

균일한 면외 전단하중을 받는 직교 이방성 적층재 내부 중앙균열의 모드 III 응력세기계수

이강용* · 주성철** · 김성호***
(1998년 7월 14일 접수)

Mode III Stress Intensity Factors for Orthotropic Layered Material with Internal Center Crack Under Uniform Anti-Plane Shear Loading

Kang Yong Lee, Sung Chul Joo and Sung Ho Kim

Key Words : Stress Intensity Factor(응력세기계수), Layered Material(적층재료), Orthotropic Material(직교이방성재료), Center Crack(중앙균열), Symmetric Loading(대칭하중), Integral Equations(적분방정식)

Abstract

A model is constructed to evaluate the mode III stress intensity factor(SIF) for orthotropic three-layered material with a center crack subjected to uniform anti-plane shear loading. A mixed boundary value problem is formulated by Fourier integral transform method and a Fredholm integral equation of the second kind is derived. The integral equation is numerically analyzed to evaluate the effects of the ratio of shear modulus, strength of each layer and crack length to layer thickness on the stress intensity factor.

1. 서론

적층재료는 경량화, 고강성 등이 요구되는 각종 공학적 구조물에 다양하게 사용되고 있다. 이러한 적층재에 재료자체의 결함이나 사용중 접합부위 주위에 균열이 발생하기 쉽다. 균열거동을 선형과괴역학(linear elastic fracture mechanics) 관점에서 연구하기 위해서는 응력세기계수(stress intensity factor)의 산출이 요구된다. 여러해에 걸쳐 균열체에 있어서의 응력세기계수 산출을 위한 많은 연구가 있었다.

예를 들면, 직교 이방성 재료의 경우에 있어서 Zhang⁽¹⁾은 두 종류의 직교 이방성 재료들 사이의 접합면에 있는 중앙 균열 문제를 적분 변환법을

사용하여 모드 I, II 응력세기계수를 산출하였다. Sung과 Liou⁽²⁾는 양끝이 고정된 반평면 직교 이방성 재료 내부의 균열 문제를 다루었다. 균열의 방향의 영향, 이방성의 영향도 비교적 자세히 거론하였다. 직교 이방성 재료의 응력세기계수를 계산하기 위해 유한요소법을 이용한 간단한 방법도 Lengoc 과 McCallion⁽³⁾에 의해 소개되었다.

모드 III에 대한 연구로써, Chen과 Sih⁽⁴⁾는 4개 층으로 이루어진 복합재의 내부층 사이의 접합면에 있는 유한한 균열 문제를 다루었다. 실제의 적층재에 있어서 외부의 많은 수의 층은 두 개의 무한한 층으로 단순화시켰다. 길이가 유한하고 등방성인 반무한체 내부에 하나의 중앙균열이 존재할 때, Zhang⁽⁵⁾은 Fourier 변환과 Fourier Series를 사용해서 응력세기계수를 산출하였다. Erdogan과 Gupta⁽⁶⁾는 여러개의 등방탄성층으로 구성된 모델의 접합면(interface) 중앙균열면에 반평면 전단하중이 작용할 때 적분변환법을 이용하여 모드 III 응력세기계수를 산출하였다.

* 회원, 연세대학교 기계공학과

** 연세대학교 대학원

*** 회원, 삼성자동차(주)

그러나, 이중 직교 이방성 재료 적층재 중앙 균열면에 균일 전단 하중이 작용하는 경우에 대한 응력세기계수에 관한 연구는 찾아보기 힘들다. 따라서, 본 연구에서는 2개의 탄성층에 접합된 이중 직교 이방성 탄성층 내부 중앙균열면에 균일 전단 하중이 작용하는 경우에 대하여 적분 변환법을 이용하여 적분방정식을 유도하고 이로부터 수치해석적인 방법에 의하여 전단계수비, 균열길이 대 탄성층의 두께비에 따라 모드 III 응력세기계수를 산출하고자 한다.

2. 이론

균열 모델은 Fig. 1과 같다. 두께 $2h_1$ 의 제1탄성층은 길이 $2a$ 의 균열을 내재하며 두께 $h_2 - h_1$ 을 갖는 제2탄성층과 평행하게 경계를 이룬다. 제 1탄성층과 제2탄성층은 완전히 접착되었으며 제 1탄성층의 균열면에는 균일하게 반평면 전단 하중이 작용한다.

