

여러 스패를 갖는 티모센코 보 구조물의 이동하중에 의한 진동 해석

홍성욱* · 김종욱**
(1999년 3월 12일 접수)

Vibration Analysis of Multi-Span Timoshenko Beams Due to Moving Loads

Seong-Wook Hong and Jong-Wook Kim

Key Words: Multi-Span Beam(다단 보), Moving Load(이동하중), Spatial State Equation(공간 상태 방정식), Laplace Transform(라플라스 변환).

Abstract

The present paper proposes a new dynamic analysis method for multi-span Timoshenko beam structures supported by joints with damping subject to moving loads. An exact dynamic element matrix method is adopted to model Timoshenko beam structures. A generalized modal analysis method is applied to derive response formulae for beam structures subject to moving loads. The proposed method offers an exact and closed form solution. Two numerical examples are provided for validating and illustrating the proposed method. In the first numerical example, a single span beam with multiple moving loads is considered. A dynamic analysis on a multi-span beam under a moving load is considered as the second example, in which the flexibility and damping of supporting joints are taken into account. The numerical study proves that the proposed method is useful for the vibration analysis of multi-span beam-type structures by moving loads.

1. 서론

구조물에 이동하중이 가해지면 정적인 하중에 비해 큰 변형을 일으킨다. 이와 같은 이동하중에 의한 진동 문제는 기계나 토목 구조물에서 많이 나타나기 때문에 큰 관심을 끌어 왔다. 단순 지지 보에 대해 이동하중의 효과를 해석적인 모드합성법에 의해 검토한 초기의 연구⁽¹⁾ 이후로 많은 연구가 있어 왔으며 최근에도 해석적인 방법^(2,3)이나 유한요소법,^(4~7) 또는 모드가정법^(8,9) 등에 의한 연구가 활발하다. 이동하중 문제는 하

중이 연속적으로 이동하는 모든 위치에 대한 해를 필요로 하기 때문에 닫힌 꼴의 해를 활용하는 것이 매우 편리하다. 최근에는 이와 같은 점을 고려하여 엄밀하면서 닫힌 꼴인 해를 활용하는 방법에 대한 연구 결과가 발표되고 있다.^(10,11) 본 연구에서는 다단 연속 보 구조물에 감쇠까지 포함된 가장 일반적인 모델에 대해 이동하중이 가해질 때 엄밀해를 얻을 수 있는 새로운 방법을 제안하였다.

엄밀한 모델링을 위해 저자들이 제안한 바 있는 엄밀한 동적 요소를 이용하는 방법⁽¹²⁾을 사용하였다. 이 방법은 보요소로 모델링 할 수 있는 모든 구조물에 적용이 가능하다.⁽¹³⁾ 그러나 엄밀한 동적 요소를 이용하는 방법은 요소 내부에 초월함수를 포함하게 되므로 기존의 모드해석기법

* 회원, 금오공과대학교 기계공학부

** 금오공과대학교 대학원

을 적용할 수 없게 된다. 따라서 본 연구에서는 엄밀한 동적 요소를 이용한 모델로부터 모드합성법을 활용하기 위해 일반화된 모드해석법을 제안하였다. 특히 모드형상함수를 이용하여 이동하중에 대한 시간응답식을 유도하였다.

제안된 방법은 엄밀하고도 닫힌 꼴의 응답식을 제공하게 되므로 구조물에 대한 고유치 문제만 풀면 여러 가지 조건에서의 응답을 손쉽게 구할 수 있다. 또한 대부분의 실제 구조물에서는 수개의 모드만으로 주파수 응답이나 시간 응답을 충분한 정확도로 계산할 수 있으므로 계산의 효율성도 매우 높다. 제안한 방법을 검증하고 본 연구에서 고려한 지지강성과 감쇠의 효과를 검토하기 위해 두개의 수치예제를 도입하였다. 수치예제로부터 제안된 방법의 응용방법을 예시하였으며 그 우수성을 확인하였다.

2. 모델링

Fig. 1과 같은 Timoshenko 보의 운동방정식을 보의 종축 좌표(x)에 대한 상태공간 형식으로 쓰면 다음과 같다.

