성으로 인하여 국내외로 다양한 연구가 진행되고 있다. 복합재료를 사용한 쉘 구조물은 아직 국내에서 적용되지 않고 있으나 선진국의 경우 토목구조물에서 유용하게 적용하고 있는 실정이다. 따라서 본 연구에서는 이러한 복합 쉘형식의 실용화에 앞서 전단변형효과가 고려된 비등방성 원통형 쉘에 대한 해석을 통하여 다양한 기준을 제시할 수 있을 것으로 판단된다.

본 연구에서 사용한 수치해석기법은 유한차분법이다. 유한차분법은 일반적인 연속 고체형태의 구조체의 모델링에 수치해석기법이다. 이러한 유한차분법에 의한 결과는 기존의 제한적인 경우에만 적용할 수 있는 해석적인 방법에 의한 해보다 다양한 하중조건 및 경계조건에서 해를 제공할 수 있는 장점을 가지고 있다. 본 논문의 경계조건은 원주방향으로는 단순지지되어 있고, 수평방향으로는 고정지지된 경우이다. 이때 단순지지된 경계에서는 처짐은 발생하지 않으나 처짐각은 발생하므로 유한차분법의 적용시 처짐각에 대한 가상점의 발생이 야기되므로 가상점의 처리가 필요하게 된다. 따라서 본 논문은 단순지지 경계점에서 처짐각에 대한 가상점을 응력과 변위의 관계에 의하여 소거하여 내부점만의 식으로 치환하는 방법으로 경계조건을 해결하였다. 이러한 가상점의 처리는 단순지거나 자유단을 갖는 경우 다소 수식상의 난해함을 가지고 있으나 경계에서의 응력과 변위의 관계를 만족시키는 역학적 개념을 수식으로 유도하여 대입하므로 정해에 가까운 수렴성을 제공하게 된다. 또한 본 논문 프로그램은 유한요소해에 근간한 공학용 상용프로그램인 ANSYS와 결과를 비교, 검증하였다. 또한 본 논문은 쉘의 길이-두께비의 변화에 따른 처짐의 변화를 분석함으로써 전단변형으로 인한 거동의 차이를 규명하였다. 이밖에 비등방성 원통형 쉘에 대한 하중조건에 따른 형상 변화, 화이버 보강각도의 변화, 중

심각의 변화에 따른 처짐 및 단면력의 다양한 결과를 분석함으로써 복합 신소재로 이루어진 원통형 쉘의 거동에 대한 다양한 기준을 제시하고자 하였다.

## 2. 기본이론

본 연구에서는 일차전단변형효과를 고려한 부분 원통형 쉘의 평형방정식을 벡터장에서 유도하기 위하여 쉘의 변위 및 단면력에 대한 정의 및 방향을 그림 1과 같이 나타내었다. 여기서, 변형률과 변위와의 관계를 행렬식으로 나타내면 식 (1)과 같다.

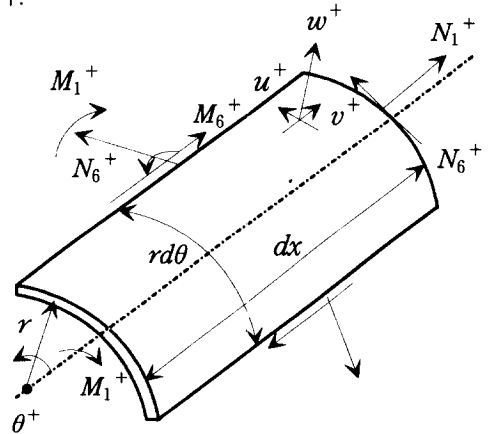


그림 1. 원통형 쉘 요소의 단면력과 변위 및 방향

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_6 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

그림 1과 같은 쉘 요소의 변위 및 단면력으로

부터 벡터장에서 쉘의 기본방정식을 유도할 수 있다. 원주 및 수평방향으로 각 힘의 합력을 0으로 놓고 정리하면 식 (2)와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} &= -q_x \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{r} &= -q_\theta \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_\theta}{r} &= -q_\theta \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_x &= -m_x \\ \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta &= -m_\theta \end{aligned} \quad (2)$$

식(2)는 일반화 원통셸의 평형방정식을 나타낸 것이다. 여기서,  $(N_i, M_i)$ 은 힘과 모멘트의 합을,  $Q_i$ 는 수직 전단력을 각각 나타낸다. 한편, 비등방성 적층 쉘 요소의 힘과 모멘트  $(N_i, M_i)$ 와 변형도의 관계는 식(3)과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_i \\ M_i \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} \sigma_i^{(k)} dz \\ &= \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_j \\ \chi_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (3)$$

여기서,

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (1, z, z^2) C_{ij}^{(k)} dz, \quad (i, j=1, 2, 6)$$

이고, 이것은 각각 면내력강도, 휨-면내력 연계강도, 휨강도를 의미한다. 또한,  $\sigma_i^{(k)}$ 는 k번째 층에서 각각의 응력 성분을 나타내고,  $C_{ij}^{(k)}$ 는 k번째 층에서 강성계수를 나타낸다. 전단력  $Q_i$ 은 식 (4)와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서,

$$A_{ij} = K_{ij} \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} dz \quad (i, j=4, 5)$$

