

## 사각개구부를 갖는 링보강 원통셀의 진동해석

김 영 완\* · 이 영 신\*\*

(1999년 3월 2일 접수)

### Vibration Analysis of Ring Stiffened Cylindrical Shells with a Rectangular Cutout

Young-Wann Kim and Young-Shin Lee

**Key Words :** Natural Frequency(고유진동수), Mode Shape(진동형상), Ring Stiffened Cylindrical Shell(링보강 원통셀), Rectangular Cutout(사각개구부), Discrete Stiffener Theory(이산보강이론).

#### Abstract

The Rayleigh-Ritz method is used to investigate the natural frequencies and mode shapes of the ring stiffened cylindrical shells with a rectangular cutout. The cutout is located on the center of the shell. The Love's thin shell theory combined with the discrete stiffener theory is adopted to formulate the analytical model of the shell. The effect of stiffener eccentricity, number, and position on vibration characteristics of the shell is examined. Also the effect of cutout size is examined. By comparison with previously published analytical and new FEM results, it is shown that natural frequencies and mode shapes can be determined with adequate accuracy.

#### 1. 서론

링보강 원통셀은 압력용기, 항공기, 잠수함, 미사일 등에 널리 이용되고 있는 구조 요소로써 이들 구조물은 다양한 형태의 동적 하중을 받을 수 있으며, 이로 인해 구조물들이 경우에 따라 공진이 발생되어 심한 경우 파괴될 수 있다. 잠수함이나 항공기와 같은 민감한 구조물의 경우 공진에 의한 파괴가 아니더라도 진동은 구조물 파손에 치명적일 수 있기 때문에 이런 구조물의 동적 거동을 분석하여 구조물 설계에 이용되어야 한다. 이런 구조물들은 실용 상태에서는 노즐 및 센서의 설치 등의 설치를 위해, 또는 창문 등에 의해 필연적으로 셀 구조물에 다양한 형태의 개구부가 존재하게 된다. 이런 개구부를 갖는 구조물은 기하학적 불연속으로 인해 강성저하를 일으키게 되므로 개구부가 없는 구조물에 비해 정적 하중 특, 동적 하중을 받음으로써 더욱 쉽게 구조물이 파괴

될 수 있어 진동특성을 분석하여 개구부를 갖는 원통셀에 대한 동적 특성을 예측할 수 있어야 한다. 이처럼 구조물의 동적 거동을 예측하기 위해서는 우선적으로 구조물의 동적 거동을 지배하는 고유진동수 및 진동형상을 먼저 파악하여야 한다.

링보강 원통셀에 대해 Al-Najafi 와 Warburton,<sup>(1)</sup> Mustafa 와 Ali<sup>(2)</sup>, Yang 과 Zhou<sup>(3)</sup> 등의 많은 연구자들이 이론적 해석뿐 아니라 유한요소법 또는 실험을 통하여 진동특성에 대한 연구를 하였다. 본 저자<sup>(4,5,6)</sup>는 복합재료 원통셀에 대해 스트링거 또는 링 보강에 대해 해석적으로 진동해석을 수행하였을 뿐 아니라 직교보강(링+스트링거 보강)이 셀의 고유진동수 및 좌굴하중에 미치는 영향도 분석하였으며, 또한 직교 보강된 복합재료 원통셀의 고유진동수에 회전이 미치는 영향을 분석하였다. 그러나 언급된 연구의 대부분은 보강재의 형상은 모두 일정하고, 같은 간격으로 보강된 경우에 대해서만 한정적으로 해석을 수행하였다. 실제 구조물은 구조물의 특성상 같은 간격으로 보강될 뿐 아니라 경우에 따라서는 균일하지 않은 간격으로 보강을 할 필요가 있다. 이와 같은 요구조건에 따라 Wang 등<sup>(7)</sup>은 함수적으로 링이 보강되었거나, 보강