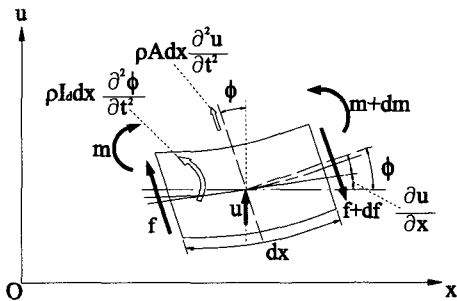


Fig. 1 Timoshenko beam model.

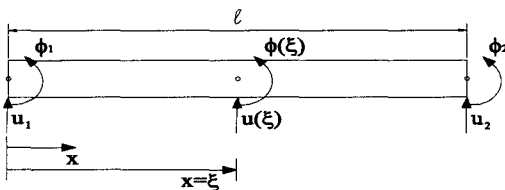


Fig. 2 A uniform beam and the sign conventions.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \phi - \frac{f}{kAG} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{m}{EI_d} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial m}{\partial x} &= f + \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, u, ϕ 는 각각 보의 횡 변위 및 회전 변위이고 f, m 은 전단력 및 모멘트를 나타낸다. 또, ρ, G, E 는 보의 물성치로서 각각 밀도, 전단 강성 계수(shear modulus), 영율(Young's modulus)을 의미하며, A 는 단면적, k 는 단면 형상 보정계수(shape factor)이다. 또, I_d 는 단면 관성 모멘트(area moment of inertia)를 의미한다.

식 (1)을 시간에 대해 라플라스 변환하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = B\Psi \quad (2)$$

여기서

$$\Psi = \begin{Bmatrix} u^* \\ \phi^* \\ f^* \\ m^* \end{Bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서

$$a = \rho I_d s^2, b = \frac{1}{EI_d}, c = \rho A s^2, d = \frac{1}{kAG}.$$

또 s 는 시간에 관한 라플라스 변수이며 상첨자 *는 해당 변수의 라플라스 변환 결과식을 의미한다.

식 (2)를 다시 공간 좌표 x 에 관하여 라플라스 변환하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$\widehat{\Psi}(s, \lambda) = [\lambda I - B]^{-1} \Psi(s, 0) \quad (3)$$

여기서, λ 는 공간 좌표에 관한 라플라스 변수이며 (\sim) 는 공간 좌표에 대해 라플라스 변환한 결과를 의미한다.

한편 $[\lambda I - B]^{-1}$ 를 요소별로 정리한 후 식 (3)을 공간 좌표에 대해 라플라스 역변환하고 그 결과식을 Fig. 2와 같은 경계치의 값을 부가한 후, 식을 재배치하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} f_1^* \\ m_1^* \\ f^*(\xi) \\ m^*(\xi) \end{Bmatrix} = D^b(s, \xi) \begin{Bmatrix} u_1^* \\ \phi_1^* \\ u^*(\xi) \\ \phi^*(\xi) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서,

$$D^b(s, \xi) = \begin{bmatrix} D_{11}(s, \xi) & D_{12}(s, \xi) \\ D_{21}(s, \xi) & D_{22}(s, \xi) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} d_1(s, \xi) & d_2(s, \xi) & d_4(s, \xi) & d_5(s, \xi) \\ d_2(s, \xi) & d_3(s, \xi) & -d_5(s, \xi) & d_6(s, \xi) \\ d_4(s, \xi) & -d_5(s, \xi) & d_1(s, \xi) & -d_2(s, \xi) \\ d_5(s, \xi) & d_6(s, \xi) & -d_2(s, \xi) & d_3(s, \xi) \end{bmatrix}$$

이때,

$$\Delta = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ 2b(1 - \cosh \alpha\xi \cosh \beta\xi) + \frac{ab}{c} \{ \mu^2 + \nu^2 \} \sinh \alpha\xi \sinh \beta\xi \}$$

$$d_1 = \frac{1}{\Delta} \{ -\mu \sinh \alpha\xi \cosh \beta\xi + \nu \sinh \beta\xi \cosh \alpha\xi \}$$

$$d_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{(\beta\mu + \alpha\nu)}{\alpha^2 - \beta^2} \sinh \alpha\xi \sinh \beta\xi - \frac{ab - cd}{\alpha^2 - \beta^2} (1 - \cosh \alpha\xi \cosh \beta\xi) \right\}$$

