1940 대한기계학회논문집 A권, 제23권 제11호, pp. 1940~1951, 1999

이동 대차 위에 고정되고 집중질량을 갖는 유연보의 운동해석

박상덕* · 정완균** · 염영일*** · 이재원****
(1998년 11월 11일 접수)

Analysis of the Motion of a Flexible Beam Fixed on a Moving Cart and Carrying a Concentrated Mass

Sangdeok Park, Wan Kyun Chung, Youngil Youm and Jae Won Lee

Key Words: Flexible Beam(유연보), Frequency Equation(진동수방정식), Natural Frequency(고유진동수), Unconstrained Modal Analysis(불한정 모드해석)

Abstract

In this paper, the equations of motion of a Bernoulli-Euler cantilever beam fixed on a moving cart and carrying a lumped mass concentrated at an arbitrary position along the beam is derived. The motion of the beam-mass-cart system is analyzed through unconstrained modal analysis, and a unified characteristic equation for calculating the natural frequencies of the system is obtained. The changes of natural frequencies and the corresponding mode shapes with respect to the changes in mass ratios of the system and to the concentrated position of the lumped mass are investigated with the frequency equation, which can be generally applied to this kind of systems. The exact and assumed-mode solutions including the dynamics of the base cart are obtained, and the open-loop responses of the system by arbitrarily designed forcing function are given by numerical simulations. The results match well with physical phenomena even at the extreme cases where the concentrated mass is attached to the bottom and to the top of the beam.

1. 서 론

그 동안 여러 가지 경계조건과 부하조건을 갖는 유연보 혹은 유연구조물의 진동해석에 관한 많은 연구가 있었다. 많은 선행연구에서 다루어진 유연보-집중질량 시스템의 한 형태는 한 끝점이 큰 관성을 갖는 프레임에 고정되어 있고 다른 끝점에는 집중질량이나 강체가 부착된 외팔보이다.[1~3] 다른 한 형태는 임의의 위치에 한 개 혹은 여러 개의 집중질량이 부가된 여러 가지 경계조건의 균일 유연보이다.[4~6] 그러나, 이상의 연구에서 고려된 유연보-집중질량 시스템은 유연보의 최소한의 한 부분이 큰 관성프레임에 고정되거나 구속되어 있으므로 기저프레임의 동역학적 특성을 무시하였다.

집중질량이 부착된 유연보가 움직이는 대차 위에 고정되어있고 유연보의 질량과 유연보에 고정된 질량이 대차의 질량에 비해 무시할 수 없는 경우에는 대차의 운동이 유연보 및 집중질량의 운동에 영향을 주고, 반대로 유연보 및 집중질량의 운동도 대차의 운동에 영향을 준다. 예를 들어, 자동창고에서의 리클레이머 혹은 고가 사다리차 등이 무거운 하중을 높은 장소에서 다른 장소로 이동시킬 때, 보의 유연성 때문에 진동이 발생하고 유연보의 진동에 의한 하중의 운동은 다시 대차의 운동에 영향을 미친다. 또한, 하중이 유연보를 따라서 움직일 때, 그 보의 고유진동수와 진동특성은 하중의 크기와 위치에 따라서 변한다.

* 회원, (재)포항산업과학연구원 연구원, 포항공과대학교 기계공학과 대학원
** 회원, 포항공과대학교 기계공학과
*** 회원, 포항공과대학교 기계공학과
**** 회원, 영남대학교 공과대학 기계공학부

따라서, 유연보-집중질량-대차 시스템의 진동특성을 구하기 위해서는 유연보-집중질량의 진동뿐만이 아니라 대차의 동역학도 동시에 고려하여 해석하여야한다. 이러한 시스템의 다른 예는 스팬을 따라 엔진과 탱크 등을 장착한 항공기의 날개와 우주에서 작동되는 안테나 등이 있다.[7]

움직이는 기저부에 부착된 유연보의 진동에 관한 연구로써 To[8]는 바닥이 가진되고 무게중심이 부착점과 일치하지 않는 끝점 질량이 부가된 외팔보의 고유진동수와 모드형상을 구하였다. Park[9]은 이동하는 대차 위에 고정되고 끝점 질량이 부가된 유연빔의 운동방정식, 진동수방정식 및 정밀해를 불한정 모드해석을 통하여 구하였다. 또한 최근에는 유연링크를 가지는 유연조작기에 관한 많은 연구결과가 있다.[10~12]

본 연구에서는 이동하는 대차 위에 고정되어있고 임의의 위치에 집중된 질량을 갖는 유연보의 모델링과 운동해석을 다루고자한다. 또한, 유연보-집중질량-대차 시스템의 일반화된 진동수방정식을 구하고 시스템의 질량비와 집중질량의 위치변화에 따른 시스템의 고유진동수와 모드형상의 변화를 조사한다. 끝으로, 임의의 가진함수에 대한 시스템의 개회로 응답을 구한다.

2절에서는 보-질량-대차 시스템의 운동방정식을 유도하고, 진동수방정식은 3절에서 유도된다. 4절에서는 시스템 개회로 응답의 수치 시뮬레이션과 그 결과를 설명하고 끝으로 결론이 도출된다.

2. 운동방정식

Fig. 1은 본 연구에서 고려한 이동하는 대차 위에 고정되고 임의의 위치에 집중질량을 갖는 유연보의 개략도이다. Fig. 1과 같은 보-질량-대차 시스템의 운동방정식을 유도하기 위해서 유연보를 집중질량을 기준으로 나누어진 두 개의 보로 분리할 수 있다.[13] 본 연구에서는 유연보의 중간에 집중된 질량의 효과를 표현하기 위해 δ-함수를 사용하였다.[14,15] 이런 경우, 임의의 위치 h에 집중된 질량 m을 가지는 유연보의 단위 길이당 질량 ρ는 다음과 같이 표현된다.

$$\rho = \rho_0 + m\delta(y-h) \tag{1}$$

여기서, ρ_0는 집중질량이 없는 유연보의 단위 길이당 질량, m은 유연보에 집중된 질량이고 $\delta(y-h)$는 Dirac δ-함수이다.

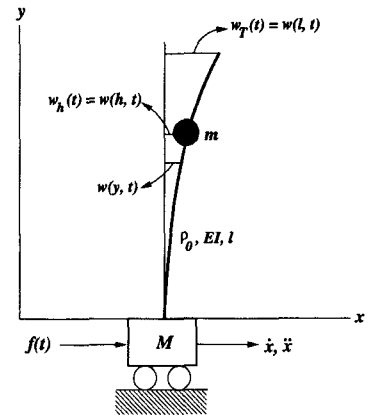


Fig. 1 The beam-mass-cart system considered.