\* 회원, 여수대학교 기계공학과

\*\* 회원, 충남대학교 기계설계공학과

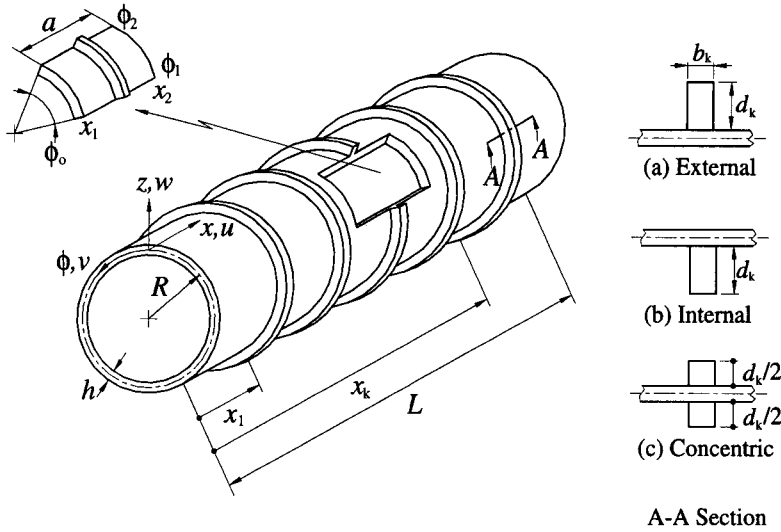


Fig. 1 Coordinate system of ring stiffened cylindrical shell with a rectangular cutout.

재의 크기가 서로 다른 보강셀에 대해 진동해석을 수행하였으나 진동형상 등은 제시하지 못했다. 한편 개구부를 갖는 원통셀에 대한 연구는 매우 미미한 형편으로 등방성 원통셀에 대한 연구가 몇몇 보고되었다. Brogan 등<sup>(8)</sup>은 유한차분법을 이용하여 개구부가 고유진동수 및 진동형상에 미치는 영향을 제시하였으며, Mahabiraja 등<sup>(9)</sup>은 Rayleigh-Ritz 법을 이용하여 개구부를 갖는 원통셀에 대한 진동특성을 연구하였다. 그러나 이들은 두 개의 개구부가 존재하는 경우에 대한 해석을 주로 하였으며, 두 개구부의 중심은 서로 180도의 각으로 마주 보고 있는 형태로 이들에 대한 진동수 및 진동형상을 제시하였으나 개구부가 하나인 경우에는 대해서는 진동형상은 제시하지 못했다. 본 저자<sup>(10)</sup>는 회전운동을 고려한 외팔형 복합재료 원통셀에 대해 사각개구부 및 회전이 진동특성에 미치는 영향을 연구하였으나, 정확한 진동형상을 제시하진 못했다.

따라서 본 연구에서는 셀의 중앙에 위치하는 사각개구부를 갖고 링으로 보강된 원통셀에 대해 Love의 셀이론과 각각의 보강재를 하나의 구조요소로써 취급하여 해석하는 이산보강이론을 적용하여 지배방정식을 유도하고 에너지법과 Rayleigh-Ritz 법을 적용하여 진동수방정식을 이론적으로 유도하였다. 보강재의 편심, 위치, 개수 등이 링보강 원통셀의 진동특성에 미치는 영향을 분석하였고, 사각개구부의 크기 변화에 따른 고유진동수 및 진동형상의 변화를 분석하였다. 한편 해의 검증을 위해 사각개구부를 갖는 링보강 원통셀에 대해 부분적으로 유한요소해석이 이루어 졌으며, 기존의

참고문헌 결과와도 비교하였다.

## 2. 수식화

본 연구에서 고려된 사각개구부를 갖고 링으로 보강된 원통셀에 대한 형상을 Fig. 1에 제시하였다. 여기서  $R, L$ 과  $h$ 는 각각 셀의 반경, 길이 및 두께이다. 원통셀은  $N$ 개의 링으로 보강되었으며 사각단면을 갖는다. 사각 단면을 갖는 링의 단면 A-A에서 각각 (a), (b), (c)에 대해 외부 보강, 내부 보강, 중립 보강된 단면을 보여 주며,  $k$ -번째 보강재는  $x_k$ 에 위치하며, 보강재의 폭과 높이를  $b_k$ 와  $d_k$ 로 나타냈다. 한편 축방향 길이(이하 개구길이)  $a$ , 원주방향 개구각(이하 개구각)  $\phi_0$ 의 크기를 갖고,  $x_1, x_2$ 와  $\phi_1, \phi_2$ 의 좌표로 표시된 사각개구부는 셀의 중앙에 위치한다.