$$d_3 = \frac{1}{\Delta} \frac{ab}{bc} \{ \nu \sinh \alpha\xi \cosh \beta\xi - \mu \sinh \beta\xi \cosh \alpha\xi \}$$

$$d_4 = \frac{1}{\Delta} \{ \mu \sinh \alpha\xi - \nu \sinh \beta\xi \}$$

$$d_5 = \frac{1}{\Delta} \{ \cosh \alpha\xi - \cosh \beta\xi \}$$

$$d_6 = \frac{1}{\Delta} \frac{ab}{bc} \{ -\nu \sinh \alpha\xi + \mu \sinh \beta\xi \}$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) + \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$\mu = \frac{(cd - \alpha^2)}{\alpha}, \quad \nu = \frac{(cd - \beta^2)}{\beta}$$

따라서 임의의 균일한 유한길이 보 요소에 대해 다음과 같은 방정식을 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} f_1^* \\ m_1^* \\ f_2^* \\ m_2^* \end{Bmatrix} = D^b(s, \ell) \begin{Bmatrix} u_1^* \\ \phi_1^* \\ u_2^* \\ \phi_2^* \end{Bmatrix} \quad (5)$$

한편 구조물을 구성하는 또 하나의 요소로서 보의 지지부(supporting element)를 스프링과 감쇠로 표현하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} f^* \\ m^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} sc^t + k^t & 0 \\ 0 & sc^r + k^r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ \phi^* \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서 c^t, c^r, k^t, k^r 은 각각 변위 및 각변위에 대한 감쇠, 강성계수를 의미한다.

전체 구조에 대한 운동방정식을 얻기 위해서는 식 (5)의 보요소 동특성 행렬을 이용하여 전체 시스템에 대해 요소 행렬을 조합할 필요가 있다. 주어진 모델의 균일한 보 부분을 한 개의 요소로 고려한 이산화를 하여 각 요소에 대한 행렬을 구한 후 조합하고 지지 요소의 행렬을 해당 절점 위치에 더하여 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다.

$$F^*(s) = D(s) q^*(s) \quad (7)$$

여기서, q^* 는 전역 변위 좌표 벡터의 라플라스 변환이며 F^* 는 이 좌표에 대응되는 힘벡터의 라플라스 변환이다.

한 요소의 두 절점 사이의 값은 식 (4)와 (5)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u^*(\xi) \\ \phi^*(\xi) \end{Bmatrix} = N(s, \xi) \begin{Bmatrix} u_1^* \\ \phi_1^* \\ u_2^* \\ \phi_2^* \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서

$$N(s, \xi) = \begin{bmatrix} N_1(s, \xi) & N_2(s, \xi) & N_3(s, \xi) & N_4(s, \xi) \\ N_5(s, \xi) & N_6(s, \xi) & N_7(s, \xi) & N_8(s, \xi) \end{bmatrix}$$

$$= D_{12}^{-1}(s, \xi) [\{ D_{11}(s, \ell) - D_{11}(s, \xi) \} D_{12}(s, \ell)]$$

3. 이동하중에 의한 진동 해석

3.1 모드 해석

식 (7)로부터 주어진 시스템에 대한 고유치 문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D(s)q^*(s) = 0 \tag{9}$$

따라서 고유치는 다음의 방정식을 풀어서 구할 수 있다.

$$\det\{D(s)\} = 0 \tag{10}$$

식 (10)의 방정식을 풀기 위해 본 논문에서는 참고문헌^(12,13)에서 제안하였던 축차이분법을 활용하였다. 결정된 고유치를 식 (9)에 대입하여 대응되는 고유벡터를 결정할 수 있다. 이렇게 얻어진 고유치와 고유벡터는 다음과 같은 직교 조건을 만족한다.^(12,14)

$$q_i^t \{ D(s_i) - D(s_k) \} q_k = 0, \tag{11}$$

$$i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, \infty$$

또한 다음 식으로부터 고유벡터를 정규화할 수 있다.

$$q_i^t \left\{ \frac{dD(s)}{ds} \right\}_{s=s_i} q_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, \infty \tag{12}$$

식 (12)의 미분식은 앞에서 얻은 요소 행렬들을 미분하여 조합함으로써 얻을 수 있다.