선형탄성이론에 의하여 응력과 변위성분은 다음과 같이 z 방향의 변위 w 를 Fourier cosine 적분변환한 함수 G_j 의 적분형으로 표시된다.⁽⁷⁾

$$\begin{aligned} \tau_{yz(j)} &= \mu_{y(j)} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial G_j}{\partial y} \cos \xi x \, d\xi \\ \tau_{xz(j)} &= -\mu_{x(j)} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G_j \xi \sin \xi x \, d\xi \quad (1) \\ w_{(j)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G_j \cos \xi x \, d\xi \end{aligned}$$

여기서,

$$G_j(\xi, y) = A_j e^{\xi_j y} + B_j e^{-\xi_j y}, \quad (2)$$

where $\xi_j = \sqrt{\frac{\mu_{x(j)}}{\mu_{y(j)}}} \xi, \quad j = 1, 2$

첨자 $j=1$ 은 균열을 내재하는 제 1탄성층, $j=2$ 는 제 2탄성층을 의미하며, $\tau_{yz(j)}, \tau_{xz(j)}$ 와 $w_{(j)}$ 는 응력성분 및 변위성분을 각각 나타낸다. $\mu_{x(j)}, \mu_{y(j)}$ 는 각각 x, y 방향 전단 탄성 계수를 나타내고, A_j, B_j 는 결정해야 할 미지수이다.

Fig.1의 직교좌표계에서 경계조건은 다음과 같다.

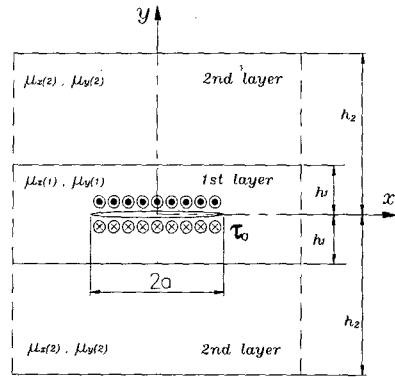


Fig. 1 Geometry and Configuration of the model.

$$\begin{aligned} \tau_{yz(1)} &= -\tau_0, \quad |x| \leq a, \quad y = 0 \\ w_{(1)} &= 0, \quad |x| > a, \quad y = 0 \\ \tau_{yz(1)} &= \tau_{yz(2)}, \quad |x| < \infty, \quad y = h_1 \quad (3) \\ w_{(1)} &= w_{(2)}, \quad |x| < \infty, \quad y = h_1 \\ \tau_{yz(2)} &= 0, \quad |x| < \infty, \quad y = h_2 \end{aligned}$$

여기서, τ_0 는 균열면에 작용하는 균일 전단 응력이다.

식 (3)의 경계조건과 식 (1)의 응력 및 변위식 으로부터 다음과 같은 쌍적분 방정식 (dual integral equations)을 구할 수 있다.

$$\int_0^\infty M(\xi) \cos \xi x \, d\xi = 0, \quad |x| > a \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi F_m(\xi) M(\xi) \cos \xi x \, d\xi \\ = \frac{\pi \tau_0}{2\sqrt{\mu_{x(1)} \mu_{y(1)}}}, \quad |x| < a \quad (5) \end{aligned}$$

여기서, $F_m(\xi)$ 와 $M(\xi)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$F_m(\xi) \equiv -\frac{A_1 - B_1}{M(\xi)} \quad (6)$$

$$M(\xi) = A_1 + B_1 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} B_1(\xi) \\ A_2(\xi) \\ B_2(\xi) \end{bmatrix} = A_1(\xi) \widetilde{T}^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma e^{\beta_1 h_1 \xi} \\ e^{\beta_1 h_1 \xi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

where ,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma e^{-\beta_1 h_1 \xi} & e^{\beta_2 h_1 \xi} & -e^{-\beta_2 h_1 \xi} \\ -e^{-\beta_1 h_1 \xi} & e^{\beta_2 h_1 \xi} & e^{-\beta_2 h_1 \xi} \\ 0.0 & e^{\beta_2 h_2 \xi} & -e^{-\beta_2 h_2 \xi} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\Gamma = \sqrt{\mu_{x(1)} \mu_{y(1)}} / \sqrt{\mu_{x(2)} \mu_{y(2)}}$$

$$\beta_1 = \sqrt{\mu_{x(1)} / \mu_{y(1)}}, \beta_2 = \sqrt{\mu_{x(2)} / \mu_{y(2)}} \quad (10)$$