고려된 원통셀은 매우 얇기 때문에 평면 응력 상태라 가정하여 보강되지 않은 원통셀에 대한 변형에너지를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[ A \left\{ \epsilon_x^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_\phi + \epsilon_\phi^2 + \frac{1-\nu}{2} \epsilon_{x\phi}^2 \right\} + D \left\{ \kappa_x^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_\phi + \kappa_\phi^2 + \frac{1-\nu}{2} \kappa_{x\phi}^2 \right\} \right] dxRd\phi \quad (1)$$

$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad D = \frac{Eh^3}{1-\nu^2}$$

Love의 셀이론으로부터 각 방향에 대한 변형률  $\epsilon_i$ 와 곡률  $\kappa_i$ 는 ( $i=x, \phi, x\phi$ )는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\phi \\ \epsilon_{x\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ (v_{,\phi} + w)/R \\ u_{,\phi}/R + v_{,x} \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\phi \\ \kappa_{x\phi} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ (w_{,\phi\phi} - v_{,\phi})/R^2 \\ (2w_{,x\phi} - v_{,x})/R \end{Bmatrix} \quad (2b)$$

여기서  $u$ 는 축방향,  $v$ 는 원주방향,  $w$ 는 수직방향에 대한 변위 성분이며, (,)는 공간에 대한 미분을 나타낸다.

$k$ -번째 보강재에 대한 변위( $u_k, v_k, w_k$ )와 셀 변위( $u, v, w$ )와의 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$u_k = u - zw_{,x} \quad v_k = v + \frac{z}{R}(v - w_{,\phi}) \quad w_k = w \quad (3)$$

한편 링에 대한 변형에너지는 이산 보강이론에 의거하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_r} \left[ E_k \int_{V_k} \epsilon_{\phi k}^2 dV_k + G_k J_k \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\beta_k^2}{R+z} d\phi \right] \quad (4)$$

$$\epsilon_{\phi k} = \frac{1}{R+z} (v_{k,\phi} + w_k) \quad \beta_k = w_{k,x}$$

여기서  $\epsilon_{\phi k}$ 는  $k$ -번째 링의 원주방향 변형률,  $\beta_k$ 는  $x$ -축에 대한 회전,  $J_k$ 는 보강재의 비틀림상수이며,  $N_r$ 은 보강재수이다.

개구부는 셀의 거동을 따른다고 가정하면, 사각개구부에 대한 변형에너지는 원통셀에 대해 개구부에 해당되는 영역의 에너지가 개구부에 대한 에너지가 되므로 셀의 에너지식을 이용하여 쓸 수 있으며, 또한 링이 개구부의 영역 내에 포함될 경우 링의 에너지에 대한 표현식을 이용하여 개구부에 대한 변형에너지를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ A \left[ \epsilon_x^2 + 2v\epsilon_x \epsilon_\phi + \epsilon_\phi^2 + \frac{1-v}{2} \epsilon_{x\phi}^2 \right] + D \left[ \kappa_x^2 + 2v\kappa_x \kappa_\phi + \kappa_\phi^2 + \frac{1-v}{2} \kappa_{x\phi}^2 \right] \right\} dx Rd\phi \quad (5)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_k} \delta_k \left[ E_k \int_{A_k} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \epsilon_{\phi k}^2 (R+z) d\phi dA_k + G_k J_k \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\beta_k^2}{R+z} d\phi \right]$$

여기서  $k$ -번째 링이 사각개구부 내에 있으면,  $\delta_k$

는 1이고, 그렇지 않으면 0이 된다.

보강되지 않은 원통셀 및 링에 대한 운동에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$T_s = \frac{1}{2} \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^L [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx Rd\phi \quad (6)$$

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_r} \rho_k \int_{V_k} [\dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2 + \dot{w}_k^2] dV_k \quad (7)$$

여기서 (·)는 시간에 대한 미분,  $\rho$ 는 밀도이다.

