KIGAS Vol.3, No.1, April, 1999
(Journal of the Korean Institute of Gas)

제어 시스템 변수들간의 상호작용 해석 및 루프 페어링을 위한 판별기준

고 재 욱 · 윤 인 섭* · L. B. Evans**
광운대학교 화학공학과
서울대학교 응용화학부*
ASPEN TECH., USA**
(1999년 4월 7일 접수, 1999년 6월 15일 채택)

A Criterion for Interaction Analysis and Loop Pairing Among Control System Variables

Jae Wook Ko , En Sup Yoon*, L. B. Evans**
Dept. of Chemical Engineering, Kwangwoon University
*School of Chemical Engineering, Seoul National University**
*ASPEN TECH., USA***
(Received 7 April 1999 ; Accepted 15 June 1999)

요 약

정상상태 이득을 사용하여 제어 시스템 변수들간의 상호작용 해석 및 루프 페어링을 위한 판별기준을 제시하였다. 음 함수(implicit function)의 미분 관계를 고려하여 유도한 판별기준을 이용하여 조작 변수들과 제어 변수들간의 SISO pairing 및 부분적 MIMO pairing을 합리적으로 정할 수 있었으며, 기존의 기준이 해석하지 못한 대각선 정상상태 이득에 대한 대각선에 있지 않은 정상상태 이득의 영향을 효과적으로 고려할 수 있었다. 그리고 여러 경우에 대해 적용 예제들을 통하여 제시한 기준의 검증과 응용성을 알아보았다.

Abstract - Using the steady state gains, an appropriate criterion used for the interaction analysis among variables and the loop pairing is suggested. Based upon the suggested criterion derived from the derivative relation of implicit function, the SISO pairing which has minimum interaction among control system variables and good control performance can be determined. The relative effect among diagonal gains and off-diagonal gains, which was not considered in other criteria, can be explained deterministically. Also, the criterion can be easily applied to partial MIMO pairing.

This criterion was applied to several examples to illustrate its usefulness in finding the feasible SISO pairing and MIMO pairing

Key Words : Citerion, Control system, Interaction analysis, Control performance SISO loop pairing, MIMO loop pairing

1. 서 론

일반적으로 제어구조 합성은 먼저 정성적 방법들[1,2,3]을 이용하여 가능한 제어변수, 측정변수 및 조작변수들의 집합을 구한 후, 정량적 방법들을 이용하여 집합들을 좀 더 세분화하고 가능하면 SISO(Single-Input Single-Output) pairing(제어변수와 조작변수들의 짝짓기)까지를 행하게 된다. MIMO(Multi Input Multi Ouptput) 제어이론이 많이 개발되었으나 아직도

화학공정제어는 제어시스템 조업의 편리함을 위해 가능하면 SISO 제어를 위한 loop구성이 중요하게 인식되고 있으며 부득이 한 경우에 한해 가능한 작은 수의 MIMO loop 구성을 정하고 있다.

제어 loop들의 상호작용을 최소화시키도록 제어변수와 조작변수들을 결합하는 방법(pairing)으로 Bristo[4]이 제시한 RGA(Relative Gain Array)는 정상상태 이득의 이용과 계산이 간다하여 loop들의 SISO pairing을 위한 정량적 기법으로 오랫동안 사용되어 왔다. 그러나 pairing을 하기 때문에 폐회로(closed loop)의 응답이 판별기준에 일치하지 않는 경우도 있어 이를 보완하는 연구도 꾸준히 진행되고 있다[5].

정상상태 이득행렬의 SVD(singular value decomposition)를 이용하여 새로운 loop pairing 기법을 제시하기도 하였으나 입력변수와 출력변수의 scaling에 의존하는 단점이 있으며[6], Mijiares 등[7]은 정상상태 이득행렬의 역행렬을 구하는 반복과정에서의 수렴속도를 이용하여 loop의 영향을 고려한 SISO pairing 기법을 제시한 바 있다.

한편, 상호작용이 심해 SISO pairing을 하기 어려운 경우 block 간의 상호작용을 고려하여 부분적으로 MIMO pairing을 택하는 연구도 진행되고 있다. Manousiouthakis 등[8]은 종래의 SISO pairing에 사용되는 RGA를 확장한 BRG(Block Relative Gain)을 제안하여 SISO pairing 보다 나은 결과를 얻었으며, 고[9]는 정상상태 이득행렬의 역행렬을 구하는 반복과정에서의 수렴속도를 이용하여 block loop의 영향이 고려된 합리적 MIMO pairing 기법을 제시한바 있다. 그러나 앞에서 언급한 방법들은 전달함수의 대각선상 원소의 크기에 대한 비대각선에 있는 원소의 크기의 영향을 효과적으로 해석하지 못하는 단점이 있다[10].

본 연구에서는 음 함수(implicit function)의 미분관계를 고려하여 정상상태 이득을 이용한 새로운 판별 기준을 제시하였다. 이 기준을 통해 조작변수들과 제어변수들간의 상호작용이 작고 제어성능이 우수한 SISO pairing을 정할 수 있었으며 기존의 기준이 고려하지 못한 대각선상에 있지 않은 이득의 영향을 효과적으로 설명할 수 있었다. 또한 상호작용이 심하여 부분적으로 MIMO pairing을 하는 경우에도 제시한 판별기준을 쉽게 적용 할 수 있었다. 그리고 여러 경우에 대해 적용 예제들을 통하여 제시한 방법의 검증과 응용성을 알아보았다.

