PUBLICATIONS OF THE KOREAN ASTRONOMICAL SOCIETY
14: 57 ~ 60, 1999

MACDONALD-THORNE 자기권의 GRAD-SHAFRANOV 방정식
THE GRAD-SHAFRANOV EQUATION IN THE MACDONALD-THORNE MAGNETOSPHERE

박석재
한국천문 연구원
SEOK JAE PARK
Korea Astronomy Observatory
Received Nov. 7, 1999; Accepted Nov. 30, 1999

ABSTRACT

We derive the Grad-Shafranov equation in the Macdonald-Thorne magnetosphere of the super-massive black hole in an active galactic nucleus. Our major assumption is that the plasma velocity is not only toroidal but also poloidal. As a result, we get the correction terms which are related to the poloidal motion of plasma like electrodynamic jets.

Key words: black holes, galactic nuclei, jets

1. 서론

Macdonald와 Thorne(1982, MT)은 유입물질 원반으로 둘러싸인 거대한 블랙홀의 자기권을 수학적으로 간결하게 정리하여 이 분야의 연구에 큰 획을 그었다. 특히 MT는 이전에 시행되었던 난해한 4차원적 시공간 기술을 모두 '3+1'-시공간 기술로 바꿔놓아 더욱 쉽게 만들기도 했다. MT가 구축한, 축대칭을 만족하고 시간에 따라 변하지 않는 자기권은 MHD에서 말하는 'force-free' 조건, 즉 식

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1a}$$

$$\rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \tag{1b}$$

이 잘 성립한다고 가정할 수 있다(문자들은 전자기학에서 으레 등장하는 것들이다). 왜냐하면 이 자기권은 식 (1a)만을 만족하는 블랙홀이나 유입물질 원반의 표면과는 다르기 때문이다.

MT 자기권에서 대칭축은 물론 블랙홀의 회전축과 일치해야 한다. 보통 별의 물리에서와는 달리 블랙홀의 경우에는 자기장의 대칭축이 회전축과 일치하지 않는 경우를 생각하기가 힘들기 때문이다. 이 자기권에서도 필연적으로 제트의 형성이 기대되는데, 플라즈마의 이동은 자기 플럭스 를 변수로 한 Grad-Shafranov 방정식에 의해 기술되는 것이 보통이다(e. g., Lovelace et al. 1986).

MT에서는 자기권 자체를 구축하는 것이 논문의 목표였으므로 플라즈마가 회전하는 경우만 생 각했다. 즉 자기력선은 플라즈마와 같이 회전한다고 가정하고 속도 $\mathbf{v}$를

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^T \tag{2}$$

로 놓음으로써 플라즈마들이 블랙홀을 중심으로 회전만 하도록 만들었던 것이다. 식 (2)에서 T는 toroidal 성분을 나타낸다. 앞으로 P는 poloidal 성분을 나타내기 위해 T와 같이 이용될 것이다. MT에서 이렇게 생각한 것은 toroidal 성분이 아닌 플라즈마의 다른 운동이 필요가 없었기 때문이다. 하지만 이 경우 poloidal 방향으로 만들어질 수밖에 없는 제트와 같은 현상은 기술할 수 없게 된다는 결정적 단점이 있다.

이 논문에서는 MT 자기권에서 플라즈마의 속도가

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^T + \mathbf{v}^P \tag{3}$$

처럼 주어진다고 가정하고 그 경우의 Grad-Shafranov 방정식을 유도해 보기로 한다. 중앙의 Kerr 블랙홀은 질량 M 각운동량 J, 각 운동량 밀도 $a(\equiv J/M)$를 갖는다고 가정한다.

2. Macdonald-Thorne 자기권

지연 함수를 α, 편이 벡터를 β^i , 3차원 공간의 계량 텐서를 γ_{ij}라 하면 '3+1'-시공간을 이용한 4차원 시공간의 계량 텐서는 일반적으로

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \tag{4}$$

와 같이 주어진다. 여기서 라틴 문자는 1에서 3까지, 그리스 문자는 0에서 3까지 달리고 시공간 부호는 $(- + ++)$이다. 이 논문에서 모든 물리량의 단위는 $c = G \equiv 1$로 잡는다. 구좌표계 $(r,\ \theta,\ \phi\ )$ 의 원점에 위치한 블랙홀을 기술하는 시공간 계량은

$$\alpha = \frac{\rho}{\Sigma}\Delta \tag{5a}$$

$$\beta^{\phi} \equiv -\omega = -\frac{2aMr}{\Sigma^2}, \tag{5b}$$

$$\gamma_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta^2}, \tag{5c}$$

$$\gamma_{\theta\theta} = \rho^2, \tag{5d}$$

$$\gamma_{\phi\phi} \equiv \tilde{\omega}^2 = \frac{\Sigma^2}{\rho^2}\sin^2\theta \tag{5e}$$

로 주어진다. 여기서 Δ, ρ, Σ 는 각각

$$\Delta^2 \equiv r^2 + a^2 - 2Mr, \tag{5f}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{5g}$$

$$\Sigma^2 \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta^2\sin^2\theta \tag{5h}$$

을 의미한다.