이고,  $K_{ij}$ 는 전단보정계수를,  $Q_{ij}^{(k)}$ 는 적층요소에서 구조축에서의 재료의 강성을 나타낸다. 식 (4)를 원통셸의 변형도-변위의 관계식에 대입하면 일반화 비등방성 적층셸 요소의 변위항에 대한 2계편 미분방정식 형태의 평형방정식이 만들어지게 된다. 자세한 식은 부록에 나타났다. 이러한 미분방정식 형태의 평형방정식은 유한차분법을 도입하기 위한 형태로서 유용하게 사용된다.<sup>(2)</sup>

### 3. 유한차분법의 적용

유한차분법은 적층판이나 또는 쉘의 기본방정식을 효과적으로 근사화시키는 수치해석기법으로서 비교적 훌륭한 수렴성과 결과치의 안정성을 제공하고 있다. 또한 유한차분법은 기본방정식을 수학적인 근사방법으로 간편하게 변환하여 정리할 수 있으므로 판이나 쉘과 같은 연속적인 편미분방정식을 기본방정식으로 갖는 구조체의 해석 시 편리한 수치해석 기법이다. 본 연구에서 해석하고자 하는 원통셸의 경계조건은 생성된 방향으로는 단 순지지되어 있고 수평방향으로는 고정지지되어 있는 경우이다. 단 순지지되어 있는 경우, 쉘의 경계점에서는 처짐각이 발생하게 된다. 따라서 이러한 경계점에 대해 중앙차분법을 적용하는 경우 처짐각에 대한 가상점이 발생하게 된다. 이러한 가상점은 경계에서의 변위 및 응력의 관계에 의하여 소거할 수 있다. 먼저 모멘트와 변위과의 관계에서 차분식을 적용한다. 이때 모멘트에 대한 중앙차분식에서 처짐각에 대한 가상점이 발생하게 되며, 여기서 발생하는 처짐각에 관한 가상점인  $\psi_{1(i-1,j)}$ 에 대하여 식을 정리하면 식 (5)와 같다.

$$\psi_{1(i-1,j)} = -[2\Delta x] M_{1(i,j)} \cdot \frac{1}{D_{11}}$$



모델은 물성이 복잡하고 기하학적 형상특성으로 인하여 정확해를 얻기가 불가능하므로 해의 결과 비교 및 검증을 위하여 유한요소법을 사용하여 구성된 상용프로그램인 ANSYS와 비교하였다.

유한차분법을 이용한 수치해석은 기본방정식을 수학적으로 직접 풀어내는 근사방법이므로 유한요소법과 그 시작부터가 달라 직접적으로 비교할 수는 없으나 본 논문의 해석모델인 쉘의 경우 기존에 해석적인 방법으로 해를 구할 수 없으므로 해석의 타당성을 검증하기 위하여 ANSYS의 중앙처짐값만을 비교하였다.

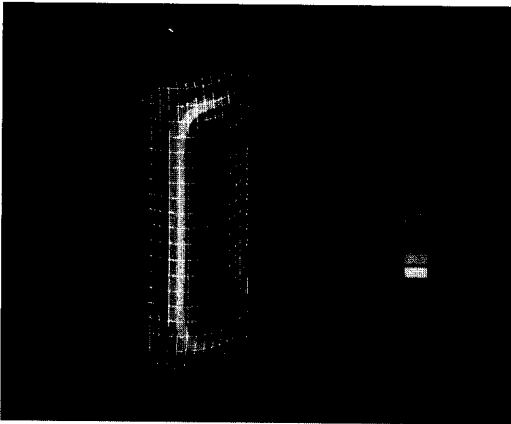


그림 3. ANSYS를 이용한 원통형 쉘의 해석

표 1. ANSYS와의 결과비교

분할수 (FDM)	중앙처짐	분할수 (FDM)	중앙처짐
9×9	0.1217756	21×21	0.1403234
11×11	0.1289027	25×25	0.1416959
13×13	0.1332359	29×29	0.1425619
15×15	0.1360358	33×33	0.1431430
17×17	0.1379470	39×39	0.1437116
19×19	0.1393122	45×45	0.1440728
ANSYS 결과		0.1443441	

본 연구에서는 ANSYS 5.3 프로그램을 사용하여 ISOTROPIC SHELL99 ELEMENT, ELE

-MENT당 8개의 노드, 중심각은 120도, 길이-두께의 비를 1/10, 프아송비는 0.25으로 비교하였다. 그림 3은 ANSYS프로그램을 사용하여 원통형 쉘을 모델링한 화면을 나타낸 것이다. 또한 FDM을 이용한 본 연구의 원통형 쉘의 중앙처짐과 ANSYS에 의하여 모델링한 원통형 쉘의 중앙처짐을 무차원화하여 비교하여 표 1에 나타냈다. 표 1에서 ANSYS의 원통형 쉘은 21×21의 절점을 가지며, 같은 분할절점수를 갖는 경우 절대적인 비교는 될 수 없으나 유한차분법에 의한 처짐값이 약간 작은 것으로 나타났다.