2. 음 함수(Implicit Function) 미분을 이용한 판별기준

n 개의 조작변수(m)와 n 개의 제어변수(y)로 이루어진 비선형 제어 시스템의 입력-출력모델은 다음과 같이 표현할 수 있다[11].

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(m_1, m_2, \cdots, m_n) \\ y_2 &= h_2(m_1, m_2, \cdots, m_n) \\ &\vdots \\ y_n &= h_n(m_1, m_2, \cdots, m_n) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f_1(m_1, m_2, \cdots, m_n, y_1) &= h_1(m_1, m_2, \cdots, m_n) - y_1 \\ f_2(m_1, m_2, \cdots, m_n, y_2) &= h_1(m_1, m_2, \cdots, m_n) - y_2 \\ &\vdots \\ f_n(m_1, m_2, \cdots, m_n, y_n) &= h_1(m_1, m_2, \cdots, m_n) - y_n \end{aligned} \tag{2}$$

정상상태 값들($m_{1s}, m_{2s}, \cdots, m_{ns}, y_{1s}, y_{2s}, \cdots y_{ns}$)에 대하여 위의 식들을 선형화 시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1(m_1, m_2, \cdots, m_n, y_1) &= f_1(m_{1s}, m_{2s}, \cdots, m_{ns}, y_{1s}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial h_1}{\partial m_i}\right)_s (m_i - m_{is}) \right] - (y_1 - y_{1s}) \\ f_2(m_1, m_2, \cdots, m_n, y_2) &= f_2(m_{1s}, m_{2s}, \cdots, m_{ns}, y_{2s}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial h_2}{\partial m_i}\right)_s (m_i - m_{is}) \right] - (y_2 - y_{2s}) \\ &\vdots \\ f_n(m_1, m_2, \cdots, m_n, y_n) &= f_n(m_{1s}, m_{2s}, \cdots, m_{ns}, y_{ns}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial h_n}{\partial m_i}\right)_s (m_i - m_{is}) \right] - (y_n - y_{ns}) \end{aligned} \tag{3}$$

$\triangle f_i = f_i(m_1, m_2, \cdots, m_n, y_i) - f_i(m_{1s}, m_{2s}, \cdots, m_{ns}, y_{is})$,

$\triangle m_i = m_i - m_{is}$, $\triangle y_i = y_i - y_{is}$ 놓으면 식 (3)은 다음과 같다.

$$\triangle f_1 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial h_1}{\partial m_i} \right)_s \triangle m_i \right] - \triangle y_1$$

$$\triangle f_2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial h_2}{\partial m_i} \right)_s \triangle m_i \right] - \triangle y_2$$

$$\vdots$$

$$\triangle f_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial h_n}{\partial m_i} \right)_s \triangle m_i \right] - \triangle y_n \qquad (4)$$

MIMO feedback 제어 시스템의 조작변수와 제어변수간의 관계식은 일반적으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$m_1 = m_1(y_1, \ y_2, \ \cdots, \ y_n)$$
$$m_2 = m_2(y_1, \ y_2, \ \cdots, \ y_n)$$
$$\vdots$$
$$m_n = m_n(y_1, \ y_2, \ \cdots, \ y_n) \qquad (5)$$

제어 변수의 정상상태 값들($y_{1s}, y_{2s}, \cdots, y_{ns}$)에 대하여 위의 식들을 선형화 시키면 다음과 같다.

$$m_1(y_1, y_2, \cdots, y_n) = m_1(y_{1s}, y_{2s}, \cdots, y_{ns}) + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial m_1}{\partial y_i} \right)_s \triangle y_i \right]$$

$$m_2(y_1, y_2, \cdots, y_n) = m_2(y_{1s}, y_{2s}, \cdots, y_{ns}) + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial m_2}{\partial y_i} \right)_s \triangle y_i \right]$$

$$\vdots$$

$$m_n(y_1, y_2, \cdots, y_n) = m_n(y_{1s}, y_{2s}, \cdots, y_{ns}) + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial m_n}{\partial y_i} \right)_s \triangle y_i \right] \qquad (6)$$

$$\triangle m_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial m_1}{\partial y_i} \right)_s \triangle y_i$$

$$\triangle m_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial m_2}{\partial y_i} \right)_s \triangle y_i$$

$$\vdots$$

$$\triangle m_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial m_n}{\partial y_i} \right)_s \triangle y_i \qquad (7)$$

식 (7)은 식 (4)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\triangle f_1 = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h_1}{\partial m_i} \right)_s \left(\frac{\partial m_i}{\partial y_j} \right)_s \right] \triangle y_j - \triangle y_1$$

$$\triangle f_2 = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h_2}{\partial m_i} \right)_s \left(\frac{\partial m_i}{\partial y_j} \right)_s \right] \triangle y_j - \triangle y_2$$

$$\vdots$$

$$\triangle f_n = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h_n}{\partial m_i} \right)_s \left(\frac{\partial m_i}{\partial y_j} \right)_s \right] \triangle y_j - \triangle y_n \qquad (8)$$