여기서, Γ 는 균열층과 외부층의 전단 탄성 계수에 대한 비를 나타내고, β_1, β_2 는 재료가 층을 이루어 쌓이는 방향성을 의미한다. β_2 가 1보다 크다는 것은 $\mu_{x(2)}$ 가 $\mu_{y(2)}$ 보다 큰 경우로써, 복합재에 있어서 섬유 길이 방향이 균열과 평행하게 적층을 이루는 경우이며, β_2 가 1보다 작다는 것은 $\mu_{x(2)}$ 가 $\mu_{y(2)}$ 보다 큰 경우로써 섬유의 길이 방향이 균열에 수직인 방향으로 쌓이는 경우이다.

$M(\xi)$ 를 다음과 같이 가정한다.⁽⁸⁾

$$M(\xi) = \int_0^a \Phi(t) J_0(\xi t) dt \quad (11)$$

여기서, $J_0(\xi t)$ 는 제1종 0차 Bessel 함수이며, $\Phi(t)$ 는 결정될 함수이다.

식 (11)은 식 (4)를 자동으로 만족하며 식 (11)을 식 (5)에 적용하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi(s) + s \int_0^a \Phi(t) \int_0^\infty \xi [F_{III}(\xi) - 1] \cdot J_0(\xi t) J_0(\xi s) d\xi dt = \frac{\pi \tau_0 s}{2\sqrt{\mu_{x(1)} \mu_{y(1)}}} \quad (12)$$

식 (12)를 무차원화하기 위하여 다음과 같은 무차원변수를 정의한다.

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t/a, \bar{s} = s/a, \\ \bar{\xi} &= a \xi, \bar{x} = x/a \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Phi(s) = \frac{\pi \tau_0}{2\sqrt{\mu_{x(1)} \mu_{y(1)}}} \Phi(\bar{s}) a \sqrt{s}$$

식 (13)을 식 (12)에 대입하면 다음과 같은 제2종 Fredholm 적분 방정식 (Fredholm Integral Equation of a second kind) 이 된다.

$$\Phi(\bar{s}) + \int_0^1 \Phi(\bar{t}) K(\bar{t}, \bar{s}) d\bar{t} = \sqrt{\bar{s}} \quad (14)$$

여기서,

$$K(\bar{t}, \bar{s}) \equiv \sqrt{\bar{t}, \bar{s}} \int_0^\infty \bar{\xi} [F_{III}(\bar{\xi}) - 1] J_0(\bar{\xi} \bar{t}) J_0(\bar{\xi} \bar{s}) d\bar{\xi} \quad (15)$$

식 (14)에 Gaussian_Quadrature 적분법을 사용하였는데, 이는 Simpson 적분법에 비하여 작은 적분점 개수로 수렴가능하므로 효과적인 수치해석이며 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{s}_n) + \sum_{m=1}^{N_G} \Phi(\bar{t}_m) K(\bar{t}_m, \bar{s}_n) W_m \\ = \sqrt{\bar{s}_n}, \quad (n = 1, 2, \dots, N_G) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,

$$K(\bar{t}_m, \bar{s}_n) \equiv \sqrt{\bar{t}_m, \bar{s}_n} \sum_{k=1}^{N_Q} \bar{\xi}_k [F_{III}(\bar{\xi}_k) - 1] J_0(\bar{\xi}_k \bar{t}_m) J_0(\bar{\xi}_k \bar{s}_n) W_k \quad (17)$$