이 경우 블랙홀 주위의 FIDO(fiducial observer)는

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = \frac{\Delta}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}, \tag{6a}$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{6b}$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{6c}$$

와 같은 관성계 단위 벡터를 갖는다.

축대칭에 따른 Killing 벡터 $\mathbf{m}(\equiv \tilde{\omega}\mathbf{e}_{\hat{\phi}})$이 존재하면 모든 스칼라 f 와 벡터 $\mathbf{f}$ 는

$$\mathbf{m}\cdot\nabla f = 0, \quad L_{\mathbf{m}}\mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{7a}$$

를 각각 만족해야 한다. 여기서 L은 시공간의 Lie 미분이다. 또한 시간에 따라 변하지 않는다는 조건으로부터

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0 \tag{7b}$$

를 만족한다.

이 경우 Maxwell 방정식은

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho_e, \tag{8a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{8b}$$

$$\nabla\times(\alpha\mathbf{E}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla\omega)\mathbf{m}, \tag{8c}$$

$$\nabla\times(\alpha\mathbf{B}) = 4\pi\alpha\mathbf{j} - (\mathbf{E}\cdot\nabla\omega)\mathbf{m} \tag{8d}$$

로 주어진다.

블랙홀 사건 지평선과 만나지 않는 $\mathbf{m}-$ 고리 A를 생각해 보자. 가장자리를 ∂A , 그리고 A의 작은 면적에 대한 직교 벡터를 $d\mathbf{\Sigma}$ 라 하면, 우리는 A를 관통하는 총 전류 $I(\mathbf{x})$, 총 자기 플럭스 $\psi(\mathbf{x})$를 각각,

$$I(\mathbf{x}) = -\int_A \alpha\mathbf{j}\cdot d\mathbf{\Sigma}, \tag{9a}$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_A \mathbf{B}\cdot d\mathbf{\Sigma}, \tag{9b}$$

와 같이 정의할 수 있게 된다. 이 경우 MT 자기권에서의 전기장과 자기장은

$$\mathbf{B}^T = -\frac{2I}{\alpha\tilde{\omega}^2}\mathbf{m}, \tag{10a}$$

$$\mathbf{B}^P = \frac{\nabla\psi\times\mathbf{m}}{2\pi\tilde{\omega}^2}, \tag{10b}$$

$$\mathbf{E}^T = 0, \tag{10c}$$

$$\mathbf{E}^P = \mathbf{E} \tag{10d}$$

와 같이 주어진다.

3. Grad-Shafranov 방정식

이미 서론에서 밝힌 바와 같이 MT에서는 플라즈마가 $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ 방향으로 회전하는 경우만 생각했다. 즉 자기력선은 플라즈마와 같이 회전한다고 가정하고 자기력선의 속도 $\mathbf{v}^F$ 를

$$\mathbf{v}^F \equiv \frac{1}{\alpha}(\Omega^F - \omega)\mathbf{m} \tag{11}$$

로 놓음으로써 플라즈마들이 블랙홀을 중심으로 회전만 하도록 만들었던 것이다. 여기서 Ω^F 는 대칭축을 회전하는 자기력선들의 각속도이다. 이 $\mathbf{v}^F$ 는 명백히 식 (2)를 만족한다.

또한 MT에서는 식 (11)과 관계

$$\mathbf{E}^P(= -\mathbf{v}^F\times\mathbf{B}^P) = -\mathbf{v}^T\times\mathbf{B}^P \tag{12}$$

을 이용하여

$$\mathbf{E}^P = -\frac{\Omega^F - \omega}{2\pi\alpha}\nabla\psi \tag{13}$$

을 얻어내고 있다. 서론에서 이미 언급했지만, MT에서 이렇게 생각한 것은 toroidal 성분이 아닌 플라즈마의 다른 운동이 필요가 없었기 때문이라는 사실을 다시 한번 강조하고자 한다.