이 식을 vector 방정식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\mathbf{f} = \mathbf{E}_M \, \mathbf{y} \qquad (9)$$

여기서 $\mathbf{f} = [\triangle f_1, \triangle f_2, \cdots, \triangle f_n]^T$

$$\mathbf{y} = [\triangle y_1, \triangle y_2, \cdots, \triangle y_n]^T$$

$$\mathbf{E}_M = \begin{bmatrix} e_{11}, & e_{12}, & \cdots, & e_{1n} \\ e_{21}, & e_{22}, & \cdots, & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{n1}, & e_{n2}, & \cdots, & e_{nn} \end{bmatrix}$$

$$e_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial m_k} \right)_s \left(\frac{\partial m_k}{\partial y_i} \right)_s - 1$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial m_k} \right)_s \left(\frac{\partial m_k}{\partial y_j} \right)_s$$

$$(i \neq j,\ i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

n×n 제어 시스템을 조업의 편리함을 위해 SISO 제어 시스템을 구성한다면 가능한 SISO pairing 집합의 수는 n ! 이다.

그 중 한 예로 $(m_1 - y_1)$, $(m_2 - y_2)$, $\cdots$, $(m_n - y_n)$ 으로 SISO 제어를 하는 시스템을 생각한다면, 식 (7)은

$$\triangle m_i = \left(\frac{\partial m_i}{\partial y_i} \right)_s \triangle y_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{10}$$

으로 표시할 수 있으며, 식 (10)을 식 (4)에 대입하면 다음과 같다.

$$\triangle f_1 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial h_1}{\partial m_i} \right)_s \left(\frac{\partial m_i}{\partial y_i} \right)_s \right] \triangle y_i - \triangle y_1$$

$$\triangle f_2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial h_2}{\partial m_i} \right)_s \left(\frac{\partial m_i}{\partial y_i} \right)_s \right] \triangle y_i - \triangle y_2$$

$$\vdots$$

$$\triangle f_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial h_n}{\partial m_i} \right)_s \left(\frac{\partial m_i}{\partial y_i} \right)_s \right] \triangle y_i - \triangle y_n \tag{11}$$

이 식을 vector 방정식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\mathbf{f} = \mathbf{E_S}\,\mathbf{y} \tag{12}$$

여기서 $\mathbf{f} = [\triangle f_1,\ \triangle f_2,\ \cdots,\ \triangle f_n]^T$

$\mathbf{y} = [\triangle y_1,\ \triangle y_2,\ \cdots,\ \triangle y_n]^T$

$$\mathbf{E_S} = \begin{bmatrix} e_{11}, & e_{12}, & \cdots, & e_{1n} \\ e_{21}, & e_{22}, & \cdots, & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{n1}, & e_{n2}, & \cdots, & e_{nn} \end{bmatrix}$$

$$e_{ii} = \frac{\partial h_i}{\partial m_i} \frac{\partial m_i}{\partial y_i} - 1$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$e_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial y_j}$$

$$(i \neq j,\ i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

가능한 모든 경우의 SISO pairing 시스템에 대한 제어에서도 $\mathbf{E_S}$ 행렬은 그 값이 다를 뿐 형태는 같다.

Vector의 성질에서

$$\max \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{f}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \max \frac{\mathbf{y}^T\ \mathbf{E_S}^T\ \mathbf{E_S}\,\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\ \mathbf{y}} = \| \boldsymbol{E_S} \|^2 = \lambda_{max}(\ \boldsymbol{E_S}^T\ \boldsymbol{E_S}) \tag{13}$$

의 관계를 가지고 있으며 $\| \mathbf{E_S} \|$ 는 $\mathbf{E_S}$ 행렬의 norm 이다[12].

$\dfrac{\mathbf{f}^T \mathbf{f}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \dfrac{\| \mathbf{f} \|^2}{\| \mathbf{y} \|^2}$ 는 단위 크기를 갖는 $\mathbf{y}$ 의 편차(즉, 설정치의 변화)에 대해 $\mathbf{f}$ 의 편차(선형화된 식으로부터 벗어나는 정도)의 제곱의 합을 의미하며, $\max \dfrac{\mathbf{f}^T \mathbf{f}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}$ 는 $\mathbf{y}$ 의 편차들에 대해 가능한 $\mathbf{f}$ 의 편차의 제곱의 합이 가장 큰 값을 뜻한다. 1×1 시스템에서는 $\| \mathbf{E_S} \| = 0$ 이고, n×n 시스템에서 MIMO 제어구조는 항상 $\| \mathbf{E_M} \| = 0$ 이 된다.

0 의 의미는 제어 시스템에서 설정치를 변하더라도 선형제어(식 (7), 식 (10))를 통하여 선형화된 식 (3)을 다시 만족할 수 있다는 것을 뜻한다. 따라서 n×n 시스템에서 n ! 의 SISO 제어

구조는 n ! 의 다른 $\| \mathbf{E}_S \|$ 값을 나타내며 loop pairing을 위한 관점에서 보면 이 값이 작은 SISO 제어 구조를 선택하여야 한다.