한편 식 (8)과 고유벡터로부터 보의 처짐에 관한 정규화된 i 번째 고유함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\psi_i(x) = q_{i,2k-1}N_1(s_i, \xi) + q_{i,2k}N_2(s_i, \xi) + q_{i,2k+1}N_3(s_i, \xi) + q_{i,2k+2}N_4(s_i, \xi) \tag{13}$$

$$\xi = x - x_k \text{ for } x_k \leq x \leq x_{k+1}$$

여기서 x_k 는 절점 k 의 좌표를 의미한다.

3.2 모드 합성

식 (7), (11), (12)를 이용하여 전달 함수 행렬을 다음과 같이 쓸 수 있다.^(12,14)

$$H(s) = \{D(s)\}^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i}{s - s_i} \tag{14}$$

여기서

$$P_i = q_i q_i^t, \quad i = 1, 2, \dots, \infty \tag{15}$$

식 (14)에 대해 역 라플라스 변환을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$G(t) = L^{-1} \{ H(s) \} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i e^{s_i t}, \quad t \geq 0$$

$$= 0, \quad t < 0 \tag{16}$$

따라서 식 (16)에서 초기조건이 없다고 가정하고 중합적분을 고려하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$q(t) = \int_0^t G(t - \tau) F(\tau) d\tau \tag{17}$$

실제적으로 식 (16)에 주어진 충격 응답 함수 행렬을 계산할 때 무한개의 요소를 더할 수 없으므로 시간영역 해석에서는 유한개의 요소를 고려함에 따르는 모드 절단 오차(modal truncation error)가 발생한다. 그러나 대부분의 실제적인 문제에서는 수 개의 모드로도 충분한 정확도를 얻을 수 있다. 본 연구에서 고려하는 이동하중 문제의 경우에서 대체로 수 개의 모드만을 합성하여 얻을 수 있다.

3.3 이동하중의 표현

일정한 속도로 이동하는 집중하중은 다음과 같이 쓸 수 있다.^(11,15) 즉,

$$f(x, t) = f_0 \delta\{x - (vt - r)\} \tag{18}$$

여기서 v 는 이동속도, r 은 초기상태의 이동하중 위치를 의미한다. 따라서 이동하중에 의해 발생되는 i 번째 모드힘(modal force)은 식 (13), (18)로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$p_i(t) = \int_0^L \phi_i(x) f(x, t) dx = f_0 \phi_i(vt - r) \quad (19)$$

단, 위 식은 $0 \leq vt - r \leq L$ 에서 만족된다.

한편 Fig. 3과 같이 다수개의 집중하중이 일정한 속도로 이동할 때, 다음과 같이 모델링할 수 있다.

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^{n_L} f_i \delta(x + r_i - vt) \quad (20)$$

여기서 n_L 은 이동하중의 개수이며 r_i 는 초기상태에서의 i 번째 하중의 위치를 의미한다. 이 경우에도 식 (19)에서와 마찬가지로 각 하중에 대해 모드힘을 결정하여 전체 모드힘에 포함시킬 수 있다.

3.4 이동하중에 의한 진동

식 (19)에서 얻어진 모드힘과 식 (14)에서 얻어지는 정규좌표에 관한 식으로부터 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\dot{u}_i - s_i u_i = p_i(t) \quad (21)$$

따라서 i 번째 모드응답은 다음과 같다.

$$u_i(t) = \int_0^t p_i(\tau) e^{s_i(t-\tau)} d\tau \quad (22)$$

결국, 이동하중에 대해 다음과 같은 보의 동적 처짐식을 얻을 수 있다.