하지만 분명히 $\mathbf{E}^P$는 식 (12)를 보정한

$$\mathbf{E}^P = -\mathbf{v}^T \times \mathbf{B}^P - \mathbf{v}^P \times \mathbf{B}^T \tag{14}$$

에 의해 주어지므로 우리는 식 (11)도 식 (3)처럼 보정하여

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^T + \mathbf{v}^P = \frac{1}{\alpha}(\Omega^F - \omega)\mathbf{m} + \mathbf{v}^P \tag{15}$$

라 고 놓고, 이로부터 식 (13)을 보정한 식

$$\mathbf{E}^P = -\frac{\Omega^F - \omega}{2\pi\alpha}\nabla\psi + \frac{2I}{\alpha\tilde{\omega}^2}\mathbf{v}^P \times \mathbf{m} \tag{16}$$

을 얻게 된다.

식 (15)와 (16)의 두 번째 항은 플라즈마를 poloidal 방향으로 이동시켜 제트와 관련된 현상의 발판을 마련해 주는 것이다. 이 경우 각운동량 플럭스 벡터 $\mathbf{S}_J$는

$$\mathbf{S}_J^P = -\frac{1}{4\pi}\left\{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{m})\mathbf{E}^P + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{m})\mathbf{B}^P\right\} = \frac{1}{2\pi\alpha}I\mathbf{B}^P \tag{17a}$$

처럼 변화가 없지만 에너지 플럭스 벡터 $\mathbf{S}_E$는 이 경우

$$\mathbf{S}_E^P = \frac{I\Omega^F}{2\pi\alpha}\mathbf{B}^P + \frac{I^2}{\pi\alpha\tilde{\omega}^2}\mathbf{v}^P \tag{17b}$$

처럼 주어져서 보정항을 갖는다. 플라즈마의 흐름이 poloidal 방향으로 허용된 경우, 즉 식 (15)처럼 보정된 경우는 에너지의 흐름이 달라진다는 사실을 알 수 있다.

ρ_e 와 $\mathbf{j}$ 는 MT 자기권에서 일반적으로

$$4\pi j^T = -\frac{\tilde{\omega}}{\alpha}\nabla\cdot\left(\frac{\alpha}{2\pi\tilde{\omega}^2}\nabla\psi\right) + \frac{\tilde{\omega}}{\alpha^2}\nabla\omega\cdot\left(\nabla A_0 + \frac{\omega}{2\pi}\nabla\psi\right), \tag{18a}$$

$$4\pi\rho_e = \nabla\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\nabla A_0 + \frac{\omega}{2\pi}\nabla\psi\right) \tag{18b}$$

로 각각 주어진다. 여기서 A_0 은

$$\nabla A_0 = -\frac{\Omega^F}{2\pi}\nabla\psi + \frac{2I}{\tilde{\omega}^2}\mathbf{v}^P \times \mathbf{m} \tag{19}$$

로 주어지는 스칼라 포텐샬이다. 식 (19)에서 알 수 있듯이 식 (15)와 (16)은 스칼라 포텐샬에 영향을 미친다. 따라서 식 (18a), (18b)로 주어지는 ρ_e 와 $\mathbf{j}$ 도 바뀌게 된다.

식 (18a), (18b)에 (15), (16), (19)를 대입하고 정돈하면 우리는 마침내

$$\begin{aligned} 8\pi^2 j^T = & \\ & -\frac{\tilde{\omega}}{\alpha}\nabla\cdot\left(\frac{\alpha}{\tilde{\omega}^2}\nabla\psi\right) + \frac{\tilde{\omega}}{\alpha^2}(\Omega^F - \omega)\nabla\psi\cdot\nabla(\Omega^F - \omega) \\ & -\frac{\tilde{\omega}}{\alpha^2}(\Omega^F - \omega)\nabla\Omega^F\cdot\nabla\psi + \frac{4\pi I}{\alpha^2\tilde{\omega}}\nabla\omega\cdot\mathbf{v}^P \times \mathbf{m}, \end{aligned} \tag{20a}$$

$$8\pi^2\rho_e = -\nabla\cdot\left(\frac{\Omega^F - \omega}{\alpha}\right)\nabla\psi - \frac{4\pi I}{\alpha\tilde{\omega}^2}\mathbf{v}^P \times \mathbf{m} \tag{20b}$$

을 얻게 된다.