식 (16)을 정방행렬로 만들기 위하여 적분점 (integration point)인 \bar{t}_m 과 병치점 (collocation point) \bar{s}_n 을 $\bar{t}_n = \bar{s}_n$ ($n = 1, 2, \dots, N_G$)으로 하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N_G} [\delta_{mn} + K(\bar{t}_m, \bar{t}_n) W_n] \Phi(\bar{t}_n) \\ = \sqrt{\bar{t}_n}, \quad (n = 1, 2, \dots, N_G) \end{aligned} \quad (18)$$

$$K(\bar{t}_m, \bar{t}_n) \equiv \sqrt{\bar{t}_m, \bar{t}_n} \sum_{k=1}^{N_Q} \bar{\xi}_k [F_{III}(\frac{\bar{\xi}_k}{a}) - 1] \cdot J_0(\bar{\xi}_k \bar{t}_m) J_0(\bar{\xi}_k \bar{t}_n) W_k \quad (19)$$

여기서, δ_{mn} 는 Kronecker Delta이다.

N_G, N_Q 는 각 적분의 적분점 개수, W_m, W_k 는 Gaussian_Quadrature 적분가중상수이며, 여기서 구한 결과의 수렴성은 Table 1 에 나타내었고, 공학적인 관점에서 충분한 정확성이 만족되었음을 알 수 있다. 식 (6)~식 (9)에 의하여 $F(\bar{\xi}_k)$ 및 A_j, B_j 를 구할 수 있고, 식 (18)에서 $\Phi(\bar{t}_m)$ 을 수치해석적으로 산출할 수 있다.

균열 우측과 좌측 선단에서 응력세기계수 $K_{III R}$ 과 $K_{III L}$ 는 다음식에 의하여 구하여 진다.

$$\begin{aligned} K_{III R} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2(x-a)} \pi \tau_{yz(1)}(x, 0) \\ K_{III L} &= \lim_{x \rightarrow -a^-} \sqrt{-2(x+a)} \pi \tau_{yz(1)}(x, 0) \end{aligned} \quad (20)$$

식 (1), (2), (13)과 식 (20)으로부터 균열 선단에서 응력세기계수는 다음과 같이 된다.

Table 1 Converging behavior for dimensionless mode III SIFs for various numbers of Gaussian_Quadrature points.

		Dimensionless SIFs, $K_{III}/\tau_0\sqrt{\pi a}$			
		$\Gamma=2.0$	$\Gamma=2.0$	$\Gamma=0.5$	$\Gamma=1.0$
		$\beta_1=1.0$	$\beta_1=1.0$	$\beta_1=2.0$	$\beta_1=0.5$
		$\beta_2=1.0$	$\beta_2=1.0$	$\beta_2=2.0$	$\beta_2=0.5$
		$a/h_1=1.0$	$a/h_1=1.0$	$a/h_1=3.0$	$a/h_1=5.0$
N_C	N_Q	$a/h_2=0.5$	$a/h_2=0.1$	$a/h_2=0.5$	$a/h_2=0.5$
48	20	1.0856469	1.0540672	0.9230966	1.1493117
	30	1.0856469	1.0540672	0.9230966	1.1493117
	50	1.0856469	1.0540672	0.9230966	1.1493117
	100	1.0856469	1.0540672	0.9230966	1.1493117
54	20	1.0856474	1.0540673	0.9230966	1.1493118
	30	1.0856474	1.0540673	0.9230966	1.1493118
	50	1.0856474	1.0540673	0.9230966	1.1493118
	100	1.0856474	1.0540673	0.9230966	1.1493118
60	20	1.0856471	1.0540673	0.9230967	1.1493119
	30	1.0856471	1.0540673	0.9230967	1.1493119
	50	1.0856471	1.0540673	0.9230967	1.1493119
	100	1.0856471	1.0540673	0.9230967	1.1493119

$$K_{III R} = \Phi(1) \tau_0 \sqrt{\pi a} \quad (21)$$

$$K_{III L} = -\Phi(1) \tau_0 \sqrt{\pi a} \quad (22)$$

여기서, 함수 $\Phi(1)$ 은 재료물성 $\mu_{x(1)}, \mu_{y(1)}, \mu_{x(2)}, \mu_{y(2)}$ 및 기하학적 변수 h_1, h_2, a 에 의해 결정되는 형상계수이다.