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) u_i(t) \quad (23)$$

4. 수치 예제 및 토의

4.1 다수의 이동하중에 의한 단일 보의 진동

제안한 방법의 타당성을 검증하기 위하여 먼저 Fig. 3과 같은 단순 지지된 단일 보에 대한 이동하중 문제를 계산하였다. 본 예제는 이미 참고문헌(7,10)에서 제시되었던 것으로서 Table 1에는 보의 특성치가 나와있다. 이 보를 모델링하기 위해 제안한 방법에서는 한 개의 요소를 사용하였다. 제안한 방법은 고유치와 고유벡터를 이용하여 응답을 계산하게 되므로 고유치 문제를 풀게 되면 여러 가지 경우의 이동하중 조건에 대해 손쉽게 그 응답을 구할 수 있다. 여기서는 6개의 고유치와 고유벡터를 이용하여 응답을 구하였다. 먼저 참고문헌(7,10)에서와 같이 22.5 m/s의 일정한 속도로 이동하는 3개의 하중이 가해지는 경우에 대해 검토하였다. Fig. 4는 이 때의 응답으로서 하중간의 거리가 달라질 때 이동하중 위치에 따른 보 중앙부의 동적 처짐을 보여주고 있으며 참고문헌(10)에서의 결과와 잘 일치하고 있다. 여기서 x/L 은 이동하중의 위치를 보의 길이로 나눈 무차원수이다.

이동속도의 변화는 응답에 크게 영향을 미치는 매우 중요한 요인이 된다고 알려져 있다. 특히 본 예제에서와 같이 단일 보에서는 첫번째 고유주기의 약 80 %의 이동시간에 전체 스패ンを 통과하는 하중에 대해 가장 큰 응답이 나타난다고 보고된 바 있다.(16)

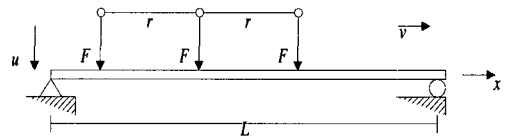


Fig. 3 Numerical model 1: a single span beam under multiple moving loads.

Table 1 Structural properties for numerical model 1.

Property	Data
Length(L), m	24.384
Mass/unit length, kg/m	9.576e+3
Sectional area, m ²	0.594
Poisson ratio	0.3
Young's modulus, N/m ²	19e+11
Force, N	5324.256

Table 2 Structural properties for numerical model 2.

Property	Data
Length(L), m	60
Density, kg/m ³	1.0e+3
Sectional area, m ²	0.51e-2
Poisson ratio	0.3
Rigidity, Nm ²	1.96e+9
Force, N	9.48e+3

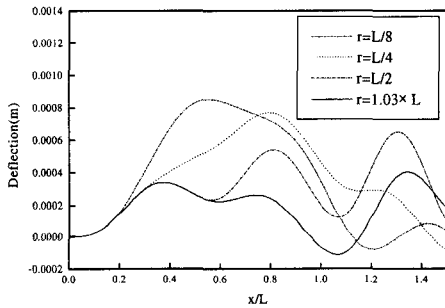


Fig. 4 Dynamic deflections at the center of the beam span under three moving loads with changing r .

Fig. 5는 단일 하중이 이동할 때 속도의 변화에 따른 응답의 변화를 보여주고 있다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 60 m/s에서 가장 큰 응답을 관찰할 수 있는 데 이때가 첫번째 주기의 약 80 %의 이동시간이 되는 이동속도이다. 한편 Fig. 6에서는 하중의 개수 변화에 따른 응답의 변화를 보여주고 있다. 하중의 이동속도는 22.5 m/s, 하중간의 간격 $r=L/4$ 로 두었다. 단일 하중의 이동에 따른 응답이 차례로 중첩되고 있음을 확인할 수 있다. 이것은 동일한 속도의 이동하중들은 단일 하중의 응답을 중첩하여 손쉽게 계산할 수 있음을 의미한다.

4.2 단일 이동하중에 의한 다단 보의 진동

본 예제는 여러 개의 스패인 있는 보 구조물에 한 개의 이동하중이 있는 경우를 고려하였다. 본 예제는 참고문헌⁽¹⁰⁾의 예제를 참조하였다. Fig. 7에 고려한 시스템을 보여주고 있으며 Table 2는

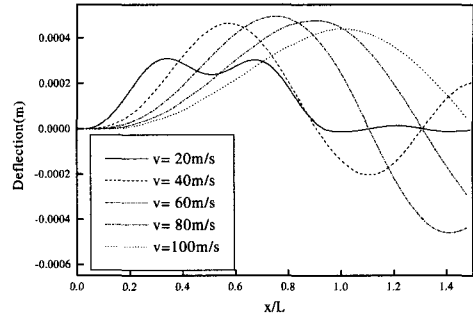


Fig. 5 Dynamic deflections at the center of the beam span under a moving load with the velocity varied.