#### 4.2 전단변형효과

쉘의 길이-두께비의 변화에 따른 처짐의 변화는 전단변형을 고려함으로써 발생하게 된다. 이러한 전단변형으로 인한 거동은 쉘의 두께가 증가할수록 상당한 차이를 가져오게 된다. 따라서 이러한 전단변형으로 인한 처짐의 차이와 폭-두께비와의 관계에 대한 고찰은 상당히 중요한 의미를 갖는다고 사료된다.

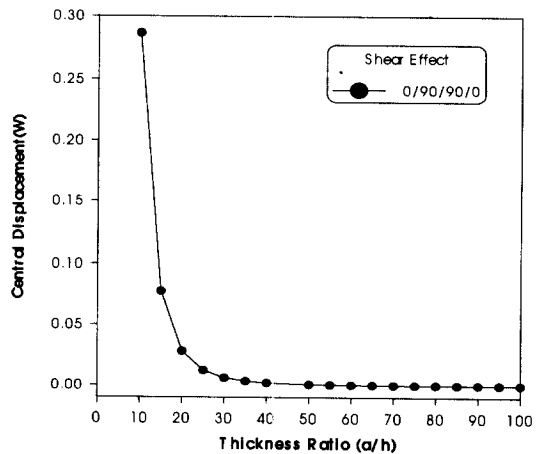


그림 4. 폭-두께비의 변화에 따른 원통형 쉘의 전단변형효과

그림 4는 길이-두께비의 변화에 따른 원통형 쉘의 처짐을 무차원량으로 나타낸 것이다. 사용한

원통형 셸은  $0/90/90/0$ ,  $E_1/E_2=25$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$ ,  $G_{23} = 0.2E_2$ 이고 프아송비는 0.25이다. 또한, 셸의 길이 대 두께의 비율을  $1/10 \sim 1/100$ 으로 변화시켰다. 적층 상태는  $0/90/90/0$ 의 직교하는 방향으로 보강한 경우이다.

그림에서와 같이 원통셸은 폭-두께비가 클수록, 셸의 두께가 두꺼울수록, 전단변형에 의한 처짐의 증가를 보이며, 길이-두께비가 작을수록 원통 셸은 처짐이 감소하여 일정해진다는 것을 알 수 있다.

### 4.3 화이버의 보강각도에 대한 분석

본 절에서는 화이버의 보강각도에 따른 원통형 셸의 거동을 분석하였다.

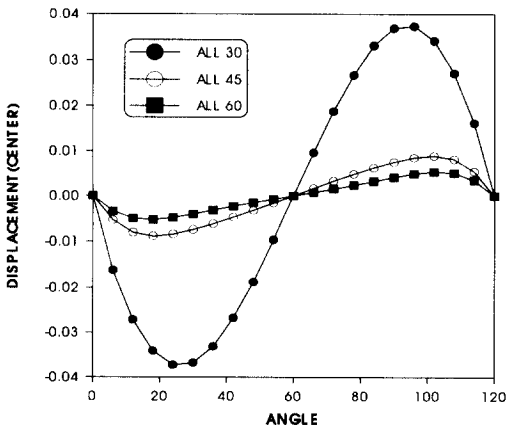


그림 5. 일방향으로 보강한 경우에 대한 셸 중앙에서의 원주방향으로의 처짐 U

그림 5는 일방향으로 보강한 경우에 대한 셸 중앙에서의 원주방향으로의 처짐 U를 무차원화하여 나타낸 것이다. 여기서, 부분 폐합된 셸의 중심각은 120도이며 보강각은  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ 로 일방향으로 보강된 경우이다. 그림 5에서와 같이 역대칭의 형상을 나타내며 보강각이 커질수록 처짐은 점차 감소하는 것을 알 수 있다.

그림 6은 동일한 물성을 가진 원통셸에 대하여 일방향으로 보강한 경우에 대한 셸 중앙에서의 원주방향으로의 처짐 w를 나타낸 것이다.