Fig. 1과 같은 보-질량-대차 시스템을 고려할 때 임의의 높이 h에 집중질량 m이 부착된 유연보를 장착한 대차의 운동에너지 K_E와 위치에너지 P_E는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$K_E = K_m + \int_0^l K_e\, dy, \quad P_E = P_m + \int_0^l P_e\, dy \tag{2}$$

여기서, K_m과 P_m은 각각 시스템 강체의 운동에너지 및 위치에너지 복함수, K_e와 P_e는 각각 보의 유연성에 기인하는 운동밀도에너지 및 위치밀도에너지 복함수로써 다음과 같이 표현된다.

$$K_m = \frac{1}{2} M\dot{x}^2, \quad K_e = \frac{1}{2}\rho\left\{\dot{x} + \frac{\partial w(y,t)}{\partial t}\right\}^2$$
$$P_m = 0, \qquad P_e = \frac{1}{2} EI\left\{\frac{\partial^2 w(y,t)}{\partial y^2}\right\}^2 \tag{3}$$

여기서, M은 대차의 질량, EI는 유연빔의 굽힘강성이고, $w(y,t)$는 y에서의 빔의 처짐이다.

해밀턴의 원리로부터 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta L_m + \int_0^l \delta L_e dy + \delta W_{nc}(t)\right\}dt = 0 \tag{4}$$

여기서, t_1과 t_2는 임의의 시간이고,

$$L_m = K_m - P_m = L_m(\dot{x}),$$
$$L_e = K_e - P_e = L_e(\dot{x}, \dot{w}, w') \tag{5}$$

이다. 여기서, (˙)는 시간에 대한 미분을, 그리고 (′)는 공간변수에 대한 미분을 각각 나타낸다. 또한, 대차에 가해지는 힘 $f(t)$에 의한 가상일(virtual work)은 다음과 같다.

$$\delta W_{nc}(t)dt = f(t)\,\delta x \tag{6}$$

식 (5)의 변분(variation)과 식 (6)을 식 (4)에 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L_m}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \int_0^l\left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \frac{\partial L_e}{\partial \dot{w}}\delta\dot{w} + \frac{\partial L_e}{\partial w'}\delta w'\right)dy + f(t)\,\delta x\right\}dt = 0 \tag{7}$$

식 (7)을 부분적분하여 정리하고 δx와 δw는 서로 독립된 임의의 변수임을 고려하면 다음과 같은 시스템 운동방정식과 경계조건이 구해진다.

$$M\ddot{x} + \int_0^l[\rho_0 + m\delta(y-h)](\ddot{x} + \ddot{w})\,dy = f(t) \tag{8}$$

$$EIw'''' + [\rho_0 + m\delta(y-h)](\ddot{x} + \ddot{w}) = 0 \tag{9}$$

$$w(0,t) = w'(0,t) = w''(l,t) = w'''(l,t) = 0 \tag{10}$$

3. 모드해석

3.1 불한정 모드해석

식 (8)-(10)을 해석할 때 $\ddot{x}(t)$를 0으로 두고 해석하는 방법은 한정 모드해석법이다. 본 연구에서는 대차의 운동을 고려한 정밀한 모드해석을 위하여 $\ddot{x}(t)$를 0으로 두지 않는 불한정 모드해석법을 이용한다. 이 경우, 대차의 위치 $x(t)$는 다음과 같은 형태의 해를 갖는다.[16,17]

$$x(t) = \alpha(t) + \beta v(t) \tag{11}$$

여기서, $\alpha(t)$는 시스템 질량중심의 운동이다. y에서의 빔의 처짐 $w(y,t)$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$w(y,t) = \phi(y)\,v(t) \tag{12}$$

식 (11), (12) 및 식 (8)로부터

$$\beta = -\frac{m}{M}\phi(h) - \frac{\rho_0}{M}\int_0^l \phi(y)dy \tag{13}$$

를 만족할 때, 시스템 질량중심에서의 섭동이 없는 운동은 다음과 같이 구해진다.

$$M_t\ddot{\alpha}(t) = f(t) \tag{14}$$

여기서, $M_t = M + m + m_b$는 빔-질량-대차 시스템의 전체 질량, $m_b = \rho_0 l$은 유연빔의 질량이고 $\psi(y) = \beta + \phi(y)$이다.

한편, 식 (11)과 (12)를 식 (9)에 대입하고 정규모드해를 구하기 위해 외력 $f(t)$의 영향을 제거하면 다음과 같은 두 개의 식으로 분해된다.

$$\ddot{v}(t) + \omega^2 v(t) = 0 \tag{15}$$

$$EI\psi''''(y) - \omega^2[\rho_0 + m\delta(y-h)]\psi(y) = 0 \tag{16}$$

이 때, 식 (16)의 경계조건은 다음과 같다.

$$\psi(0) = \beta, \quad \psi'(0) = 0,$$
$$\psi''(l) = 0, \quad \psi'''(l) = 0 \tag{17}$$

식 (16)의 해를 구하기 위해 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$\bar{\psi} = \frac{s^3}{s^4 - k^4}\beta + \frac{s}{s^4 - k^4}\psi''(0) + \frac{\psi'''(0)}{s^4 - k^4} + \frac{m\omega^2\psi(h)}{EI}\frac{e^{-hs}}{s^4 - k^4} \tag{18}$$

여기서, $\bar{\psi}$는 $\psi(y)$의 라플라스 변환함수이고, $k^4 = \rho_0\omega^2/EI$이다. 식 (18)의 역라플라스변환을 취하면 식 (16)의 일반해는 다음과 같이 구해진다.

$$\psi(y)=\frac{\beta}{2}(\mathrm{c}ky+\mathrm{ch}ky)-\frac{\psi''(0)}{2k^2}(\mathrm{c}ky-\mathrm{ch}ky)$$
$$-\frac{\psi'''(0)}{2k^3}(\mathrm{s}ky-\mathrm{sh}ky)-\frac{m\omega^2\psi(h)}{2EIk^3} \quad (19)$$
$$\cdot U(y-h)[\mathrm{s}k(y-h)-\mathrm{sh}k(y-h)]$$