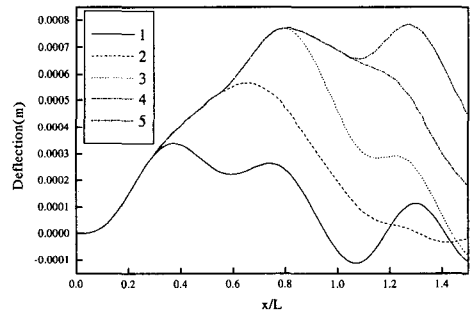


Fig. 6 Dynamic deflections at the center of the beam span with the number of loads varied.

사양을 나타낸다. 3개의 요소를 사용하여 모델링하였다. 이동속도가 35.57 m/s일 때 각 스패의 중앙에서의 응답을 Fig. 8에 보여주고 있는데 참고문헌⁽¹⁰⁾에서의 결과와 잘 일치하고 있다. 제안된 방법에서는 전체 보의 동적 처짐을 손쉽게 계산할 수 있다. Fig. 9는 하중의 이동에 따른 보 전체의 처짐 변화를 보여주고 있다.

모든 실제적인 보 구조물은 지지요소를 갖고 있다. 지지요소는 이미 앞에서 논의된 바와 같이 강성과 감쇠로서 모델링할 수 있다. 여기서는 지지강성 및 감쇠에 의한 응답변화를 고찰하였다. Fig. 10은 지지요소의 강성이 변화할 때 각 스패의 중앙에서의 처짐을 보여주고 있다. 그림으로부터 지지요소의 강성이 응답에 크게 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 특히 여기서는

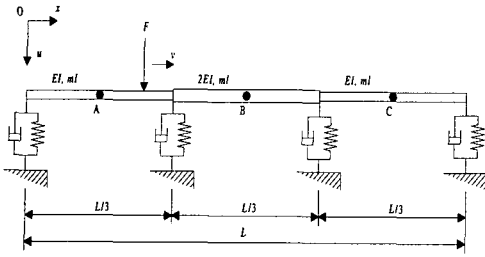


Fig. 7 Numerical model 2.

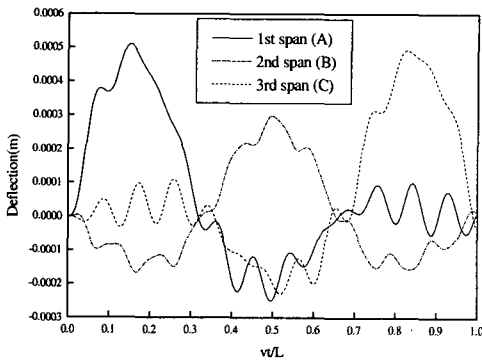


Fig. 8 Dynamic deflections at the center of each span of numerical model 2, under the hinge support condition at both ends, due to a moving load.

지지요소의 강성이 약해질수록 응답이 커지는 것을 알 수 있다. 한편 Fig. 11은 지지요소의 강성을 $2e+7$ N/m로 고정시킨 상태에서 감쇠를 추가로 부가했을 때의 응답변화를 보여주고 있다. 기대할 수 있는 바와 같이 감쇠의 증가에 의해 응답곡선이 부드러워지고 있음을 알 수 있다. 특히 고주파 응답이 급격히 감소하고 있음을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 여러 개의 스패이 있으며 지지강성과 감쇠가 있는 일반적인 다단 보 구조물에 이동하중이 있을 때 진동특성을 계산하는 엄밀해법을 제안하였다. 제안한 방법은 Timoshenko 보 요소에 대해 얻어진 엄밀한 동적 행렬을 이용하