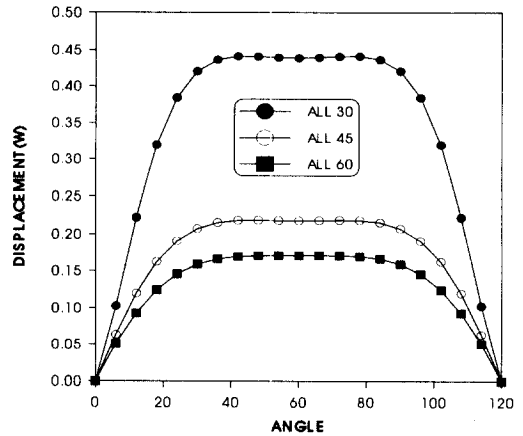


그림 6. 일방향으로 보강한 경우에 대한 셸 중앙에서의 원주방향으로의 처짐 w

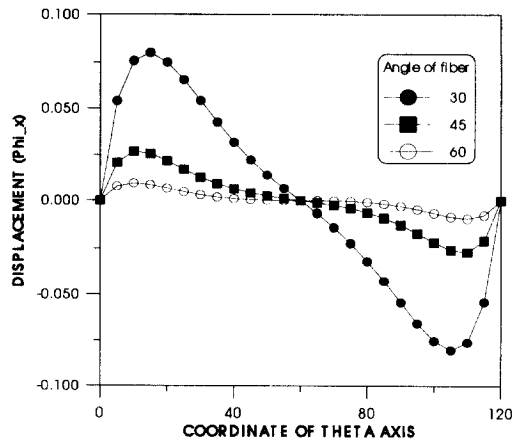


그림 7. 일방향으로 보강한 경우에 대한 셸 중앙에서의 수평방향으로의 처짐  $\phi_x$

그림 7은 일방향으로 보강한 경우에 대한 셸 중앙에서의 원주방향으로의 처짐  $\phi_x$ 를 나타낸 것이다. 그림과 같이 일방향으로 보강한 각도가 증가할수록 처짐값은 상대적으로 감소한다는 것을 알 수 있다.

그림 8은 직교하는 방향으로 보강한 경우에 대한 원주 방향으로는  $m_x$ 를 나타낸 것이며, 그림 9는 직교하는 방향으로 보강한 경우에 대한 수평방향으로의  $m_{x0}$ 를 X축 1/4지점에서 나타낸 것이

다. 그림에서 보는 바와 같이 직교하는 방향으로 보강하는 경우에도 보강각에 따라 단면력의 차이가 발생함을 알 수 있다. 그림과 같이 직교하는 방향으로 보강하는 경우에 대하여 0/90/90/0나 90/0/0/90인 경우가 다른 각도로의 직교보강보다 상대적으로 작은 모멘트를 가지는 것으로 나타났다. 따라서 이러한 경우에는 0/90/90/0나 90/0/0/90로 보강하는 것이 다소 유리하다고 판단된다.

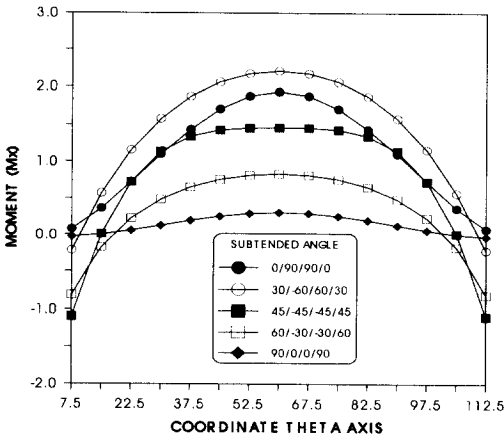


그림 8. 직교하는 방향으로 보강한 경우에 대한 원주 방향으로의  $m_x$

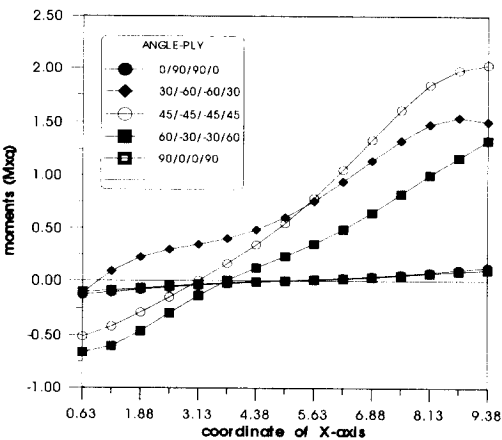


그림 9. 직교하는 방향으로 보강한 경우에 대한 수평방향으로의 X축 1/4지점에서의  $m_{x\theta}$

#### 4.4 중심각의 변화에 대한 분석

이 절에서는 원통형 쉘의 중심각의 변화에 따른 거동을 분석하였다. 원통형 쉘의 중심각의 변화는 쉘의 형상변화를 의미하며 이에 따른 비등방성 쉘의 거동에는 다소 차이가 있을 것으로 예상된다. 본 연구에서는 쉘의 중심각 변화를  $0^\circ \sim 360^\circ$ 로 각각  $45^\circ$ 씩 증가시켰을 경우 각 경우에 대한 처짐 및 단면력을 분석하였다.