* 제시하는 새로운 판별기준 *

제어 시스템 변수들간의 상호작용 해석 및 루프 페어링을 위하여 $\mathbf{E}_S$ 행렬의 norm $[\lambda_{max}(\mathbf{E}_S^T \mathbf{E}_S)^{1/2}]$을 가장 작게 하는 SISO 제어구조를 선택한다. 또한 경험적으로 가능한 SISO 구조에 대한 λ_{max} 값이 모두 1 보다 클 때에는 부분적 MIMO pairing을 고려하는 것이 바람직하다.

3. 선형 시스템에 대한 응용

선형화된 시스템을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 &= g_{11}\Delta m_1 + g_{12}\Delta m_2 \cdots + g_{1n}\Delta m_n \\
\Delta y_2 &= g_{21}\Delta m_1 + g_{22}\Delta m_2 \cdots + g_{2n}\Delta m_n \\
&\vdots \\
\Delta y_n &= g_{n1}\Delta m_1 + g_{n2}\Delta m_2 \cdots + g_{nn}\Delta m_n
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f_1 &= g_{11}\Delta m_1 + g_{12}\Delta m_2 \cdots + g_{1n}\Delta m_n - \Delta y_1 \\
\Delta f_2 &= g_{11}\Delta m_1 + g_{12}\Delta m_2 \cdots + g_{1n}\Delta m_n - \Delta y_2 \\
&\vdots \\
\Delta f_n &= g_{11}\Delta m_1 + g_{12}\Delta m_2 \cdots + g_{1n}\Delta m_n - \Delta y_n
\end{aligned} \tag{15}$$

식 (14)를 vector 방정식으로 표시하면

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\,\mathbf{m} \tag{16}$$ 이다.

여기서

$$\mathbf{m} = [\Delta m_1, \Delta m_2, \cdots, \Delta m_n]^T$$

$$\mathbf{y} = [\Delta y_1, \Delta y_2, \cdots, \Delta y_n]^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11}, & g_{12}, & \cdots, & g_{1n} \\ g_{21}, & g_{22}, & \cdots, & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1}, & g_{n2}, & \cdots, & g_{nn} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G}^{-1}$가 존재한다면

$$\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}\,\mathbf{y} \tag{17}$$

가 된다. 여기서

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11}, & \hat{g}_{12}, & \cdots, & \hat{g}_{1n} \\ \hat{g}_{21}, & \hat{g}_{22}, & \cdots, & \hat{g}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{g}_{n1}, & \hat{g}_{n2}, & \cdots, & \hat{g}_{nn} \end{bmatrix}$$

조작변수 ($m_1, m_2, \ldots m_n$)과 제어변수 ($y_1, y_2, \ldots y_n$)를 동시에 고려하는 전체적인 MIMO 선형 제어 시스템이라면 식 (7)에 해당하는 Δm_i 는

$$\Delta m_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{g}_{ij}\,\Delta y_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{18}$$

로 표시되고, 식 (8)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\Delta f_1 &= \sum_{j=1}^{n} \Big[\sum_{i=1}^{n} g_{1i}\,\hat{g}_{ij} \Big] \Delta y_j - \Delta y_1 \\
\Delta f_2 &= \sum_{j=1}^{n} \Big[\sum_{i=1}^{n} g_{2i}\,\hat{g}_{ij} \Big] \Delta y_j - \Delta y_2 \\
&\vdots \\
\Delta f_n &= \sum_{j=1}^{n} \Big[\sum_{i=1}^{n} g_{2i}\,\hat{g}_{ij} \Big] \Delta y_j - \Delta y_n
\end{aligned} \tag{19}$$

판별기준에 필요한 $\mathbf{E}_M$ 행렬의 원소는 다음과 같다.

$$e_{ii}=\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\,\hat{g}_{ki}-1 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\,\hat{g}_{kj} \quad (i\neq j,\ i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{20}$$

만일 SISO pairing 구조에 하나인 (m_1 - y_1), (m_2 - y_2), … , (m_n - y_n) 으로 pairing 된 제어 시스템 이라면 식 (10)에 해당되는 $\triangle m_i$ 는

$$\triangle m_i=\hat{g}_{ii}\,\triangle y_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{21}$$

이 되며, $\mathbf{E}_S$ 행렬의 원소는 다음과 같다.

$$e_{ii}=g_{ii}\,\hat{g}_{ii}-1 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$e_{ij}=g_{ij}\,\hat{g}_{jj} \quad (i\neq j,\ i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{22}$$

선형 시스템의 전체적인 MIMO 제어시스템의 행렬 $\mathbf{E}_M$ 의 원소(식 (20))는 행렬 연산으로부터 모두 0 이 되며 $\lambda_{max}(\mathbf{E}_M{}^T\,\mathbf{E}_M)=0$ 이 된다. 이는 전체적인 MIMO 제어를 할 경우 다른 판별 기준인 BRG가 1 이 되는 것과 마찬가지 의미를 가지며[8] Jacobian 반복 행렬을 이용하는 판별 기준에서 수렴 속도가 ∞ 가 되는 것과 같다[9].

4. 다른 기준과의 비교

간단한 2×2 선형시스템을 택하여 본 연구에서 제시한 기준과 기존의 다른 기준의 차이점을 비교하면 다음과 같다.