여기서, $\mathrm{s}=\sin, \mathrm{c}=\cos, \mathrm{sh}=\sinh, \mathrm{ch}=\cosh$ 이고, $U(y-h)$는 $y=h$에서의 단위계단함수이다. 상수 $\psi''(0)$와 $\psi'''(0)$는 식 (17)의 마지막 두 개의 경계조건으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\psi''(0)=\frac{m\omega^2\psi(h)}{2EIk}\frac{1}{1+\mathrm{c}kl\,\mathrm{ch}kl}\{[\mathrm{c}k(l-h)$$
$$+\mathrm{ch}k(l-h)]\cdot(\mathrm{s}kl+\mathrm{sh}kl)$$
$$-[\mathrm{s}k(l-h)+\mathrm{sh}k(l-h)](\mathrm{c}kl+\mathrm{ch}kl)\} \quad (20)$$
$$+\beta k^2\frac{\mathrm{s}kl\,\mathrm{sh}kl}{1+\mathrm{c}kl\,\mathrm{ch}kl}$$

$$\psi'''(0)=-\frac{m\omega^2\psi(h)}{2EIk}\frac{1}{1+\mathrm{c}kl\,\mathrm{ch}kl}$$
$$\cdot\{[\mathrm{c}k(l-h)+\mathrm{ch}k(l-h)](\mathrm{c}kl+\mathrm{ch}kl)$$
$$+[\mathrm{s}k(l-h)+\mathrm{sh}k(l-h)](\mathrm{s}kl-\mathrm{sh}kl)\} \quad (21)$$
$$-\beta k^3\frac{\mathrm{c}kl\,\mathrm{sh}kl+\mathrm{s}kl\,\mathrm{ch}kl}{1+\mathrm{c}kl\,\mathrm{ch}kl}$$

식 (19), (20) 및 식 (21)로부터 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\psi(y)=A(y)\psi(h)+B(y)\beta \quad (22)$$

여기서,

$$A(y)=\frac{m\omega^2}{4EIk^3}\left\{\frac{\mathrm{c}ky-\mathrm{s}ky}{1+\mathrm{c}kl\,\mathrm{ch}kl}[(\mathrm{s}k(l-h)\right.$$
$$+\mathrm{sh}k(l-h))(\mathrm{c}kl+\mathrm{ch}kl)-(\mathrm{c}k(l-h)$$
$$+\mathrm{ch}k(l-h))(\mathrm{s}kl+\mathrm{sh}kl)]$$
$$+\frac{\mathrm{s}ky-\mathrm{sh}ky}{1+\mathrm{c}kl\,\mathrm{ch}kl}[(\mathrm{s}k(l-h) \quad (23)$$
$$+\mathrm{sh}k(l-h))(\mathrm{s}kl-\mathrm{sh}kl)$$
$$+(\mathrm{c}k(l-h)+\mathrm{ch}k(l-h))(\mathrm{c}kl+\mathrm{ch}kl)]$$
$$\left.-2U(y-h)[\mathrm{s}k(y-h)-\mathrm{sh}k(y-h)]\right\},$$

$$B(y)=\frac{1}{2}\{\mathrm{c}ky+\mathrm{ch}ky$$
$$-\frac{\mathrm{s}kl\,\mathrm{sh}kl}{1+\mathrm{c}kl\,\mathrm{ch}kl}(\mathrm{c}ky-\mathrm{ch}ky) \quad (24)$$
$$\left.+\frac{\mathrm{c}kl\,\mathrm{sh}kl+\mathrm{s}kl\,\mathrm{ch}kl}{1+\mathrm{c}kl\,\mathrm{ch}kl}(\mathrm{s}ky-\mathrm{sh}ky)\right\}$$

이다.

한편, 식 (9)를 y에 대해 적분하고 그 결과식에 식 (8)을 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$M\ddot{x}+EIw'''(0,t)=f(t) \quad (25)$$

시스템에 가해지는 힘 $f(t)=0$일 때, 식 (11), (12) 및 (15)를 식 (25)에 대입하면 다음과 같다.

$$\beta=\frac{EI}{M\omega^2}\psi'''(0)=\frac{EI}{M\omega^2}\psi'''(0) \quad (26)$$

식 (21)과 식 (26)으로부터 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\beta=C\psi(h)+D\beta \quad (27)$$

여기서,

$$C=-\frac{m}{2M}\frac{1}{1+\mathrm{c}kl\,\mathrm{ch}kl}\{[\mathrm{c}k(l-h) \quad (28)$$
$$+\mathrm{ch}k(l-h)](\mathrm{c}kl+\mathrm{ch}kl)$$
$$+[\mathrm{s}k(l-h)+\mathrm{sh}k(l-h)](\mathrm{s}kl-\mathrm{sh}kl)\},$$

$$D=-\frac{\rho_0}{Mk}\frac{\mathrm{s}kl\,\mathrm{ch}kl+\mathrm{c}kl\,\mathrm{sh}kl}{1+\mathrm{c}kl\,\mathrm{ch}kl} \quad (29)$$

이다. 따라서, 식 (22)와 식 (27)로부터 다음 식이 얻어진다.

$$\psi(y)=\left[A(y)+\frac{C}{1-D}B(y)\right]\psi(h) \quad (30)$$
$$\equiv F(y)\psi(h)$$

3.2 진동수방정식

식 (30)에서 $y=h$일 때 무의미한 근을 가지지 않는 조건은 다음과 같다.

$$1-D-A(h)+A(h)D-B(h)C=0 \quad (31)$$

식 (31)을 정리하면 다음과 같은 진동수방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
&1+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}\xi \\
&+\frac{r_1}{4}[\,\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}(\xi-2\eta)+\mathrm{c}(\xi-2\eta)\,\mathrm{ch}\xi \\
&\quad+\mathrm{s}\xi\,\mathrm{sh}(\xi-2\eta)-\mathrm{s}(\xi-2\eta)\,\mathrm{sh}\xi \\
&\quad+2\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}\xi+4\mathrm{c}\eta\,\mathrm{ch}\eta] \\
&+\frac{r_2}{\xi}(\mathrm{s}\xi\,\mathrm{ch}\xi+\mathrm{c}\eta\,\mathrm{ch}\eta) \qquad (32)\\
&+\frac{r_3\xi}{4}[2\,\mathrm{s}(\xi-\eta)\,\mathrm{ch}(\xi-\eta)-2\,\mathrm{s}\eta\,\mathrm{ch}\eta \\
&\quad-2\,\mathrm{c}(\xi-\eta)\,\mathrm{sh}(\xi-\eta)+2\,\mathrm{c}\eta\,\mathrm{sh}\eta \\
&\quad+\mathrm{c}(\xi-2\eta)\,\mathrm{sh}\xi-\mathrm{s}\xi\,\mathrm{ch}(\xi-2\eta) \\
&\quad+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{sh}\xi-\mathrm{s}\xi\,\mathrm{ch}\xi]=0
\end{aligned}$$

여기서, $r_1=m/M$, $r_2=m_b/M$, $r_3=m/m_b$, $\xi=kl$이고 $\eta=kh$이다.