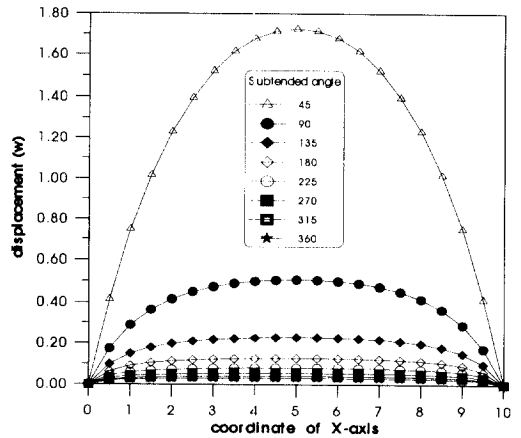


그림 10. 중심각의 변화에 따른 쉘의 수평방향 중앙부에서의 처짐  $w$

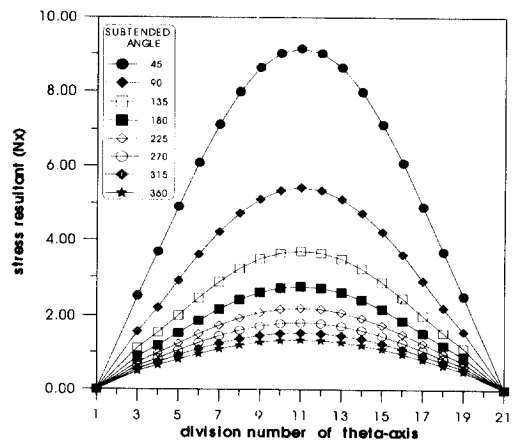


그림 11. 중심각의 변화에 따른 쉘의 원주방향 중앙부에서의 단면력 ( $N_x$ )

먼저 그림 10은 쉘의 중심각의 변화에 따른 중앙부에서의 처짐  $w$ 를 나타낸 것이다. 이때의 적층은 0/90/90/0인 경우이다. 그림에서와 같이 중심각이 45도인 경우에 대하여 가장 큰 처짐이 발생하며 중심각을 증가시킬 경우 처짐은 일정한 비율로 감소하였다.

그림 11은 중심각의 변화에 따른 쉘의 원주방향 중앙부에서의 단면력  $N_x$ 를 나타낸 것이고 그림 12는 중심각의 변화에 따른 쉘의 수평방향 중앙부에서의 단면력  $N_{x\theta}$ 을 나타낸 것이다.

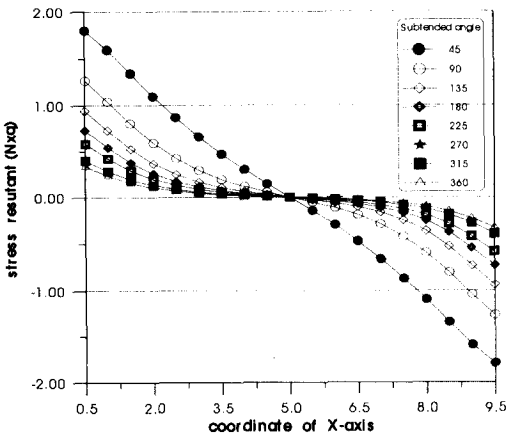


그림 12. 중심각의 변화에 따른 쉘의 수평방향 중앙부에서의 단면력 ( $N_{x\theta}$ )

그림 13은 중심각의 변화에 따른 쉘의 원주 방향 중앙부에서 모멘트  $M_\theta$ 를 나타낸 것으로서 쉘의 중심각이 90도 이상부터는 모멘트의 차이가 거의 발생하지 않는다는 것을 알 수 있다.

그림 14는 중심각의 변화에 따른 쉘의 원주방향 중앙부에서 단면력  $Q_\theta$ 를 나타낸 것으로 모멘트와 유사하게 중심각이 90도 이상인 경우부터 단면력의 차이가 거의 발생하지 않음을 알 수 있다.

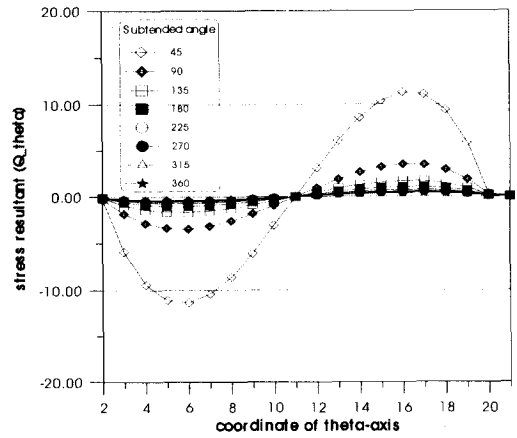


그림 14. 중심각의 변화에 따른 쉘의 원주방향 중앙부에서의 단면력 ( $Q_\theta$ )

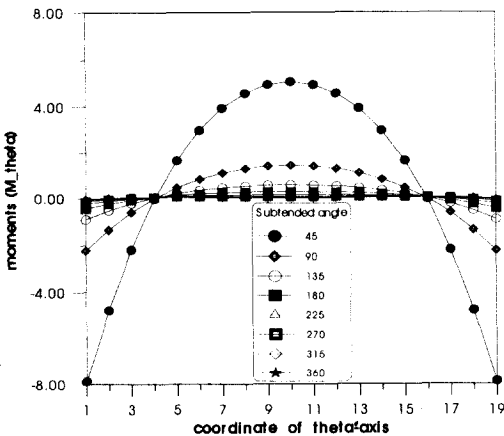
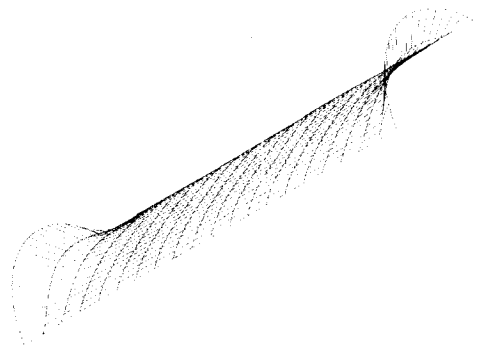