2×2 시스템 :

$$\triangle y_1=g_{11}\,\triangle m_1+g_{12}\,\triangle m_2$$
$$\triangle y_2=g_{21}\,\triangle m_1+g_{22}\,\triangle m_2 \tag{23}$$

이 시스템에서 가능한 SISO 구조는 (m_1 - y_1), (m_2 - y_2) 와 (m_1 - y_2), (m_2 - y_1) 이다.

- RGA 판별기준[4]

RGA 행렬은 다음과 같이 표시되며,

$$\Lambda=\begin{bmatrix} g_{11}\,\hat{g}_{11} & g_{12}\,\hat{g}_{21} \\ g_{21}\,\hat{g}_{12} & g_{22}\,\hat{g}_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{g_{11}\,g_{22}-g_{12}\,g_{21}}\begin{bmatrix} g_{11}\,g_{22} & -g_{12}\,g_{21} \\ -g_{21}\,g_{12} & g_{11}\,g_{22}\end{bmatrix} \tag{24}$$

여기서 $\hat{g}_{11}$, $\hat{g}_{12}$, $\hat{g}_{21}$, $\hat{g}_{22}$ 는 $\mathbf{G}^{-1}$ 행렬의 원소들이다.

$g_{11}\,\hat{g}_{11}$, $g_{22}\,\hat{g}_{22}$ 가 1 에 가까우면, 즉 $|g_{11}\,g_{22}| \gg |g_{12}\,\hat{g}_{21}|$ 이면 (m_1 - y_1), (m_2 - y_2)로 SISO pairing 하고 만약 $g_{12}\,\hat{g}_{21}$, $g_{21}\,\hat{g}_{12}$ 가 1 에 가까우면 (m_1 - y_2), (m_2 - y_1)로 pairing 한다. 또한 행렬의 각 열의 원소 합과 각 행의 원소의 합은 1 이므로 계산이 간단하다.

- 수렴속도를 이용한 판별 기준[7]

(m_1 - y_1), (m_2 - y_2) 인 SISO 구조를 판별하기에 필요한 기준 행렬은

$$A=\begin{bmatrix} 0 & g_{11}^{-1}\,g_{12} \\ g_{22}^{-1}\,g_{21} & 0\end{bmatrix} \tag{25}$$

이며, A 행렬의 eigenvalue를 구하는 식은 다음과 같다

$$\lambda^2-\frac{g_{12}\,g_{21}}{g_{11}\,g_{22}}=0 \tag{26}$$

$|g_{11}\,g_{22}| \gg |g_{12}\,\hat{g}_{21}|$ 이면, λ 값은 작아지면 수렴 속도는 커진다. 같은 방법으로 (m_1 - y_2), (m_2 - y_1) 구조에 대해서도 A 행렬을 구하고 eigenvalue를 구하면 서로 반대의 성질을 나타낸다. 이로부터 수렴 속도가 큰 구조를 택하도록 이 기준을 제시하고 있다.

- 제시한 새로운 기준

(m_1 - y_1), (m_2 - y_2)인 구조를 해석하기 위한 $\mathbf{E}_S$ 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{E_S}=\begin{bmatrix} g_{11}\,\hat{g}_{11}-1 & g_{12}\,\hat{g}_{22} \\ g_{21}\,\hat{g}_{11} & g_{22}\,\hat{g}_{22}-1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{g_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}}-1 & \dfrac{g_{12}g_{11}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}} \\ \dfrac{g_{21}g_{22}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}} & \dfrac{g_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}}-1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$\mathbf{E_S}$ 행렬의 대각선 상에 놓인 원소 (e_{11}, e_{22})는 앞의 두 판별방법에서 제시한 판별효과를 나타내며 비대각선 상에 놓인 원소는 두 기준에서 나타내지 못하고 있는 정상상태 이득의 크기의 비의 영향을 나타낸다.

제시한 판별기준이 기존의 다른 기준에서 다루지 못하는 대각선상의 원소에 대한 비 대각선 상의 원소의 비의 영향을 어떻게 다루게 되는지 2×2 시스템에 대해 수학적으로 해석해 보면 다음과 같다.

원소의 비를 각각 $r_1=g_{21}/g_{11}$, $r_2=g_{12}/g_{22}$ 라 하면, 식 (27)은 다음과 같이 나타낼 수 있으며

$$\mathbf{E_S}=\begin{bmatrix} \dfrac{r_1\,r_2}{1-r_1\,r_2} & \dfrac{r_2}{1-r_1\,r_2} \\ \dfrac{r_1}{1-r_1\,r_2} & \dfrac{r_1\,r_2}{1-r_1\,r_2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

또한 $\mathbf{E_S}^T\,\mathbf{E_S}$ 는 다음과 같다

$$\mathbf{E_S}^T\,\mathbf{E_S}=\begin{bmatrix} \dfrac{r_1^2\,r_2^2+r_1^2}{(1-r_1\,r_2)^2} & \dfrac{r_1\,r_2(r_1+r_2)}{(1-r_1\,r_2)^2} \\ \dfrac{r_1\,r_2(r_1+r_2)}{(1-r_1\,r_2)^2} & \dfrac{r_1^2\,r_2^2+r_2^2}{(1-r_1\,r_2)^2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

다른 판별 기준에서는 r_1 과 r_2 영향보다는 $r_1\,r_2$ 의 영향을 다루고 있다. 즉 $r_1\,r_2 \approx 0$ 이면 (m_1 - y_1), (m_2 - y_2) 제어구조를 타당한 pairing으로 선택하고 있다. 그러나 $r_1\,r_2 \approx 0$ 인 경우에서도 $r_1 > 1$ 혹은 $r_2 > 1$ 인 경우에는 대각선상의 원소의 비의 영향으로 pairing 이 잘못되므로 주의가 필요하다고 지적한 바 있다 [6].