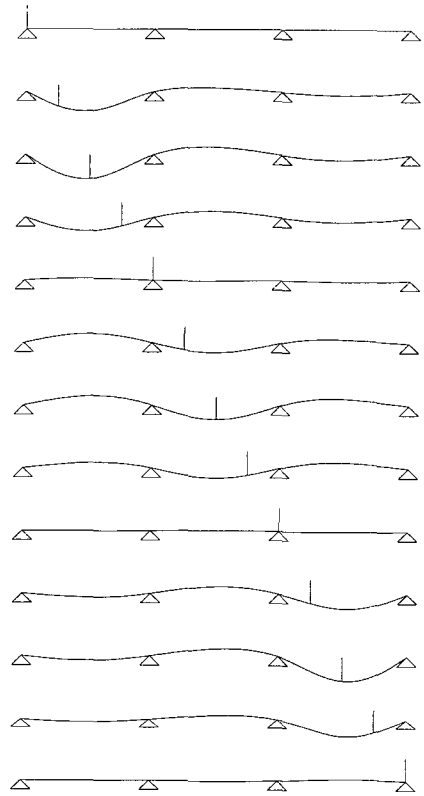
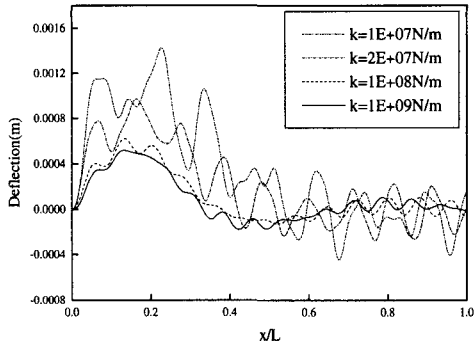
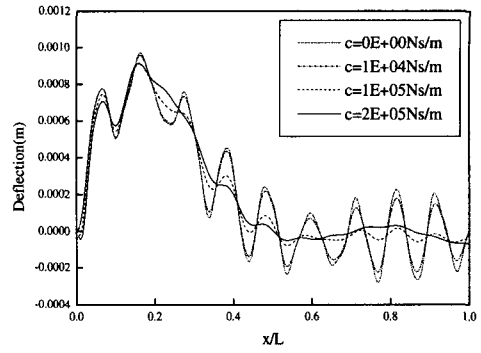


Fig. 9 Animation of the entire structural vibration of numerical model 2 due to a moving load.

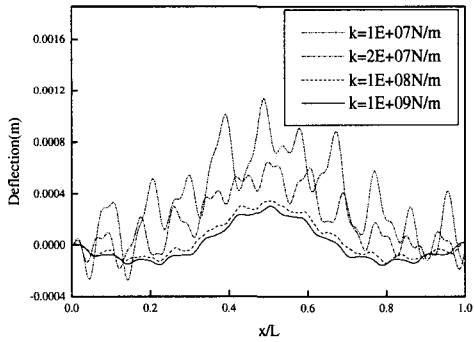
였으며 모드 급수 형태의 식을 얻기 위해 일반화된 모드해석법을 적용하였다. 제안한 방법을 이용하여 두 가지 예제를 계산하였으며 기존의 문헌결과들과 비교하였고 제안한 방법이 갖는 특성을 비교 검토하였다. 제안한 방법의 해는 고유치와 고유벡터를 이용한 무한급수 형태의 닫힌 꼴로 나타나므로 고유치 문제를 풀게 되면 여러 가지 다양한 조건에 대해 응답을 손쉽게 구할 수 있는 장점을 갖는다. 또한 대부분의 실제적인 문제에서는 수 개 정도의 모드합성으로 충분한 정확도를 얻을 수 있을 것으로 판단되므로 계산의 효율성도 있을 것으로 기대된다. 수치예제로부터 제안된 방법의 효율성을 확인할 수 있었으며 지지강성 및 감쇠를 고려함으로써 보다 정확한 해석이 가능할 것으로 사료된다.