3. 수치해석 및 고찰

Fig. 2(a)는 제2탄성층의 두께가 무한한 경우 직교 이방성 적층재료의 우측 균열 선단에서 모드 III 무차원 응력세기계수를 a/h_1 의 함수로 산출한 것으로서, Chen⁽⁴⁾의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 2(b)는 모든 탄성층의 물성치를 같게 하여 Zhang⁽⁵⁾의 연구에서 사용한, 길이가 유한하고 등방성인 반무한체 모델과 같게 하여 비교하였는데 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 3는 β_1 의 영향을 분석하기 위한 것으로서, 균열층의 두께가 클 경우, 일정한 Γ 에 대하여

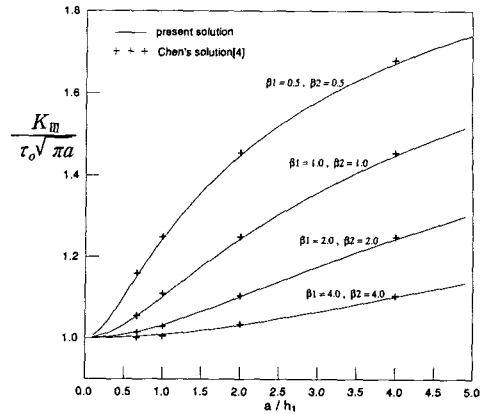


Fig. 2(a) Comparison of present numerical results with previous solution when $\Gamma=5.0$.

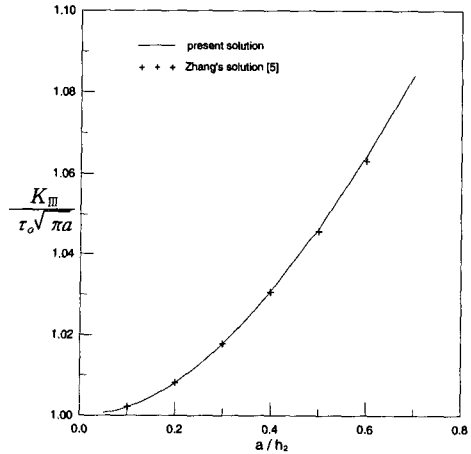


Fig. 2(b) Comparison of present numerical results with previous solution when $\Gamma=1.0, \beta_1=1.0$ and $\beta_2=1.0$.

β_1 이 작을 때 무차원 응력세기계수가 크다. 그러나, 균열층의 두께가 작을 경우, Γ 의 영향을 받게 된다.

Fig. 4에서는 β_2 의 영향을 살펴볼 수가 있다. Γ 가 일정한 경우에 대하여 β_2 가 작을 경우 무차원 응력세기계수가 크다. 또한, a/h_1 이 일정한 경우에 대하여 β_2 가 작을 경우 무차원 응력세기계수가 크음을 알 수 있다.

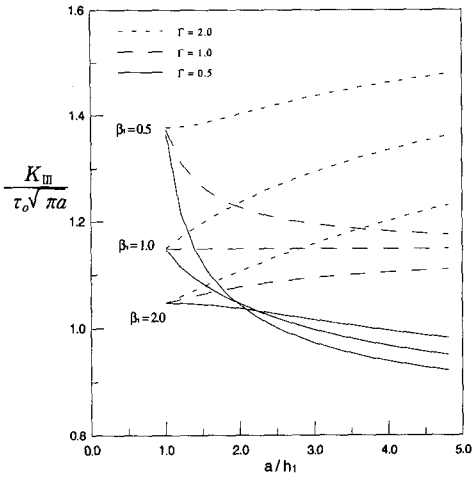


Fig. 3 Dimensionless stress intensity factor as a function of a/h_1 for various shear moduli ratio β_1 with $a/h_2 = 1.0$ and $\beta_2 = 1.0$.