본 연구에서 제시한 기준에서는 이러한 점을 지적할 수 있다는 장점이 있다. 이를 알아보기 위하여 $r_1\,r_2 \approx 0$ 이면서 $r_1 \approx 0$ 이고 $r_2 > 1$ 인 경우 (예제2)에 대해 식 (29)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{E_S}^T\,\mathbf{E_S}=\begin{bmatrix} 0 & r_1\,r_2^2 \\ r_1\,r_2^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{max}(\,\mathbf{E_S}^T\,\mathbf{E_S})=\frac{r_2^2\;+\;r_2^2\sqrt{1+4\,r_1^2}}{2}\;\cong\;r_2^2$$

즉, 원소의 비 (r_1, r_2)가 하나라도 1 보다 크면 클수록 λ_{max} 값은 1로 부터 점점 커져 pairing 이 합당하지 않다고 제시하게 되며, 이는 다른 기존의 판별 기준에서 제시하지 못하는 점을 잘 지적해 주는 것이라 하겠다.

5. 부분적 MIMO pairing에 대한 응용

상호 작용이 심한 복잡한 공정에서 SISO pairing을 하기 어려운 경우 사호작용을 고려하여 정상상태 이득을 block으로 잡아 부분적으로 MIMO pairing을 택하여야한다. 앞에서 제시한 기준은 같은 원리로 쉽게 부분적 MIMO pairing 기준으로 확장할 수 있다.

n 개의 조작변수와 n 개의 제어변수가 SISO pairing으로는 상호작용이 심하여, p 개의 조작변수와 p 개의 제어변수를 pairing ($m_1,m_2,\cdots,m_p$ - $y_1,y_2,\cdots,y_p$) 하고 나머지 (n - p) 개의 조작변수와 (n - p) 개의 제어변수를 pairing ($m_{p+1},m_{p+2},\cdots,m_n$ - $y_{p+1},y_{p+2},\cdots,y_n$) 하는 부분적 MIMO pairing 시스템에 대하여 생각해 보자.

식 (7)은

$$\triangle m_i\;=\;\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\partial\,m_i}{\partial\,y_j}\right)_s\triangle y_j$$
$$(i=1,\;2,\;\cdots\;,\;p)$$

$$\Delta m_i = \sum_{j=p+1}^{n} \left(\frac{\partial m_i}{\partial y_j}\right)_s \Delta y_j$$
$$(i=p+1,\ p+2,\ \cdots,\ n) \qquad (30)$$

가 되며, 식 (30)을 식 (4)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta f_i = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial h_i}{\partial m_j}\right)_s \left(\frac{\partial m_j}{\partial y_k}\right)_s \Delta y_k$$
$$+ \sum_{k=p+1}^{n}\sum_{j=p+1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial m_j}\right)_s \left(\frac{\partial m_j}{\partial y_k}\right)_s \Delta y_k - \Delta y_i$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (31)$$

vector 방정식으로 표시하여 $\mathbf{E}_{PM}$ 행렬의 원소를 구하면 다음과 같다.

$$e_{ii} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial h_i}{\partial m_k}\right)_s \left(\frac{\partial m_k}{\partial y_i}\right)_s - 1 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

$$e_{ii} = \sum_{k=p+1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial m_k}\right)_s \left(\frac{\partial m_k}{\partial y_i}\right)_s - 1 \qquad (i=p+1,\ p+2,\ \cdots,\ n)$$

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial h_i}{\partial m_k}\right)_s \left(\frac{\partial m_k}{\partial y_j}\right)_s$$
$$(i \neq j,\ i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

$$e_{ij} = \sum_{k=p+1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial m_k}\right)_s \left(\frac{\partial m_k}{\partial y_j}\right)_s$$
$$(i \neq j,\ i,j=p+1,\ p+2,\ \cdots,\ n)$$

$$e_{ij} = \sum_{k=p+1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial m_k}\right)_s \left(\frac{\partial m_k}{\partial y_j}\right)_s$$
$$(i=1,2,\cdots,p,\ \ j=p+1,p+2,\cdots,n)$$

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial h_i}{\partial m_k}\right)_s \left(\frac{\partial m_k}{\partial y_j}\right)_s$$
$$(i=p+1,p+2,\cdots,n,\ \ j=1,2,\cdots,p)$$

$$(32)$$

변수들의 block을 바꿔 각 경우에 대해 $\mathbf{E}_{PM}$ 행렬을 구하여 $\lambda_{max}(\mathbf{E}_{PM}{}^T \mathbf{E}_{PM})$ 를 계산하였을 때 0 에 가장 가까운 block MIMO 제어 구조를 택하는 것이 상호작용이 작은 합리적인 부분적 MIMO pairing이라 할 수 있다.