식 (32)는 일반적이며 유사한 종류의 유연보-질량 시스템에 적용이 가능하다. 예를 들어, 유연보 끝에 집중질량이 부착되었다면 $\xi=\eta$가 되고, 만약 질량이 보의 뿌리에 질량이 집중되어 있으면 $\eta=0$이 된다. 그리고, 만약 유연보에 집중된 질량이 없으면 $r_1=0$, $r_3=0$이 되고, 보의 한쪽이 매우 큰 관성력을 갖는 프레임에 고정되어 있으면, $M\to\infty$이므로 $r_1=0$, $r_2=0$이다.

Table 1은 여러 가지 경우의 유연보와 식 (32)에서의 적절한 조건 및 그에 의한 진동수방정식을 보여준다. 이 Table에서 첫 번째 진동수방정식은 잘 알려진 집중질량이 없는 1단 고정-타단 자유 유연보의 진동수방정식이다. 두 번째의 진동수방정식은 Bhat[1]의 결과에서 적용된 강체를 집중질량으로 대체한 결과와 일치하며, 여섯 번째 시스템을 한정모드 해석법으로 해석할 때 구한 진동수방정식과 일치한다.[9] 또한, Table 1의 네 번째 시스템의 진동수방정식에서 대차의 질량 M을 $m+M$으로 대치하면 다섯 번째 시스템의 진동수방정식과 같다.

3.3 고유진동수의 변화

식 (32)의 진동수방정식을 Newton-Rapson 방법을 이용하여 근을 구하였으며, Fig. 2는 시스템의 질량비 r_1, r_2와 집중질량의 위치에 따른 처음 다섯 개의 진동수 모드를 보여준다.

Table 1 Frequency equations for several cases.

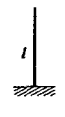
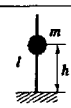
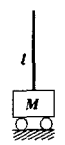
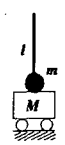
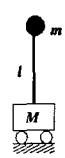
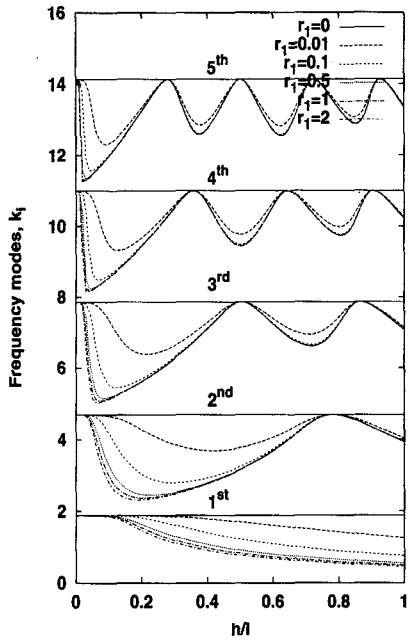
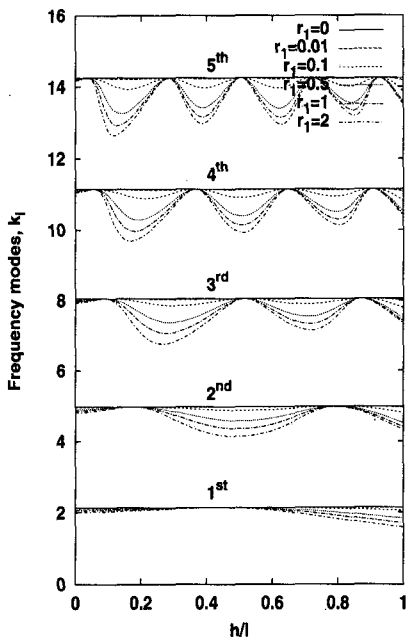
System	Cond'n	Resulting frequency equation
	$r_1=0$ $r_2=0$ $r_3=0$	$1+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}\xi=0$ (16)
	$r_1=0$ $r_2=0$ $\xi=\eta$	$1+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}\xi+r_3\xi(\mathrm{c}\xi\,\mathrm{sh}\xi-\mathrm{s}\xi\,\mathrm{ch}\xi)=0$ (1, 9, 18)
	$r_1=0$ $r_2=0$	$1+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}\xi+\Delta=0$ (8) Δ = the last term in Eq.(32)
	$r_1=0$ $r_3=0$	$1+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}\xi+\frac{r_2}{\xi}(\mathrm{s}\xi\,\mathrm{ch}\xi+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{sh}\xi)=0$ (19)
	$\eta=0$	$1+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}\xi+r_1(1+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}\xi)+\frac{r_2}{\xi}(\mathrm{s}\xi\,\mathrm{ch}\xi+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{sh}\xi)=0$ (16)
	$\xi=\eta$	$1+\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}\xi+2r_1\mathrm{c}\xi\,\mathrm{ch}\xi+\frac{r_2}{\xi}(\mathrm{c}\xi\,\mathrm{sh}\xi+\mathrm{s}\xi\,\mathrm{ch}\xi)+r_3\xi(\mathrm{c}\xi\,\mathrm{sh}\xi-\mathrm{s}\xi\,\mathrm{ch}\xi)=0$ (9, 20)

Fig. 2로부터 집중질량과 대차질량의 비 r_1이 증가할수록 시스템의 고유진동수가 작아지는 것을 알 수 있다. 또한, 집중질량이 보의 끝으로 움직일수록 고유진동수는 증가와 감소를 반복하면서 집중된 질량을 갖지 않는 보의 고유진동수와 집중질량을 가진 보의 고유진동수가 일치하는 노드점이 모드 개수만큼 존재한다는 것을 알 수 있다. 다음절에서 언급하는 바와 같이 이 노드점에서는 시스템의 질량비가 변하여도 모드 형상을 변하지 않는다.

불한정 모드해석에 의한 진동수방정식과 한정모드해석에 의한 진동수방정식을 비교하였으며, Fig. 3은 두 가지 방법의 차이를 보여준다. Fig. 3은 대차의 질량과 유연보의 질량이 각각 10kg과

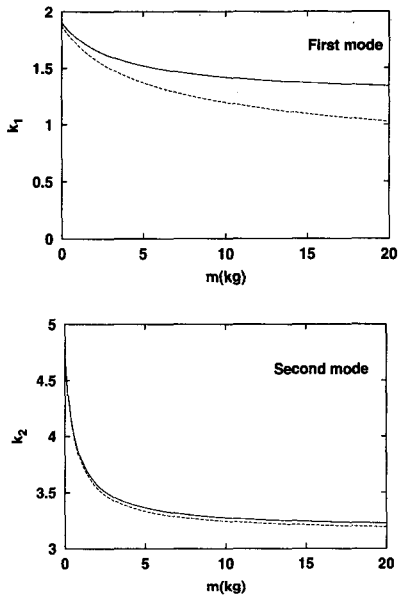


(a) $r_2 = 0.01$

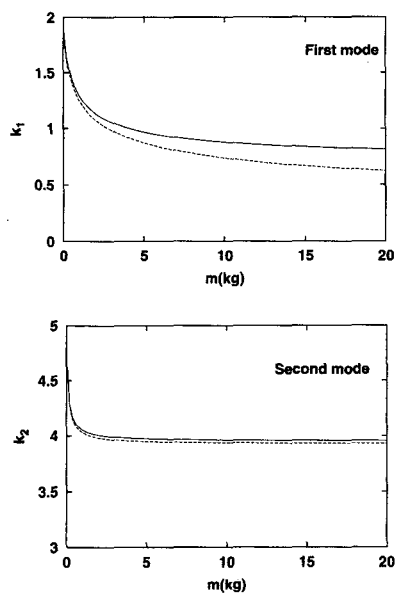


(b) $r_2 = 2$

Fig. 2 The first five roots of the frequency equation (32) with respect to the position of the concentrated mass for various mass ratios.