또한 사각개구부에 대한 운동에너지는 변형에너지와 같이 셀과 링의 거동에 의해 지배를 받게 되므로 다음과 같이 표현된다.

$$T_c = \frac{1}{2} \rho h \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{x_1}^{x_2} [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx Rd\phi \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_r} \delta_k \rho_k \int_{A_k} \int_{\phi_1}^{\phi_2} [\dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2 + \dot{w}_k^2] (R+z) d\phi dA_k$$

따라서 고려된 사각개구부를 갖는 복합재료 원통셀에 대한 총에너지식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$U_t = U_s + U_r - U_c \quad T_t = T_s + T_r - T_c \quad (9)$$

고려된 셀의 경계조건은 양단 단순지지 경계조건으로 다음과 같은 수학적 표현을 갖는다.

$$v = w = M_x = N_x = 0 \quad \text{at } x = 0, L \quad (10)$$

본 연구에서는 원주방향으로 대칭 진동형상만을 고려하였기 때문에 앞의 경계조건을 만족하는 변위식을 다음과 같이 삼각함수를 이용하여 가정할 수 있다.

$$u(x, \phi, t) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q U_{mn} \cos \frac{m\pi}{L} \cos n\phi \cos \omega_{mn} t$$

$$v(x, \phi, t) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q V_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} \sin n\phi \cos \omega_{mn} t \quad (11)$$

$$w(x, \phi, t) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q W_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} \cos n\phi \cos \omega_{mn} t$$

여기서  $U_{mn}, V_{mn}$ 과  $W_{mn}$ 은 각 방향으로의 진폭을 나타내며,  $m, n$ 는 축방향 및 원주방향 반파수,  $p, q$ 는 급수항, 그리고  $\omega_{mn}$ 은 각 진동모드( $m, n$ )에서의 각진동수를 표시한다.

경계조건을 만족하는 가정된 변위식(11)을 이용하여 유도된 에너지식(9)에 대입하여 적분을 취하

**Table 1** Frequency comparison of the 5-externally eccentric, evenly spaced ring stiffened cylindrical shell ( $b=6.35\text{mm}$ ,  $d=b$ ).

Natural Frequencies(Hz) ( $m=1$ )			
Mode( $n$ )	Theory	ANSYS	Exp. <sup>[1]</sup>
1	1751	1759	-
2	839	828	809
3	1070	1055	1065
4	1872	1869	1867
5	2894	2890	2882
6	4044	4076	4073

면 모든 에너지식이 진폭 향으로 정리되고 이를 아래와 같은 Rayleigh-Ritz 법을 적용하면 개구부를 갖는 원통셀에 대한 진동수방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial(T_i - U_i)}{\partial X_i} = 0 \quad X_i = U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} \quad (12)$$

결과적으로 사각개구부를 갖는 링보강 원통셀에 대한 진동수방정식은 다음과 같은 행렬형태로 이루어진다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} - \omega_{mn}^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (13)$$

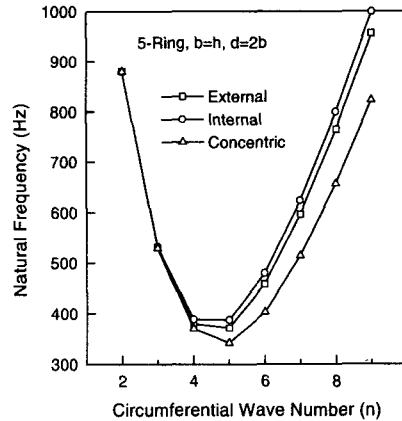
여기서  $K_{ij}$ ,  $M_{ij}(i,j=1,2,3)$ 는 강성 및 질량요소이며, 각각의 행렬요소는  $(p \times q) \times (p \times q)$ 의 부분행렬로 이루어진다. 식 (13)이 유용해를 갖기 위해서는 행렬식이 다음과 같이 0이 되어야 한다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \omega_{mn}^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

식(14)는 잘 알려진 고유치문제로서 이 문제를 수치적으로 풀음으로써 구하고자 하는 구조물의 고유진동수와 진동형상을 얻을 수 있다.