6. 적용 결과 및 검토

예 1) 정상상태 이득 행렬이 다음과 같은 2×2 제어 시스템을 생각해 보자.

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \end{bmatrix}$$

- RGA

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.04 \\ 0.04 & 0.96 \end{bmatrix}$$

- 수렴속도를 이용한 기준

(m_1 - y_1), (m_2 - y_2) 의 수렴성 (S(A)) : 0.204

(m_1 - y_2), (m_2 - y_1) 의 수렴성 (S(A)) : 4.899

- 제시한 기준

(m_1 - y_1), (m_2 - y_2) 의 구조 : 0.323

(m_1 - y_2), (m_2 - y_1) 의 구조 : 1.012

세 기준 모두 (m_1 - y_1), (m_2 - y_2) SISO pairing 하는 것이 바람직 한 것으로 판별하고 있으며, 대각선 상에 있는 이득과 비 대각선 상의 이득의 비가 작은 경우(본 예제)에는 변수들간의 상호작용이 작아 판결 기준들이 같은 결과를 제시하였다.

예 2) 다음은 Friedly[6] 가 RGA 기준이 SISO paring 기법으로서 보완이 필요하다고 하면서 제시한 예의 정상상태 model 식이다.

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.01 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \end{bmatrix}$$

◦ RGA

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.901 & 0.091 \\ 0.091 & 0.901 \end{bmatrix}$$

• 수렴속도를 이용한 기준

$(m_1 - y_1)$, $(m_2 - y_2)$ 의 수렴성 (S(A)) : 0.316

$(m_1 - y_2)$, $(m_2 - y_1)$ 의 수렴성 (S(A)) : 3.16

• 제시한 기준

$(m_1 - y_1)$, $(m_2 - y_2)$ 의 구조 : 9.09

$(m_1 - y_2)$, $(m_2 - y_1)$ 의 구조 : 9.181

기존의 두 기준은 상호작용이 상당히 작은 것으로 나타내고 있어 이 제어 시스템의 paring은 $(m_1 - y_1)$, $(m_2 - y_2)$를 제시하고 있으나, 본 연구에서 제시한 기준에서는 $(m_1 - y_1)$, $(m_2 - y_2)$ 구조나 $(m_1 - y_2)$, $(m_2 - y_1)$ 구조가 SISO pairing 하기에는 부적합한 것으로 판결하고 있다. 이는 정상상태 이득의 비가 비슷하여 상호작용이 심하기 때문이며 이 예에 대해 Friedly[6]은 closed-loop response가 이러한 현상이 나타난다고 보고한 바 있다. 따라서 본 연구에서 제시하는 기준은 두 기준의 미비한 점을 보완하여 좀 더 나은 기법이라 할 수 있다.

예 3) 다음은 초임계 추출 공정[13]의 정상상태 model 식이다.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_e \\ \Delta P_s \\ \Delta m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37.55 & 3.60 & 0.0852 \\ 1854.91 & -695.52 & 0.0751 \\ 1091.12 & 104.65 & 0.0442 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_{v_1} \\ \Delta C_{v_2} \\ \Delta P_p \end{bmatrix}$$

Pe : 추출기의 압력
Ps : 분리기의 압력
m_3 : 유량
Cv_1 : 제어 valve 1
Cv_2 : 제어 valve 2
Pp : pump의 압력

• RGA

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.018 & 0 & 0.982 \\ 0.204 & 0.796 & 0 \\ 0.778 & 0.204 & 0.018 \end{bmatrix}$$

• 제시한 기준

(Pe - Pp), (Ps - Cv_2), (m_3 - Cv_1) 의 구조 : 5.32

(Pe - Pp), (Ps - Cv_1), (m_3 - Cv_2) 의 구조 : 5.35

(Pe - Cv_1), (Ps - Cv_2), (m_3 - Pp) 의 구조 : 5.49

RGA 판별법은 (Pe - Pp), (Ps - Cv_2), (m_3 - Cv_1) 구조를 추천하거나 제시한 방법은 변수들만의 상호작용이 심하여 마땅한 SISO pairing 구조가 없다고 제시하고 있다. 실제 동특성을 고려하여 폐회로 응답을 구한 결과 에서도 RGA의 판별이 틀렸으며 SISO 제어가 어렵다고 밝힌 바 있다.