(a) $h/l = 0.5$



(b) $h/l = 1$

Fig. 3 Comparison of the first two roots of the frequency equation by unconstrained and constrained method(solid: by unconstrained metod, dashed: by constrained method).

1kg이고 유연보에 집중된 질량이 0에서 20kg까지 변할 때, $h/l=0.5$와 1일 때의 두 가지 방법에 의한 진동수방정식의 근을 나타낸다. Fig. 3의 결과에 의하면 불한정 모드해석과 한정 모드해석의 차이는 대차와 집중질량의 질량비가 커질수록 커짐을 알 수 있다. 특히, 이 차이는 첫 번째 모드에서 더 심하며, 고차 모드에서는 두 방법의 차이가 무시할만하다.

3.4 모드 형상

함수 $\varepsilon(y)$를 다음과 같이 정의하면,

$$\varepsilon(y)=\rho_0+m\delta(y-h) \tag{33}$$

다음과 같은 정규화 조건이 성립한다.

$$\int_0^l \varepsilon(y)\phi_i(y)\phi_j(y)dy=\delta_{ij} \tag{34}$$

그리고, $\phi_i(h)$는 다음과 같이 구해진다.

$$\phi_i(h)=1/\left\{m\left(1-\frac{C_i}{1-D_i}\right)+\rho_0\int_0^l F_i(y)\left[F_i(y)-\frac{C_i}{1-D_i}\right]dy\right\}^{1/2} \tag{35}$$

식 (35)에 의해 각 모드에 따른 $\phi_i(h)$가 구해지면 $\phi_i(y)$와 β_i는 식 (30)과 (27)로부터 각각 구해진다.

Fig. 4는 유연보-집중질량-대차 시스템의 변수가 Table 1과 같을 때 식 (32)의 처음 다섯 개 모드에 대한 정규화된 모드형상, $\phi_i(y)=\phi_i(y)-\beta_i$ $(i=1,\cdots,5)$를 보여준다.

질량비 r_1의 변화가 모드형상에 미치는 영향을 살펴보았으며 Fig. 5는 $h/l=0.5$이고 Table 2에서의 변수가 사용되었을 때 진동수방정식 식 (32)의 처음 다섯 개의 진동모드에 대응하는 정규화된 모드형상(normalized mode shape)을 나타낸다. Fig. 5에서 보는 바와 같이 모드형상은 유연보에 집중된 부하의 질량의 변화에 따라 크게 변한다. 그러나, 세 번째와 다섯 번째의 모드형상의 경우 $h/l=0.5$일 때 r_1의 변화에 대해 시스템의 고유진동수가 거의 변하지 않거나 전혀 변하지 않으므로 이 지점에서의 모드형상도 일정하다.

Table 2 System parameters.

Cart Mass, M	10.0 kg
Beam length, l	1.0 m
Mass per unit length, ρ_0	0.788 kg/m
Young's modulus, E	2.07×10^{11} N/m^2
Mass Moment of Inertia, I	5.208×10^{-11} $kg\cdot m^2$

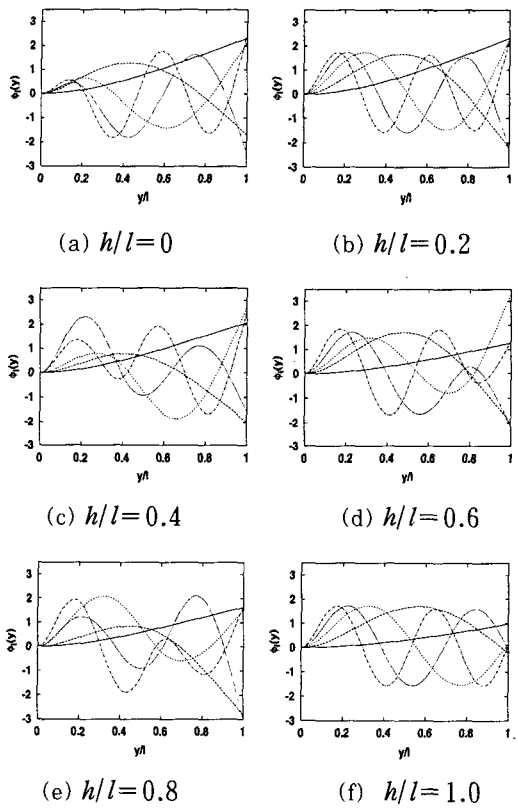
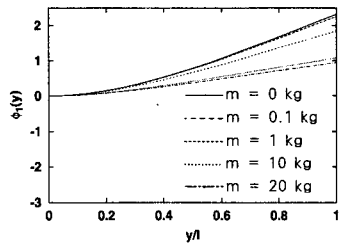


Fig. 4 Five normalized mode shapes corresponding to the first five modes with respect to the position of the concentrated mass.

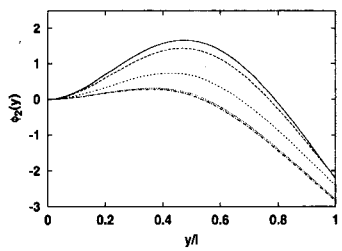
3.5 보의 처짐

식 (9)에 식 (11)과 (12)를 대입하고 식 (33)을 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

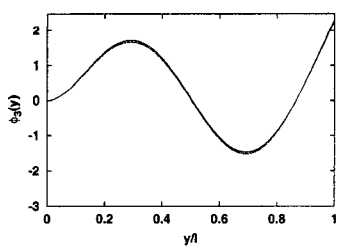
$$\sum_{i=1}^{\infty}[EI\phi_i''''(y)v_i(t)+\varepsilon(y)\phi_i(y)\ddot{v}_i(t)]=-\varepsilon(y)\ddot{\alpha}(t) \tag{36}$$



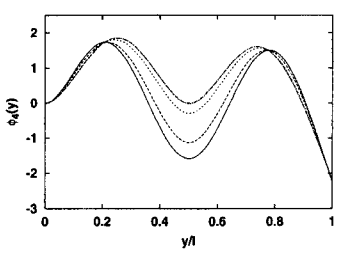
(a) First modes



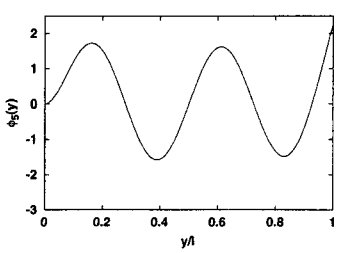
(b) Second modes



(c) Third modes



(d) Fourth modes



(e) Fifth modes

Fig. 5 Five normalized mode shapes corresponding to the first five modes with respect to the change of the concentrated mass.