### 3. 수치결과 및 토의

본 해의 정확도를 검증하기 위해 기존에 발표된 실험결과와 본 연구에서 수행된 유한요소해석



**Fig. 2** Effect of stiffener eccentricity on frequencies of the 5-evenly spaced ring stiffened cylindrical shells.

결과를 이용하여 비교, 검토하였다. 유한요소해석은 상용프로그램인 ANSYS<sup>(11)</sup>를 이용하였으며, 사용된 요소는 ANSYS에서 제공하는 탄성 셀요소인 SHELL63으로, 이 요소는 4-절점, 6-자유도를 갖는다. 본 연구에서는 진동형상 중에 대칭형상만을 고려하였기 때문에 유한요소모델은 1/4 모델만을 하였으며, 유한요소해석에서의 고유치 문제는 축소 부공간 해석법(reduced subspace analysis)이 사용되었다.

#### 3.1 링보강 원통셀

Table 1은 5개의 링이 외부에 보강된 셀에 대해 참고문헌<sup>(1)</sup>의 실험결과, 유한요소해석결과를 이용하여 본 해석해와 비교한 것이다. 사용된 재료는 연강이며 기하자료는 참고문헌의 자료를 이용하였다. 표에 나타난 것처럼 본 해석해가 다른 실험 및 유한요소결과보다 약간 큰 진동수를 보이고 있다. 이와 같은 현상은 이미 알려진 바와 같이 일반적으로 이론해는 다른 결과에 비해 상한치(upper bound)를 보이며, 실험결과는 하한치(lower bound)의 결과를 보이고 있기 때문이다. 전반적으로 본 해와 다른 해간에 서로 잘 일치하고 있다.

앞으로 제시될 모든 결과들에 이용된 재질은 알루미늄으로 다음과 같은 재료특성 및 기하자료를 갖는다.

$$E=68.9\text{GPa}, \nu=0.3, \rho=2700\text{kg/m}^3 \\ R=304.8\text{mm}, L=2R, h=3.048\text{mm}$$

Fig. 2는 5개의 링이 등간격으로 보강된 원통셀에 대해 링의 편심에 따른 영향을 보여 주고 있다.

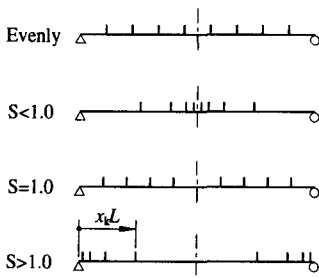


Fig. 3 Ring stiffener arrangements of the cylindrical shell with the evenly and functionally spaced ring stiffeners.

그림에 나타난 것처럼 내부 보강된 셸이 외부 보강된 셸의 진동수보다 약간 큰 경향을 보이고 있으며, 중립 보강된 셸이 가장 작은 진동수를 갖는다. 또한 작은 원주방향 반파수( $n=1,2$ )에 대해서는 링의 편심에 따른 영향이 거의 없어 진동수가 각각의 모드에 대해 거의 같게 나오고 있으나, 큰 원주방향 반파수에 대해서는 보강재의 편심에 따라 같은 모드에서의 진동수차이가 크게 발생하는 것을 볼 수 있어 작은 원주방향 반파수보다 큰 원주방향 반파수에 대해 보강재의 편심이 진동수에 커다란 영향을 미치고 있는 것을 알 수 있다

Fig. 3에서는 원통셸에 링 보강재가 등간격으로 보강된 경우뿐 아니라 보강재간의 간격이 일정 비율을 갖도록 보강재의 위치변화를 도시적으로 나타낸 것이다. 보강재의 위치를 나타내는 함수  $x_k$ 는 식(15)와 같이 보강재의 분포비율  $S$ 에 따라 보강재의 위치가 달라지고, 짝수 개의 보강재에 대해서만 적용이 될 수 있으며, 보강재는 셸의 중앙을 기준으로 대칭으로 위치하게 된다.

$$x_k = \sum_{k=1}^{N_r} S^{k-1} / X, \quad X = \sum_{i=1}^{N_r} S^{i-1} \quad (15)$$

그림에서처럼  $S$ 가 1.0보다 크면 보강재의 위치는 셸의 양단부근에,  $S$ 가 1보다 작으면 셸의 중앙에 편중이 되며,  $S$ 가 1이면 셸의 대칭축을 기준으로 한쪽 단에 대해 보강재가 등간격으로 분포되어 좌우 대칭을 이룬다.