그림 13. 중심각의 변화에 따른 쉘의 원주 방향 중앙부에서의 모멘트 ( $M_\theta$ )

#### 4.5 하중 조건의 변화에 따른 원통형 쉘의 처짐 형상

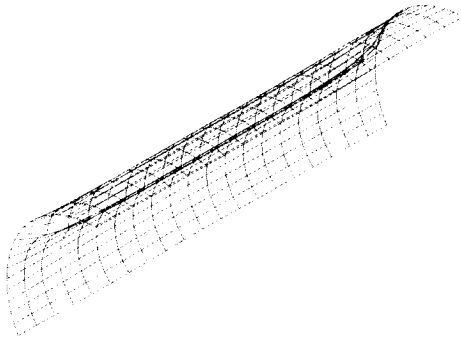


(a) 등분포하중인 경우

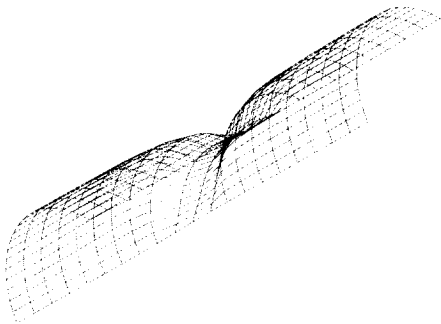


이 절에서는 하중조건을 변화시켰을 경우, 원통셀의 처짐형상을 그림으로 나타내었다. 그림 15는 다양한 하중조건에 따른 원통셀의 변위형상을 나타낸 것으로 물성은 앞의 예제와 같고 적층형태는 0/90/90/0, 중심각은 120도이다.

그림 15-(a)는 등분포하중이 재하된 경우로서 처짐 형상은 중앙부에서 최대처짐이 발생하나 큰 차이는 없으며 전체적으로 비슷한 처짐형상을 나타냈다.



(b) 중앙부 수평방향으로 선하중이 재하된 경우



(c) 중앙부 원주방향으로 선하중이 재하된 경우

그림 15. 다양한 하중조건에 따른 원통형 셀의 변위 형상

그림 15-(b)는 수평방향으로 중앙부에 선하중이 재하된 경우이며 그림 15-(c)는 원주방향으로 중앙부에 선하중이 재하된 경우의 처짐 형상이다. 셀의 처짐형상은 셀의 길이비, 적층형태, 두께, 경계조건, 중심각 등에 따라 매우 다양한 형태를 보였으며 이에 대한 좀더 다양한 해석이 필요하다고 사료된다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 전단변형을 고려한 비등방성 원통형 셀의 거동을 분석하였다. 본 논문에서 사용한 경계조건은 원주방향으로 단순지지 되어 있으므로 유한차분법의 적용시 처짐각에 대한 가상점이 발생하게 된다. 본 논문에서는 이러한 가상점을 모멘트와 변위와의 관계식에 의하여 내부점으로 치환함으로써 해결하였다. 이러한 역학관계에 의한 수식을 유도하는 방식은 다양한 경계조건에 대하여 정확한 해석이 가능할 것으로 사료된다. 또한 본 논문 프로그램은 유한요소법에 근간한 상용프로그램 ANSYS와 비교하여 타당성을 검증하였다. 유한차분법과 유한요소법은 각각 장단점을 가지고 있으나 판이나 셸과 같은 Solid형태의 요소는 모델링과 해석기법이 유한요소법에 비하여 비교적 용이하다고 판단된다. 본 논문은 전단변형에 의한 처짐효과를 고려한 것으로 축-두께비의 변화에 따른 처짐변화를 분석하였다. 결과에 의하면 셸의 두께가 두꺼워질수록 전단변형에 의한 처짐은 증가하나 셸의 두께가 얇아질수록 처짐은 감소하여 약 1/50이상부터는 고전적인 판이론의 해와 거의 일치함을 보였다.

보강각도에 따른 분석에서는 일방향 보강과 직교하는 방향으로 보강한 경우에 대한 처짐 및 단면력을 나타내었다. 일방향으로 보강한 경우, 보강각도가 증가할수록 처짐의 크기도 감소하며 직교하는 방향으로 보강하는 경우, 직교하는 각도에 따라 다소 큰 처짐과 단면력의 차이를 보였다. 이러한 경우에는 0/90/90/0이나 90/0/0/90으로 보강하는 것이 구조적으로 다소 유리하다고 판단된다.

셀의 중심각의 변화에 따른 분석에서는 셀의 중심각의 변화에 따른 처짐과 단면력의 변화경향을 분석한 것이다. 결과적으로 중심각은 90~135도 이상에서는 처짐이나 단면력의 변화가 거의 없음을 알 수 있었다. 따라서 원통형 셀 구조에서 90도이상으로 중심각을 설정한다면 구조적으로 비교적 안정적일 것으로 판단된다. 그러나 중심각의

변화에 따른 처짐과 단면력의 해석은 좀더 다양한 물성에 대하여 해석할 필요가 있다. 이러한 본 논문에서 제시한 다양한 해석결과는 복합신소재의 토목구조물에 대한 효과적 적용에 앞서 다양한 설계기준을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

### 감사의 말

본 연구는 1998년도 서울시립대학교 연구교수 선정에 따라 지원된 연구비로 수행되었으므로 이에 감사드립니다.