식 (15)를 식 (36)에 대입하고 그 결과식의 양변에 $\phi_j(y)$를 곱하고 적분하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{\infty}[\ddot{v}_i(t)+\omega_i^2 v_i(t)]\int_0^l \varepsilon(y)\phi_i(y)\phi_j(y)dy = -\ddot{\alpha}(t)\int_0^l \varepsilon(y)\phi_j(y)dy \tag{37}$$

한편, 식 (13)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\beta_j = -\frac{1}{M_t}\int_0^l \varepsilon(y)\phi_j(y)dy \tag{38}$$

식 (14)와 (38)을 식 (37)에 대입하고 식 (34)와 같은 정규조화조건을 대입하면 $i=j$일 때 다음의 식이 얻어진다.

$$\ddot{v}_i(t)+\omega_i^2 v_i(t)=f(t)\beta_i, \quad i=1,2,\cdots,\infty \tag{39}$$

따라서, $v_i(t)$는 주어진 ω_i에 대해 식 (39)로부터 구해진다.

유연보-집중질량-대차 시스템의 각 질량비와 집중질량의 위치에 따른 고유진동수에 따라 주어진 β_i, $\phi_i(y)$ 및 $v_i(t)$에 대해 높이 y에서의 보의 처짐 $w(y,t)$와 대차의 위치 $x(t)$는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$w(y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}[\phi_i(y)-\beta_i]v_i(t) \tag{40}$$

$$x(t)=\alpha(t)+\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i v_i(t) \tag{41}$$

이상에서 구한 식의 수치 시뮬레이션을 위해서는 다음절에서와 같은 유한모드해가 필요하다.

3.6 유한모드해

유한한 개수의 특성방정식 근에 대한 *유한모드해*는 식 (40) 및 (41)의 첫 번째 n개의 모드을 고려함으로써 구해진다. 이 때의 보의 처짐과 대차의 위치는 앞절에서 구한 $\phi_i(y)$와 β_i의 n개의 모드를 이용하여 각각 다음과 같이 구해진다.

$$w(y,t)=\sum_{i=1}^{n}v_i(t)[\phi_i(y)-\beta_i] \tag{42}$$

$$x(t)=\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i(t) \tag{43}$$

결국, 식 (8)-(9)의 비제차 편미분방정식은 다음과 같은 $n+1$차의 상미분방정식으로 변환된다.

$$\begin{pmatrix} M_t & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{v}_i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ v_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \beta_i \end{pmatrix}f(t) \tag{44}$$

여기서, $i=1,2,\cdots,n$이고, $K=\mathrm{diag}\{\omega_i^2\}$은 $n\times n$의 *강성행렬*이다.

다음 절에서는 주어진 가진함수 $f(t)$에 대한 시스템의 운동을 얻기 위해 식(44)를 수치적인 방법으로 푼다.

4. 수치 시뮬레이션

임의의 가진함수에 대한 시스템의 개회로 응답을 구하기 위해 수치 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션을 위해 Table 2의 시스템 변수가 사용되었다.

Fig. 6과 Fig. 7은 각각 $m=1kg$과 $5kg$의 집중질량이 부가된 보-질량-대차 시스템에 임의의 가진함수 $f(t)$가 가해졌을 때의 보 끝점에서의 처짐 $w_T(t)=w(l,t)$, 집중질량이 부가된 점의 처짐 $w_h(t)=w(h,t)$ 및 대차의 위치 $x(t)$, 보 끝점의 위치 $x_T(t)=x(t)+w_T(t)$, 그리고 집중질량의 위치 $x_h(t)=x(t)+w_h(t)$를 각각 나타낸다. 시스템에 가해진 가진함수는 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases} 20N & \text{when } 0<t\le 0.1, \\ -20N & \text{when } 1.0<t\le 1.1, \\ 0N & \text{otherwis.} \end{cases}$$

Fig. 6과 Fig. 7에서 $h/l=0$일 때는 처짐 $w(0,t)=0$이므로 집중질량의 위치 $x_h(t)$가 대차의 위치 $x(t)$와 같고, $h/l=1$일 때는 끝점에서의 처짐 $w_T(t)$와 위치 $x_T(t)$는 각각 집중질량이 부가된 점의 처짐 $w_h(t)$와 위치 $x_h(t)$와 일치하며, 이는 물리적 현상과 잘 일치한다.

Fig. 6과 Fig. 7의 결과로부터 집중질량의 위치가 바뀜에 따라 시스템의 응답이 변함을 알수 있다. 또한, 집중질량과 유연보의 진동이 대차의 운동에 영향을 끼치며, 모델에 사용된 보는 감쇄를 가지지 않는 탄성보이므로 한번 발생된 진동은 감쇄되지 않음을 알 수 있다. 그러나, 시스템에 힘이 가해지는 시점에 따라 보의 진동이 증폭되거나 감쇄한다. 예를 들어, Fig. 7에서 $h/l=0.4$일 때의 기본진동수는 1.562Hz이고 시간 t가 1초 근처에서 대차에 부착된 이동좌표계에서 본 끝점이 뒤로 처졌다가 앞으로 돌아오려는 순간에 반대 방향의 힘이 가해지므로 진폭은 증가한다.

그러나, $h/l=0.6$일 때는 기본진동수가 0.995 Hz이고 1초 근처에서는 이동좌표계에서 본 끝점이 앞으로 처졌다가 뒤로 돌아가는 중이므로 이 때 반대 방향의 힘이 가해지면 진동이 감쇄된다. 이와 같이 시스템의 고유진동수를 이용하여 입력을 가하는 시기를 조절함으로써 보의 잔류진동을 제어하는 방법이 입력성형법이다.