Fig. 4는 8개의 링이 외부에 보강된 경우 분포비율  $S$ 의 변화에 따른 고유진동수거동을 보여주고 있다. 그림에 나타난 것처럼 분포비율  $S$ 의 증가에 따라  $n=2$  모드에서의 진동수는 증가하는 것을 볼 수 있으나 기본진동수가 나타나는  $n=4$  모

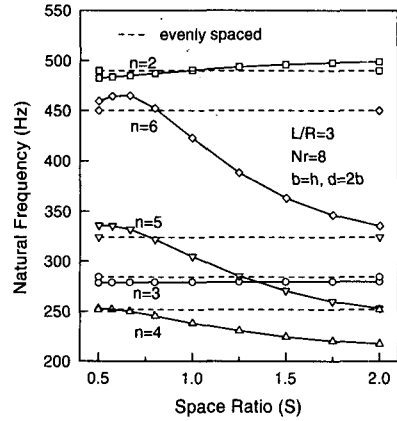


Fig. 4 Effect of ring stiffener number on fundamental frequencies of the cylindrical shells with the externally eccentric ring stiffeners.

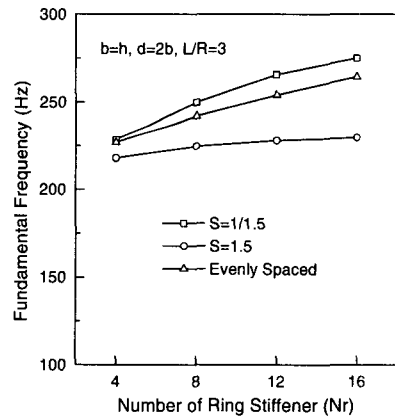


Fig. 5 Effect of stiffener arrangement on frequencies of the cylindrical shell with 8-externally eccentric ring stiffeners.

드를 포함한 다른 모드에서는 진동수가 감소하는 경향을 갖는다. 한편  $S$ 가 커짐에 따라 진동차수가 서로 바뀌는 것을 볼 수 있다. 즉 2차 진동모드가 초기에는  $n=3$ 에서 발생이 되었으나  $S=1.3$  이상에서 2차 진동모드가  $n=5$ 로 변화되는 것을 볼 수 있다. 그리고 그림에서 점선으로 표시된 8개의 링이 등간격으로 분포된 셸에 대한 진동수와 비교할 경우  $n=2$  모드를 제외하고 전반적으로 큰 분포비율  $S$ 를 갖는 셸의 진동수가 작게 나타나고 있다. 다시 말해서 보강재를 셸의 중앙쪽으로 보강할 경우 등간격으로 보강할 경우보다 큰 진동수를 얻을 수 있다는 것을 의미하며, 이와 같은 현상은 보강재가 셸의 중앙으로 편재됨으로써 상대적으로 큰

**Table 2** Frequency comparison of the cylindrical shell without/with a cutout( $L=2R$ ).

Natural Frequencies(Hz) ( $m=1$ )					
No Cutout			With Cutout( $L/3 \times 90^\circ$ )		
Present	FEM	Mahabalaraja	Present	FEM	Mahabalaraja
314.2(5)	310.2(5)	307.0(5)	139.7(4)	135.0(4)	144.8
343.2(6)	337.5(6)	334.5(6)	295.9(5)	286.4(5)	301.4
368.2(4)	366.7(4)	362.1(4)	334.2(6)	326.8(6)	333.1
422.8(7)	414.5(7)	412.8(7)	403.8(7)	393.6(7)	402.5

**Table 3** Frequency comparison of the 11-externally eccentric, evenly spaced ring stiffened cylindrical shell without/with a cutout ( $b=d=h$ ).

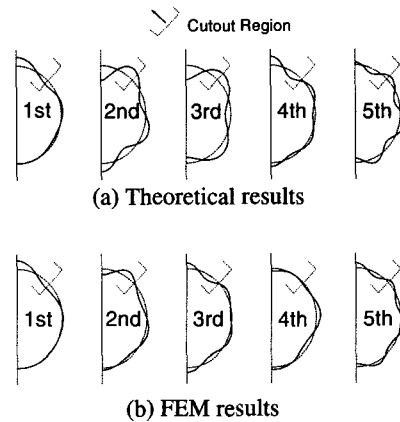
Natural Frequencies(Hz) ( $m=1$ )			
No cutout		With cutout( $0.3L \times 90^\circ$ )	
Theory	ANSYS	Theory	ANSYS
335.7(5)	331.1(5)	162.3(4*)	155.9(4*)
366.8(4)	361.9(4)	332.7(5)	314.5(5)
394.6(6)	393.2(6)	361.3(4)	375.5(6)
505.6(7)	504.1(7)	384.9(6)	394.0(5*)
527.5(3)	521.9(3)	499.7(7)	478.9(7)

변위가 발생하는 셀의 중앙 부위의 강성이 증가되었기 때문에 나타나는 현상으로 판단된다.