(접수일자 : 1999년 1월 28일)

### 참 고 문 헌

- (1) 장석윤, 이상범, 채상윤, "A study of Anisotropic Tube under Arbitrary Loads," Pacific Structural Steel Conference (1998), pp109~114.
- (2) 최삼열, "비등방성 원통형 적층셸의 해석," 서울시립대학교 석사학위논문, 1994.2
- (3) 이상열, 임성순, 장석윤 "유한차분법을 이용한 복합적층원형 곡선요소의 평면응력 문제연구," 한국강구조학회 논문집 제 9권 1호 (1997), pp65~79
- (4) ANSYS. INC. "ANSYS ELEMENT REFERENCE RELEASE 5.3," 1994
- (5) Jack R. Vinson, "Composite Materials and Their Use in Structures," Applied Science Publishers LTD. 1975
- (6) N. Ahmed, " On the Axisymmetric Vibrations of Orthotropic Cylindrical and Conical Shells, " Ph.D. Dissertation, Cornell University, 1967
- (7) E. H. Baker, L. Kovalevsky and F. L.Rish, " Structural Analysis of Shells, " McGraw-Hill, 1972
- (8) Szilard, R. , "Theory and Analysis of Plates, " Prentice-hall, inc.. 1974.
- (9) Dhatt, G. ,and Touzot, G , "The Finite Element Method Displayed," John

Wiley&Sons, 1982, pp207-230.

- (10) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger," Theory of Plates and Shells," 2nd Edition, New York, Mcgraw-Hill, 1961, pp364-425.
- (11) Al-khafaji, A. W. and Tooley, J. R. "Numerical Methods in Engineering Practice, "Holt, Rinehart and Winston, inc., 1986, pp342-370.

### 부 록

#### A. 원통형 셸의 평형방정식

##### 1) 첫번째 평형방정식

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2A_{16}}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{66}}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \\
 & + A_{16} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{66}}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\
 & + \frac{A_{26}}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{A_{26}}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \\
 & + B_{11} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{2B_{16}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{B_{66}}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} \\
 & + B_{16} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{B_{66}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial \theta} \\
 & + \frac{B_{26}}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \theta^2} = -q_x
 \end{aligned}$$

##### 2) 두번째 평형방정식

$$\begin{aligned}
 & A_{16} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{66}}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{26}}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \\
 & + A_{66} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{2A_{26}}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - A_{44} \frac{V}{R^2} \\
 & + \frac{A_{26}}{R} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{A_{45}}{R} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{A_{44}}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_{16} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{B_{66}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \theta} \\
& + \frac{B_{26}}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} + A_{45} \frac{\Phi_1}{R} + B_{66} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{2B_{26}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial \theta} \\
& + \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \theta^2} + A_{44} \frac{\Phi_2}{R} = -q_\theta
\end{aligned}$$

### 3) 세번째 평형방정식

$$\begin{aligned}
& - \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{A_{26}}{R^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\
& - \frac{A_{26}}{R} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{A_{45}}{R} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{A_{44}}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\
& + A_{55} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{2A_{45}}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{44}}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - A_{22} \frac{W}{R^2} \\
& + A_{55} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{A_{45}}{R} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} - \frac{B_{26}}{R^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\
& + A_{45} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{B_{26}}{R} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{A_{44}}{R} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} - \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \\
& = -q_z
\end{aligned}$$

### 4) 네번째 평형방정식

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2B_{16}}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{B_{66}}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \\
& + B_{16} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{B_{66}}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + A_{45} \frac{V}{R} \\
& + \frac{B_{26}}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial W}{\partial x} - A_{55} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{B_{26}}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \\
& - \frac{A_{45}}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} + D_{11} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{2D_{16}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \theta} \\
& + \frac{D_{66}}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} - A_{55} \Phi_1 + D_{16} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial \theta} \\
& + \frac{D_{66}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{D_{26}}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \theta^2} - A_{45} \Phi_2 = -m_x
\end{aligned}$$

### 5) 다섯번째 평형방정식

$$B_{16} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{B_{66}}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{B_{26}}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

$$\begin{aligned}
& + B_{66} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{2B_{26}}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + A_{44} \frac{V}{R} \\
& + \frac{B_{26}}{R} \frac{\partial W}{\partial x} - A_{45} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{A_{44}}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{D_{66}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \theta} \\
& + \frac{D_{26}}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} - A_{45} \Phi_1 + D_{66} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{2D_{26}}{R} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial \theta} \\
& + \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \theta^2} - A_{44} \Phi_2 = -m_\theta
\end{aligned}$$

## B. 평형방정식의 중앙차분

다음은 원통형 쉘의 5개 평형방정식을 중앙차분을 행렬식으로 표현한 것이다. 아래 행렬식에서 Fd1은  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 의  $\Delta^2$  오차항을 갖는 중앙차분을 의미하며, Fd2는  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$ 의 중앙차분을, Fd3는  $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 의 중앙차분을, 그리고 Fd4와 Fd5는 각각  $x$ 와  $\theta$ 에 대한 1차 미분의 중앙차분에 해당한다.