예 4) 다음은 Manousiouthakis[8]가 BRG 기준을 적용하기 위해 제시한 4×4 시스템(보일러 시스템)의 정상상태 model 식이다

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \\ \Delta y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 1.0 & 0.4 & 0.35 \\ 0.35 & 0.4 & 1.0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ \Delta m_4 \end{bmatrix}$$

• RGA 와 BRG
RGA (BRG(1)) =

	m_1	m_2	m_3	m_4
y_1	1.748	-0.686	-0.096	0.034
y_2	-0.727	1.874	-0.092	-0.055
y_3	-0.055	-0.092	1.874	-0.727
y_4	0.034	-0.096	-0.686	1.748

BRG(2) =

	m_1+m_2	m_1+m_3	m_1+m_4	m_2+m_3	m_2+m_4	m_3+m_4
y_1	1.062	1.652	1.782	-0.082	-0.652	-0.062
y_2	1.147	-0.819	-0.782	1.782	1.819	-0.147
y_3	-0.147	1.819	-0.782	1.782	-0.819	1.147
y_4	-0.062	-0.652	1.782	-0.782	1.652	1.062

BRG(3) =

	$m_1+m_2+m_3$	$m_1+m_2+m_4$	$m_1+m_3+m_4$	$m_2+m_3+m_4$
y_1	0.966	1.096	1.686	-0.748
y_2	1.056	-1.092	-0.874	1.727
y_3	1.727	-0.874	1.092	1.056
y_4	-0.748	1.686	1.096	0.966

• 수렴속도를 이용한 기준

pairing	S(A)
$(y_1 - m_1), (y_2 - m_2), (y_3 - m_3), (y_4 - m_4)$	1.28
$(y_1, y_2 - m_1, m_2), (y_3, y_4 - m_3, m_4)$	0.41
$(y_1, y_2, y_3 - m_1, m_2, m_3), (y_4 - m_4)$	0.65
$(y_1, y_2, y_3 - m_1, m_2, m_3), (y_3 - m_3)$	0.68

• 제시한 기준

pairing	max ‖E‖
$(y_1 - m_1), (y_2 - m_2), (y_3 - m_3), (y_4 - m_4)$	3.15
$(y_1, y_2 - m_1, m_2), (y_3, y_4 - m_3, m_4)$	0.70
$(y_1, y_2, y_3 - m_1, m_2, m_3), (y_4 - m_4)$	1.65
$(y_1, y_2, y_3 - m_1, m_2, m_3), (y_3 - m_3)$	1.57

세 판별법이 모두 $(y_1, y_2 - m_1, m_2)$, $(y_3, y_4 - m_3, m_4)$ 부분적 MIMO pairing 이 최적 제어 구조임을 나타내고 있으며, 이는 대각선상의 block 이득과 비 대각선상의 block 이득의 비가 작아 같은 결과를 제시하고 있다.

7. 결 론

이상의 연구 결과로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

1. 음함수(implicit function)의 미분 관계를 고려하여, 유도한 본 연구의 판별 기준을 통해 조작변수들과 제어변수들간의 상호작용 해석 및 SISO loop pairing을 합리적으로 정할 수 있었다.

2. 기존의 판별방법이 해석하지 못한 대각선 정상상태 이득에 대한 대각선에 있지 않은 정상상태 이득의 영향을 효과적으로 고려할 수 있었다.

3. 상호작용이 심하여 부분적으로 MIMO paring을 하는 경우에도 제시한 판별기준을 쉽게 적용이 가능하였다.

감 사

본 연구는 한국과학재단의 지원에 의하여 수행하였으므로 이에 감사합니다.

참 고 문 헌

1. R. Govind and G. J. Powers, "Control System Synthesis Strategies," *AIChE J.*, vol. 28, pp. 60, 1982.
2. T. Umeda, T. Kuriyama and A. Ichikawa, "A Logical Structure for Process Control System Synthesis", *Proc. IFAC*, 1978.
3. M. Morari, Y. Arkun and G. Stephanopoulos, "Studies in the Synthesis of Control Structures for Chemical Processes, Part I. Formulation of the Ploblem, Process Decomposition and the Classification of the Control Tasks, Analysis of the Optimizing Control Structures," *AIChE J.*, vol. 26, pp. 220, 1980.
4. E. Bristol, "On New Measure of Interaction for Multivariable Process Control," *IEEE Trans. Auto. Control, AC-11*, pp. 133, 1966.
5. J. C. Friedly, "Use of the Bristol Array in Designing Noninteractioning Control Loops. A Limitation and Extension," *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, vol. 23, pp. 469, 1984.
6. H. Lan, J. Alvarez and K. F. Jensen, "Synthesis of Control Structure by Singular Value Analysis : Dynamic Measures of Sensitivity and Interaction," *AIChE J.*, vol. 31, pp. 427, 1984.
7. G. Mijiares, et al., "New Criterion for the Paring of Control and Manipulated Variables," *AIChE J.*, vol. 32, pp. 1439, 1986.
8. V. Manousiouthakis, R. Savage and Y. Arkun, "Synthesis of Decentralized Process Control Structure Using the Concept of Block Relative Gain," *AIChE J.*, vol. 32, pp. 991, 1986.
9. 고 재욱, "공정제어 구조 합성에 대한 상호 작용 해석", *87 한국 자동제어 학술회의*, pp. 643, 1987.
10. N. Jensen, D. G. Fisher, and S. L. Shah, "Interaction Analysis in Multivariable Control System Design," *AIChE J.*, vol. 32, pp. 959, 1986.
11. G. Stephanopoulos, *Chemical Process Control*, Pretice-Hall, N.J., 1984.
12. G. Strang, *Linear Algebra and its Application*, Academic Press, N.Y, 1980..
13. 이 원홍, 유 기풍과 이 광순, "증류공정의 소비에너지 최소화 방안 개발", 제2차 보고서, 한국과학재단, 1988.