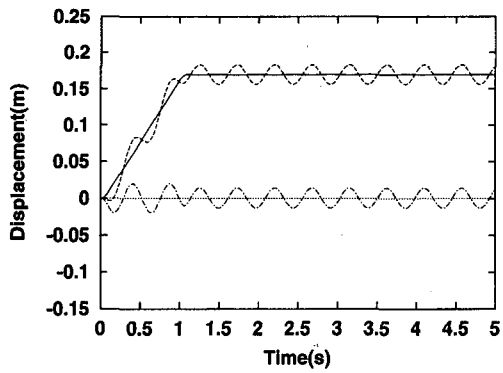
5. 결론 및 향후 연구

본 연구를 통해 이동하는 대차 위에 고정되고 집중질량을 갖는 유연보의 운동방정식과, 유사한 시스템에 일반적으로 적용이 가능한 통합된 진동수 방정식을 구하였다. 또한, 시스템 변수와 집중질량이 부가된 위치의 변화에 따른 시스템 고유진동수의 변화를 살펴보았다. 모델로 정한 보-질량-대차 시스템의 정밀해와 유한모드해를 불한정 모드해석법을 이용하여 구하였으며, 이를 이용하여 임의의 가진함수에 대한 개회로 응답을 수치 시뮬레이션으로 구하였다. 이러한 해석적 결과는 이동 대차위에 고정된 보-질량 시스템의 진동 해석용 시뮬레이터로 이용될 수 있으며, 시스템의 모델에 기초한 진동억제를 위한 제어기 설계에 응용할 수 있다.

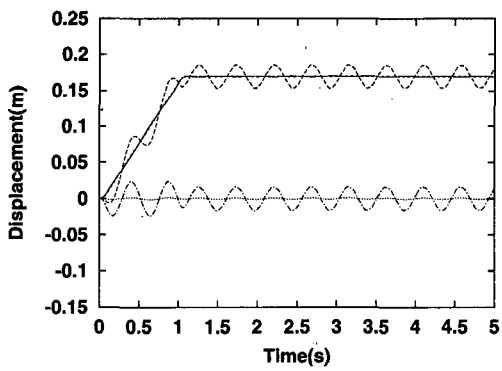
실험장치를 이용한 실험결과와 해석적인 결과를 비교하고 모델에 기초한 진동억제를 위한 제어기를 설계하는 것이 앞으로의 과제이다.

후 기

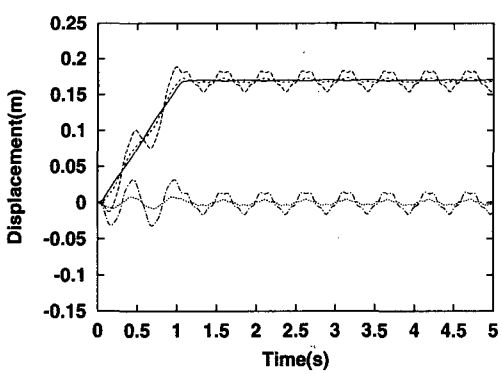
본 논문의 저자는 본 논문에 수록된 수치 시뮬레이션을 위해 유용한 프로그램을 제공한 포항공과대학교 물리학과 박사과정 이기태군에게 감사드립니다.



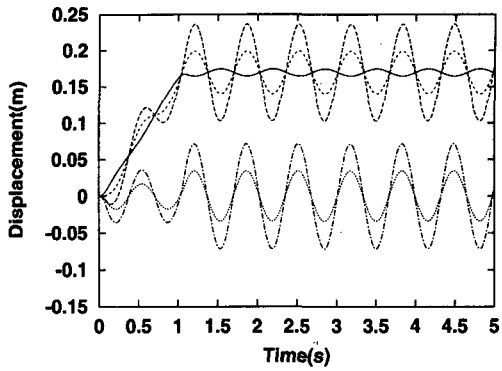
(a) $h/l=0$



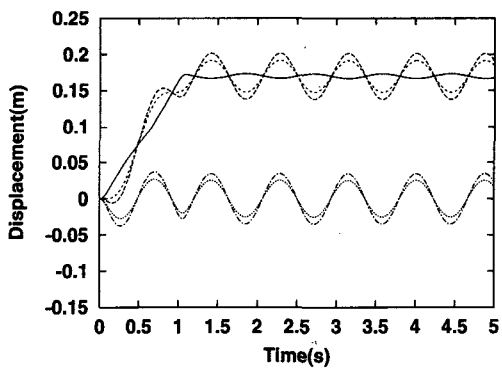
(b) $h/l=0.2$



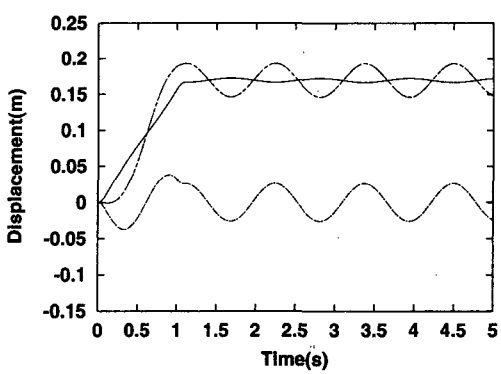
(c) $h/l=0.4$



(d) $h/l=0.6$

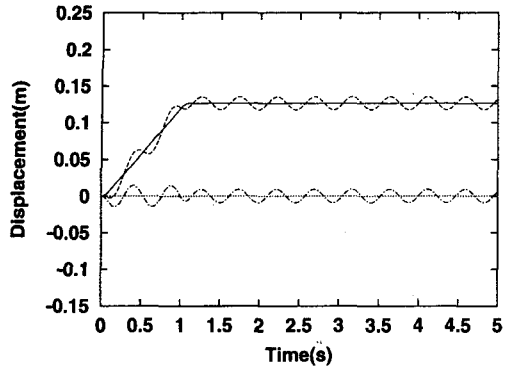


(e) $h/l=0.8$

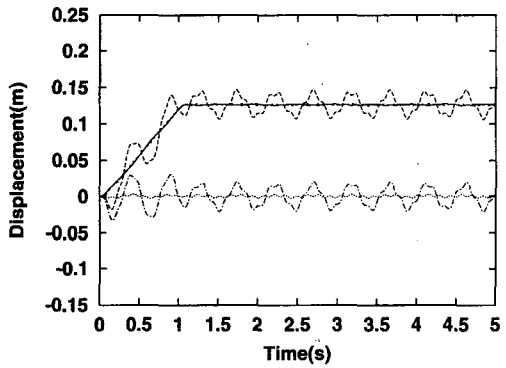


(f) $h/l=1.0$

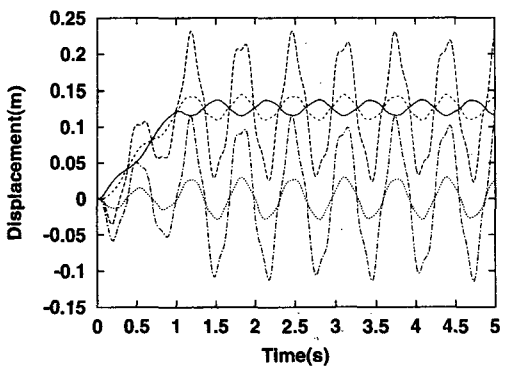
Fig. 6 The open-loop response to an arbitrary forcing function when $m=1kg$. (solid: $x(t)$, long dashed: $x_T(t)$, dashed: $x_h(t)$, dotted: $w_h(t)$, dashdotted: $w_T(t)$).