링 보강재수에 따른 기본진동수의 변화를 Fig. 5에 나타냈다. 그림에 나타난 것처럼 고려된 모든 경우에 대해 진동수는 보강재수의 증가에 따라 증가를 하며,  $S=1/1.5$  인 경우 보강재수에 대해 진동수가 가장 민감하게 반응을 하고,  $S=1.5$  인 경우 보강재수에 따라 보다 둔감하게 작용을 한다. 한편  $S=1.5$  의 보강재 분포를 갖는 셀의 경우 보강재가 많아지면 진동수가 어느 일정한 값으로 접근하는 것을 예상할 수 있어, 전반적으로 많은 링으로 보강을 할지라도 진동수를 항상 크게 할 수는 없을 것으로 판단되며, 이와 같은 현상은 보강함으로써 셀의 강성증가와 함께 질량증가도 동시에 일어나기 때문이다.

**3.2 사각개구부를 갖는 원통셀**

Table 2는 사각개구부를 갖고 보강되지 않은 원통셀에 대해 최초 4차까지의 고유진동수를 Mahabalaraja<sup>9)</sup>의 결과와 유한요소해석결과를 이용하여 본 이론해와 비교한 것이다. 이 때 사각개구부는  $L/3 \times 90^\circ$ 의 크기를 갖는다. 표에 나타난 것처럼 사각개구부를 갖지 않는 경우 서로간의 차이는 최대 3%미만이며, 사각개구부를 갖는 경우에 대해서는 약 5%의 최대 차이를 보이고 있어 사각개



**Fig. 6** Circumferential mode shapes of the ring stiffened cylindrical shell with a  $0.3L \times 90^\circ$  cutout.

구부를 갖는 경우나 갖지 않는 경우 모두에 대해서도 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 또한 본 이론해가 다른 해에 비해 전반적으로 다소 크게 나타나고 있는 것을 볼 수 있으나, 사각개구부를 갖는 셀에 대해서만 Mahabalaraja의 결과보다 부분적으로 작게 나온다. 한편 사각개구부가 존재함으로써 진동형상이 변화되는 것을 볼 수 있다. 사각개구부가 없는 경우에는 원주방향 반파수  $n=5$ 에서 기본진동수가 나타나지만, 사각개구부가 존재함으로써  $n=4$ 에서 기본진동수가 나타난다. 이와 같은 현상은 개구부의 크기에 의한 영향으로 개구부의 크기가 작아지면 이와 같은 진동형상의 변화는 볼 수 없을 것이다.

Table 3은 셀의 외부에 11개의 링이 등간격 보강된 원통셀에 대해 사각개구부가 있는 경우와 없는 경우에 대해 비교하였으며, 기존의 문헌에서는 사각개구부를 갖는 보강 원통셀에 대한 결과가 없기 때문에 유한요소해석결과만을 비교 대상으로 선택하였다. 이 때 사각개구부의 크기는  $0.3L \times 90^\circ$ 이며, 보강재의 폭 및 높이는 셀의 두께와 같은

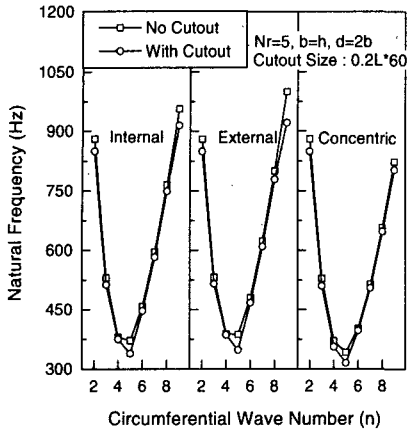


Fig. 7 Effect of stiffener eccentricity on frequencies of the 5-evenly spaced ring stiffened cylindrical shells with a cutout.