### 1) $q_x$ 에 대한 방정식의 중앙차분

		Fd1	Fd2	Fd3	Fd4	Fd5
U	$ \left[ \begin{array}{ccccc} A_{11} & \frac{2A_{16}}{R} & \frac{A_{66}}{R^2} & 0 & 0 \\ A_{16} & \frac{A_{12}}{R} & \frac{A_{26}}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{12}}{R} & \frac{A_{26}}{R^2} \\ B_{11} & \frac{2B_{12}}{R} & \frac{B_{66}}{R^2} & 0 & 0 \\ B_{16} & \frac{B_{12}}{R} & \frac{B_{26}}{R^2} & 0 & 0 \\ \end{array} \right] $					
V						
W						
$\Phi_1$						
$\Phi_2$						

2)  $q_\theta$ 에 대한 방정식의 중앙차분

$$\begin{array}{c}
 U \\
 V \\
 W \\
 \phi_1 \\
 \phi_2
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 Fd1 & Fd2 & Fd3 & Fd4 & Fd5 \\
 A_{16} & \frac{A_{12}}{R} + \frac{A_{66}}{R} & \frac{A_{26}}{R^2} & 0 & 0 \\
 A_{66} & \frac{2A_{26}}{R} & \frac{A_{22}}{R^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{A_{26}}{R} + \frac{A_{45}}{R} & \frac{A_{22}}{R^2} + \frac{A_{44}}{R^2} \\
 B_{16} & \frac{B_{12}}{R} + \frac{B_{66}}{R} & \frac{B_{26}}{R^2} & 0 & 0 \\
 B_{66} & \frac{2B_{26}}{R} & \frac{B_{22}}{R^2} & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$- A_{44} \frac{v}{R^2} + A_{45} \frac{\phi_1}{R} + A_{44} \frac{\phi_2}{R}$$

4)  $m_x$ 에 대한 방정식의 중앙차분

$$\begin{array}{c}
 U \\
 V \\
 W \\
 \phi_1 \\
 \phi_2
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 Fd1 & Fd2 & Fd3 & Fd4 & Fd5 \\
 B_{11} & \frac{2B_{16}}{R} & \frac{B_{66}}{R^2} & 0 & 0 \\
 B_{16} & \frac{B_{12}}{R} + \frac{B_{66}}{R} & \frac{B_{26}}{R^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{B_{12}}{R} - A_{55} & \frac{B_{26}}{R^2} - \frac{A_{45}}{R} \\
 D_{11} & \frac{2D_{16}}{R} & \frac{D_{66}}{R^2} & 0 & 0 \\
 D_{16} & \frac{D_{12}}{R} + \frac{D_{66}}{R} & \frac{D_{26}}{R^2} & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$+ A_{45} \frac{v}{R} - A_{55} \phi_1 - A_{45} \phi_2$$

3)  $q_z$ 에 대한 방정식의 중앙차분

$$\begin{array}{c}
 U \\
 V \\
 W \\
 \phi_1 \\
 \phi_2
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 Fd1 & Fd2 & Fd3 & Fd4 & Fd5 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{A_{12}}{R} & -\frac{A_{26}}{R^2} \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{A_{26}}{R} & -\frac{A_{22}}{R^2} \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{A_{45}}{R} & -\frac{A_{44}}{R^2} \\
 A_{55} & \frac{2A_{45}}{R} & \frac{A_{44}}{R^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{A_{55}}{R} - \frac{B_{12}}{R} & \frac{A_{45}}{R} - \frac{B_{26}}{R^2} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{A_{45}}{R} - \frac{B_{26}}{R} & \frac{A_{44}}{R} - \frac{B_{22}}{R^2}
 \end{bmatrix}$$

5)  $m_\theta$ 에 대한 방정식의 중앙차분

$$\begin{array}{c}
 U \\
 V \\
 W \\
 \phi_1 \\
 \phi_2
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 Fd1 & Fd2 & Fd3 & Fd4 & Fd5 \\
 B_{16} & \frac{B_{12}}{R} + \frac{B_{66}}{R} & \frac{B_{26}}{R^2} & 0 & 0 \\
 B_{66} & \frac{2B_{26}}{R} & \frac{B_{22}}{R^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{B_{26}}{R} - A_{45} & \frac{B_{22}}{R^2} - \frac{A_{44}}{R} \\
 D_{16} & \frac{D_{12}}{R} + \frac{D_{66}}{R} & \frac{D_{26}}{R^2} & 0 & 0 \\
 D_{66} & \frac{2D_{26}}{R} & \frac{D_{22}}{R^2} & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$+ A_{44} \frac{v}{R} - A_{45} \phi_1 - A_{44} \phi_2$$