우리가 생각하는 자기권은 식 (1a), (1b)를 만족하고 있으므로 I 와 ψ 는 전혀 관련이 없는 것이 아니다. MT에서와 마찬가지로 정의 $\nabla I \equiv -2\pi\mathbf{m}\times(\alpha\mathbf{j}^{\mathbf{P}})$ 와 $\nabla\psi \equiv 2\pi\mathbf{m}\times\mathbf{B}^P$ 를 이용하면 둘 사이에는

$$\mathbf{j}^P = -\frac{1}{\alpha}\frac{dI}{d\psi}\mathbf{B}^P \tag{21}$$

와 같은 관계가 있다.

여기서 Lovelace et al. (1987)에서처럼

$$\mathbf{v}^P \equiv \kappa\mathbf{B}^P \tag{22}$$

로 놓자. 그러면 식 (1b), (14), (21), (22)로부터

$$\mathbf{j}^T = \rho_e(\mathbf{v}^T - \kappa\mathbf{B}^T) - \frac{1}{\alpha}\frac{dI}{d\psi}\mathbf{B}^T \tag{23}$$

을 얻게 된다.

식 (10a), (10b), (20a), (20b), (22)를 식 (23)에 대입하면 정돈하면 Grad-Shafranov 방정식

$$\begin{aligned} \nabla\cdot & \left[\frac{\alpha}{\tilde{\omega}^2}\left(1 - \frac{\tilde{\omega}^2 G^2}{\alpha^2}\right)\nabla\psi\right] \\ & + \frac{G}{\alpha}\nabla(G + \omega)\cdot\nabla\psi + \frac{16\pi^2 I}{\alpha\tilde{\omega}^2}\frac{dI}{d\psi} = 0, \end{aligned} \tag{24a}$$

$$G \equiv (\Omega^F - \omega) + \frac{2\kappa I}{\tilde{\omega}^2} \tag{24b}$$

를 얻는다.

4. 결론

식 (24)가 정확한 식인지 확인해 보려면 이미 알려진 Grad-Shafranov 방정식과 비교해 보는 것이 좋다.

Newtonian 경우를 알아 보기 위해

$$\alpha \to 1, \quad \tilde{\omega} \to R, \quad \omega \to 0 \tag{25}$$

와 같이 놓으면 식 (24)는

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{R^2} - G^2 \right) \nabla \psi \right] + G \nabla G \cdot \nabla \psi + \frac{16\pi^2 I}{R^2} \frac{dI}{d\psi} = 0, \tag{26a}$$

$$G \equiv \Omega^F + \frac{2\kappa I}{R^2} \tag{26b}$$

와 같이 된다. 식 (26)은

$$(1 - R^2 G^2) \mathbf{\Delta}^* \psi - \frac{1}{2R^2} \nabla (R^4 G^2) \cdot \nabla \psi + H \frac{dH}{d\psi} = 0, \tag{27a}$$

$$\mathbf{\Delta}^* \psi \equiv \left[R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi, \tag{27b}$$

$$H \equiv R B^{\hat{\phi}} \tag{27c}$$

와 같이 변형될 수 있는데, 식 (27)은 바로 Newtonian 블랙홀 자기권에서 제트를 만드는 일을 다루고 있는 논문 Lovelace et al. (1987)의 식 (48)에 다름 아니다. 즉 식 (24)는 가장 일반적인 Kerr 블랙홀 주위의 상대론적 자기권을 기술하는 방정식인 것이다.

식 (24)에서 $\kappa = 0$ 을 가정하면 원래의 Grad-Shafranov 방정식

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha}{\tilde{\omega}^2} \left(1 - \frac{(\Omega^F - \omega)^2 \tilde{\omega}^2}{\alpha^2} \right) \nabla \psi \right] + \frac{\Omega^F - \omega}{\alpha} \frac{d\Omega^F}{d\psi} (\nabla \psi)^2 + \frac{16\pi^2 I}{\alpha \tilde{\omega}^2} \frac{dI}{d\psi} = 0 \tag{28}$$

이 되는 것은 물론이다.

식 (28)은 Macdonald(1984)에 의해서 수치적으로 풀렸다는 사실을 참고로 첨언해 둔다.

참고문헌

Blandford, R. D., and Znajek, R. L. 1977, MNRAS, 179, 433

Lovelace, R. V. E., Wang, J. C. L., and Sulkanen, M. E. 1987, ApJ, 315, 504

Macdonald, D., and Thorne, K. S. 1982, MNRAS, 198, 345

Macdonald, D. 1984, MNRAS, 211, 313