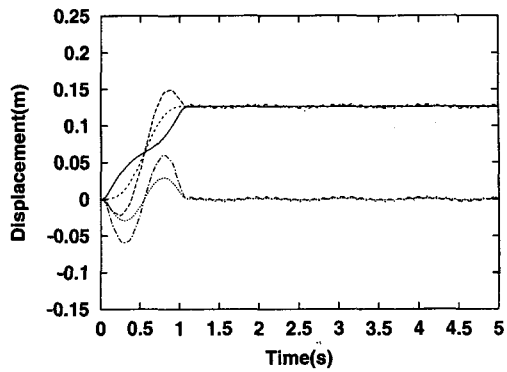
(a) $h/l=0$



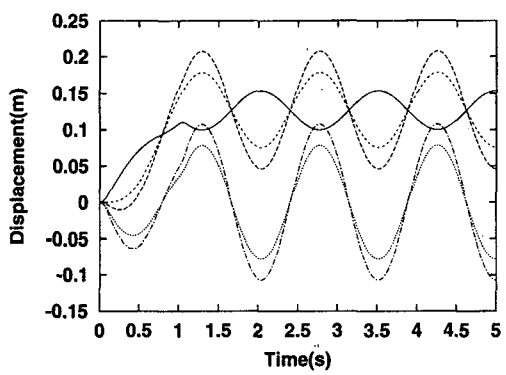
(b) $h/l=0.2$



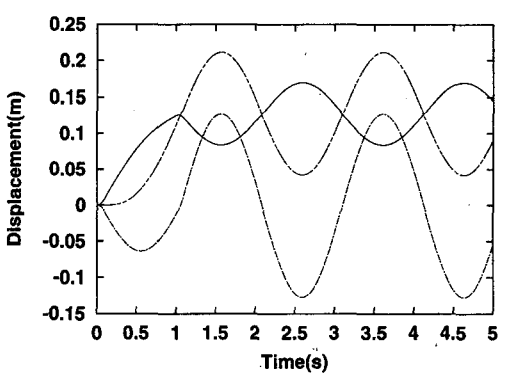
(c) $h/l=0.4$



(d) $h/l=0.6$



(e) $h/l=0.8$



(f) $h/l=1.0$

Fig. 7 The open-loop response to an arbitrary forcing function when $m=5kg$. (solid: $x(t)$, long dashed: $x_T(t)$, dashed: $x_h(t)$, dotted: $w_h(t)$, dashdotted: $w_T(t)$).

참고문헌

(1) Bhat, R. and Wagner, H., 1976, "Natural Frequencies of a Uniform Cantilever with a Tip Mass Slender in the Axial Direction," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 45, No. 2, pp. 304~307.

(2) Anderson, G.L., 1978, "Natural Frequencies of a Cantilever with an Asymmetrically Attached Tip Mass," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 3, pp. 281~292.

(3) Parnell, L.A. and Cobble, M.H., 1976, "Lateral Displacement of a Vibrating Cantilever with a Concentrated Mass," *Journal of Sound and Vibration* Vol. 44, No 4, pp. 499~511.

(4) Chen, Y, 1963, "On the Vibration of Beams or Rods Carrying a Concentrated Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.39, No. 4, pp. 310~311.

(5) Maurizi, M.J. and Belles, P.M, 1992, "An Additional Evaluation of Free Vibrations of Beam-Mass System," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 154, No. 1, pp. 182~186.

(6) Low, K.H., 1998, "On the Eigenfrequencies for Mass Loaded Beams under Classical Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 2, pp. 381~389.

(7) Librescu, L. and Na, S.S., 1997, "Vibration and Dynamic Response Control of Cantilevers Carrying External Mounted Stores," *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 102, No, 6, pp. 3516~3522.

(8) To, C.W.S., 1982, "Vibration of a Cantilever Beam with a Base Excitation and Tip Mass," Vol. 83, No. 4, pp. 445~460.

(9) Park, S.D., Chung, W.K., Youm, Y and Lee, J.W., 1998, "Analysis of the Motion of a Cart with an Inverted Flexible Beam and a Concentrated Tip Mass," *Proceedings of Koraen Automatic Control Conference(KACC)*, pp. 367~372.

(10) Canon, R.H., and Schmitz, E., 1984, "Initial Experiment on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot," *Int. J. Robotic Research*, Vol. 3, pp. 62~75.

(11) 하영균, 김승호, 이상조, 박영필, 1987, "유연한 단일링크 로봇 조작기의 최적귀환제어," 대한기계학회논문집, Vol. 11, No. 6, pp. 923~934.

(12) 하영균, 박영필, 1993, "유연한 3 자유도 로봇 팔 진동의 능동제어 (I) 동력학적 모델링," 대한기계학회논문집, Vol. 17, No. 3, pp. 548~558.

(13) Lau, J.H., 1984, "Vibration Frequencies and Mode Shapes for a Constrained Cantilever," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 1, pp.182~187.

(14) Goel, R.P., 1973, "Vibrations of a Beam Carrying a Concentrated Mass," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 821~822.

(15) Amba-Rao, C.L, 1966, "Method of Calculation of Frequencies of Partially Fixed Beams Carrying Masses," *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 40, No. 2, pp.367~ 371.

(16) Barbieri, E. and Özgüner, Ü., 1988, "Unconstrained and Constrained Mode Expansion for a Flexible Slewing Link," *ASME Transaction of Dynamic System Measurement and Control (DSMC)*, Vol. 110, pp. 416~421.

(17) de Wit, C.C., Siciliano, B. and Bastin, G., 1996, *Theory of Robot Control*, Springer-Verlag London., pp. 219~230.

(18) Fung, E.H.K and Shi, Z.X., 1997, "Vibration Frequencies of a Constrained Flexible Arm Carrying an End Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 204, No. 2, pp. 259~269.

(19) Zhu, G., Ge, S.S. and Lee, T.H., 1997, "Variable Structure Regulation of a Flexible Arm with a Translational Base," *Prodeedings of the 36th Conference on Decision & Control*, San Diego, pp. 1361~1366.

(20) Ge, S.S., Lee, T.H. and Zhu, G., 1998, "Asymptotic Stable End-Point Regulation of a Flexible SCARA/Cartesian Robot," *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, Vol. 3, No. 2, pp. 138~144.