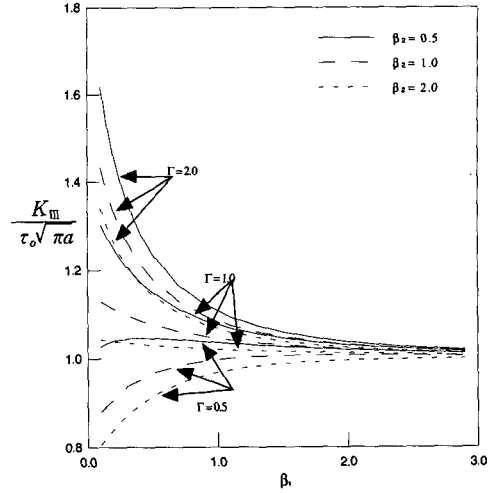


Fig. 5 Dimensionless stress intensity factor as a function of β_1 for various shear moduli ratio β_2 with $a/h_1 = 1.0$ and $a/h_2 = 0.5$.

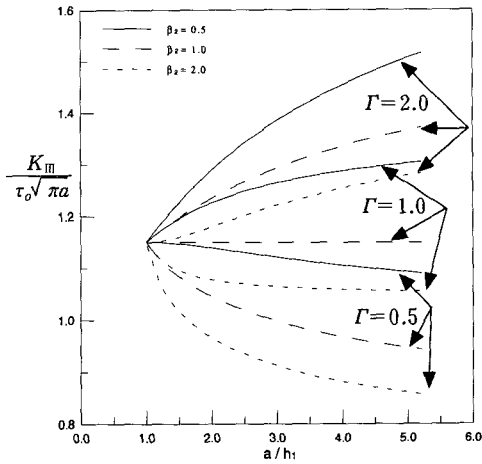


Fig. 4 Dimensionless stress intensity factor as a function of a/h_1 for various shear moduli ratio β_2 with $a/h_2 = 1.0$ and $\beta_1 = 1.0$.

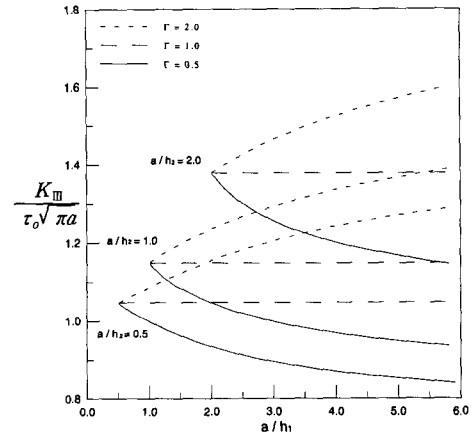


Fig. 6 Dimensionless stress intensity factor as a function of a/h_1 for various a/h_2 with $\beta_1 = 1.0$ and $\beta_2 = 1.0$.

Γ 의 영향은 Fig. 4와 Fig. 5에서 알 수 있다. Fig. 4에서 알 수 있듯이, β_2 가 일정한 경우에 대하여 Γ 가 클 경우, 무차원 응력세기계수가 크다. 또한, a/h_1 이 일정한 경우에 대하여 Γ 가 클 경우, 무차원 응력세기계수가 크음을 알 수 있다. Fig. 5는 β_1 이 일정한 경우에 대하여 Γ 가 클 경

우 무차원 응력세기계수가 크음을 보여준다.

Fig. 6는 외부층 두께의 영향을 분석하기 위한 것으로 Γ 가 일정한 경우에 대하여 외부층의 두께가 작을 경우, 무차원 응력세기계수가 크다. 또한, 균열층의 두께가 일정한 경우에 대하여 외부층의 두께가 작을 경우, 무차원 응력세기계수가 크다.

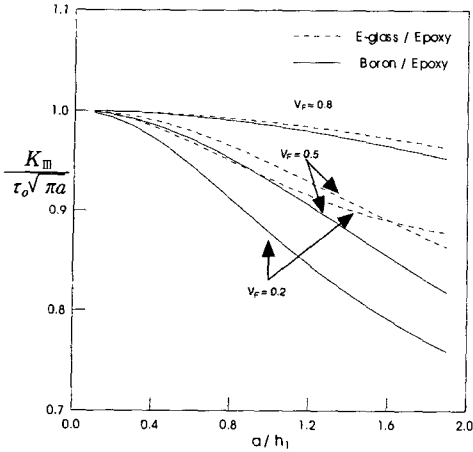


Fig. 7 Comparison of dimensionless mode III stress intensity factors between E-glass/Epoxy composite and Boron/Epoxy composites.