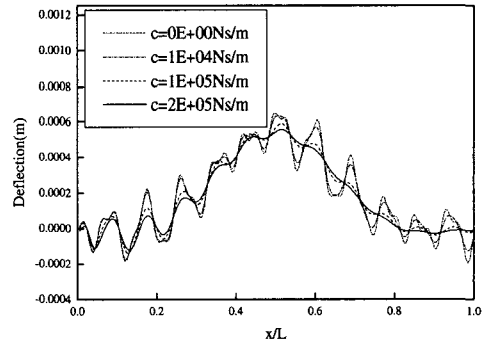
(a) A



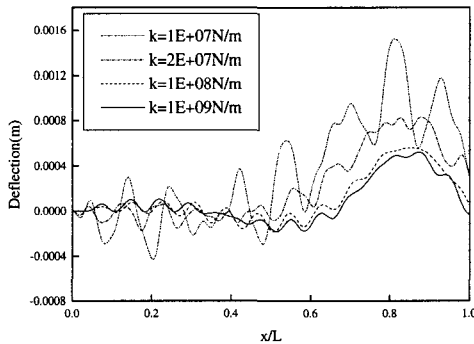
(a) A



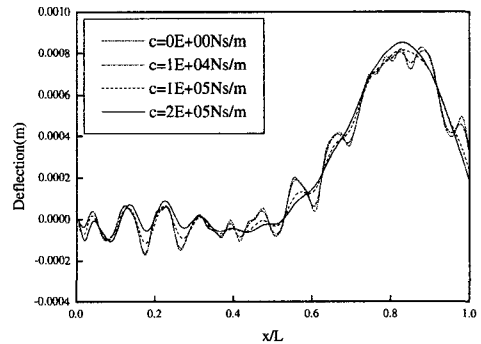
(b) B



(b) B



(c) C



(c) C

Fig. 10 Comparison of dynamic deflections at the center of each span of numerical model 2 with changing the stiffness of the supporting joints.

Fig. 11 Comparison of dynamic deflections at the center of each span of numerical model 2 with changing the damping of the supporting joints.

참고문헌

- (1) Timoshenko, S.P., Young, D.H. and Weaver, W. 1974, *Vibration Problems in Engineering*. New York: Wiley.
- (2) Zibdeh, H.S. and Rackwitz, R., 1995, "Response Moments of an Elastic Beam Subjected to Poissonian Moving Loads," *Journal of Sound and Vibration* Vol. 188, No. 4, pp. 479~495.
- (3) Katz, R., Lee, C.W., Ulsoy, A.G. and Scott, R.A., 1988, "The Dynamic Response of a Rotating Shaft Subject to a Moving Load," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 122, pp. 131~148.
- (4) Lin, Y.H. and Trethewey, M.W., 1990, "Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Loads," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, pp. 323~342.
- (5) Hino, J., Yoshimura, T. and Konishi, K. 1986, "A Finite Element Method Prediction of the Vibration of a Bridge Subjected to a Moving Vehicle Load," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 96, pp. 45~53.
- (6) Henchi, K., Fafard, M., Talbot, M. and Dhatt, G., 1998, "An Efficient Algorithm for Dynamic Analysis of Bridges Under Moving Vehicles Using a Coupled Modal and Physical Components Approach," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, No. 4, pp. 663~683.
- (7) Humar, J.L., 1990, *Dynamics of Structures*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
- (8) Lee, H.P., 1995, "Dynamic Response of a Rotating Timoshenko Shaft Subject to Axial Forces and Moving loads," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 1, pp. 169~177.
- (9) Zheng, D.Y., Cheung, Y.K., Au, F.T.K. and Cheng, Y.S., 1998, "Vibration of Multi-Span Non-Uniform Beams Under Moving Loads by Using Modified Beam Vibration Functions," *Journal of Sound and Vibration* Vol. 212, No. 3, pp. 455~467.
- (10) Henchi, K., Fafard, M., Dhatt, G. and Talbot, M., 1997, "Dynamic Behaviour of Multi-Span Beams Under Moving Loads," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 199, No. 1, pp. 33~50.
- (11) Wang, R.-T. and Lin, T.-Y., 1998, "Random Vibration of Multi-Span Timoshenko Beam Due to a Moving Load," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 213, No. 1, pp. 127~138.
- (12) Hong, S.-W. and Kim, J.-W., 1999 "Modal Analysis of Multi-Span Timoshenko Beams Connected or Supported by Resilient Joints with Damping," *Journal of Sound and Vibration* (Submitted).
- (13) 박종혁, 홍성욱, 1999, "다단 회전체 베어링계를 위한 엄밀한 동적 해석 방법," 대한기계학회논문집 A권 제23권 제2호, pp. 254~263.
- (14) Lancaster, P. 1996, *Lambda-matrices and Vibrating Systems*. Pergamon Press.
- (15) Meirovitch, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Publishing Co., Inc.
- (16) Warburton, G.B., 1976, *The Dynamic Behaviour of Structures*, Pergamon Press.