Fig. 7은 E-glass/Epoxy로 이루어진 복합재와 Boron/Epoxy로 이루어진 복합재에 대해서 응력세기계수를 산출한 것으로서 여기서, fiber volume fraction VF는 다음과 같이 정의한다.⁽¹⁰⁾

$$V_F = \frac{h_2 - h_1}{h_2} \quad (23)$$

그림에서 알 수 있듯이 섬유 체적 함유율이 클수록 상대적으로 큰 응력세기계수를 보인다. 섬유 체적 함유율이 비교적 클 때($V_F = 0.8$), Boron/epoxy의 무차원 응력세기계수는 E-glass/epoxy의 무차원 응력세기계수와 거의 일치하는 경향을 보인다. 그러나, 섬유 체적 함유율이 낮아지면서 E-glass/Epoxy로 이루어진 복합재가 Boron/epoxy로 이루어진 복합재에 비해 더 큰 응력세기계수를 보인다.

4. 결론

이종 직교 이방성 재료 적층재 내부 중앙 균열면에 균일 전단하중이 작용하는 모델에 대하여 적분 변환법을 사용하여 제 2종 Fredholm 적분 방정식을 유도하였으며 수치해석적 방법에 의해 모드 III 응력세기계수를 산출한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 연구에서 산출된 모드 III 무차원 응력세기계수가 기존의 Chen⁽⁴⁾ 및 Zhang⁽⁵⁾의 결과와 잘 일치하였다.

(2) 균열층의 두께가 클 때, 균열과 같은 방향의 균열층의 전단계수가 감소함에 따라 β_1 이 감소하는 경우 응력세기계수는 증가한다.

(3) 외부층에 대한 균열과 수평 방향의 전단계수 대 균열과 수직 방향의 전단계수비(β_2)가 감소함에 따라 응력세기계수는 크다.

(4) 외부층에 대한 균열층의 전단탄성계수 비(J)가 클 경우 응력세기계수가 크다.

(5) 외부층의 두께가 작을 경우 응력세기계수가 크다.

(6) E-glass/Epoxy로 이루어진 복합재와 Boron/Epoxy로 이루어진 복합재에 대해서, 섬유 체적 함유율이 클수록, 상대적으로 큰 응력세기계수를 보인다.

후 기

본 논문은 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비 안전성 평가 연구센터의 연구비지원으로 이루어진 것으로써 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Zhang, X. S., 1989, "A Central Crack at the Interface Between Two Different Orthotropic Media for the Mode I and Mode II," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 33, No.3, pp. 327~333.
- (2) Sung, J. C. and Liou, J. Y., 1995, "Internal Crack in a Half-plane Solid with Clamped Boundary," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 121, pp.361~372.
- (3) Lengoc, L. and McCallion, H., 1997, "On the Fracture Toughness of Orthotropic Materials," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 58, No. 4, pp. 355~362.
- (4) Chen, E. P. and Sih, G. C., 1973, "Torsional and Anti-plane Strain Delamination of an Orthotropic Layered Composite," *Proceedings of*

- the 13th Midwestern Mechanics Conference*, Vol. 7, pp. 763~776.
- (5) X. S. Zhang, "A Central Crack at the Interface Between Two Different Media in a Rectangular Sheet under Anti-Plane Shear," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 19, pp.709~715, 1984.
- (6) Erdogan, F. and Gupta, G., 1971, "The Stress Analysis of Multi-layered Composites with a Flaw," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7, pp. 39~61.
- (7) Sih, G. C. and Chen, E. P., *Mechanics of fracture*, Vol. 6, pp. 255~276.
- (8) Copson, E. T., 1961, "On Certain Dual Integral Equations," *Proceedings of the Glasgow Mathematical Association*, Vol. 5, pp. 19~24.
- (9) 이강용, 박문복, 김성호, 1995, "임의의 균열면 전단하중을 받는 적층재 중앙균열의 응력세기계수", *대한기계학회*, 제 19권, 제 10호, pp.2578~2585
- (10) Sneddon, I. N. and Lowengrub, M., 1969, *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, John Wiley, pp. 62~72.