것을 채택하였다. 사각개구부를 갖지 않는 원통셀의 경우 이론해와 유한요소해는 거의 정확하게 일치하고 있으나, 사각개구부를 갖는 원통셀의 경우 약간의 차이가 존재하는 것을 볼 수 있으며, 최대 차이는 6% 정도로 비교적 잘 일치한다. Table 1 및 2에서 나타난 것처럼 비교적 큰 개구부가 존재함으로써 전반적으로 진동수는 감소를 하며, 특히 기본진동수는 약 50%의 큰 감소가 일어나고 있으나 다른 차수에서의 진동수는 상대적으로 작은 진동수 감소가 일어나고 있다. 한편 표에서 원주방향 반파수에 (\*)표시를 한 것은 다음의 Fig. 6에 제시된 것처럼 사각개구부가 존재함으로써 나타나는 특이한 형태의 원주방향 진동형상을 표시한 것이다.

Fig. 6에서는 Table 3의 사각개구부를 갖는 링보강 원통셀에 대한 본 이론해와 유한요소해석결과에서 얻은 원주방향 진동형상을 비교한 것이다. 제시된 진동형상은 축 방향으로의 개구부 끝 단인  $x=0.3L$ 에서 얻은 결과를 이용하여 도시한 것이다. 그림에 나타난 것처럼 개구부를 갖는 셀의 진동형상에서 특히 일차 진동형상에 대해 원주방향 반파수를 알아내는 것은 매우 어렵다. 본 이론해의 결과와 유한요소해석결과에서 얻은 진동형상은 3차와 4차 진동형상을 제외하고는 거의 같은 것을 알 수 있다. 여기서 이론해의 4차와 유한요소해의 3차가 서로 같은 형상을 갖으나 각 결과에서의 진동 차수가 다르게 나타나고 있다. 이론해에서는 서로의 진동형상은 다르지만  $n=4$ 의 진동형상이 1차와 3차에서 나타나고 있으나, 유한요소 결과에서는  $n=5$ 의 진동형상이 2차와 4차에서 나타나고 있다. 한편 일반적으로 다른 곳에 비해 개구부단

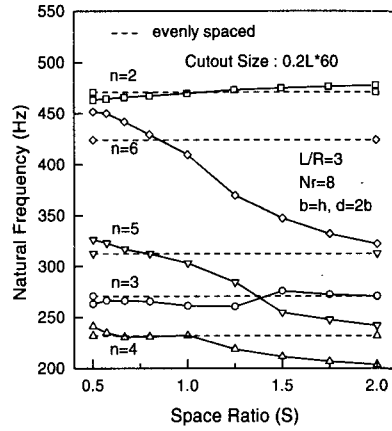


Fig. 8 Effect of stiffener arrangement on frequencies of the 8-externally eccentric ring stiffened cylindrical shells with a cutout.

의 중앙에서 상대적으로 큰 변위가 발생이 되며, 개구부에서 멀어질 수록 상대변위가 감소하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 7는  $0.2L \times 90^\circ$ 의 사각개구부를 갖고 5개의 링이 등간격으로 보강된 원통셀에 대해 링의 편심에 다른 영향을 보여 주고 있다. 그림에 나타난 것처럼 개구부가 없는 경우와 같은 거동을 하며, 개구부에 의한 진동수감소는 기본진동수가 나타나는  $n=5$ 에서 가장 크게 나타났으며, 모든 보강에 대해 기본진동수가 나타나는  $n=5$ 를 기준으로 이 점에서 멀어질 수록, 즉  $n$ 이 작아지거나 커질 수록 개구부에 의한 진동수감소가 크게 나타나고 있다.

Fig. 8는 사각개구부를 갖고 8개의 링이 외부에 보강된 셀에 대해 보강재의 분포비율  $S$ 의 변화에 따른 고유진동수거동을 보여 주고 있다. 그림에 나타난 것처럼 분포비율  $S$ 의 변화에 따른 진동수 거동이 개구부가 없는 셀의 경우와 거의 같은 거동을 하나,  $n=3$  모드에서는 진동수가  $S=1.5$ 에서 약간 증가하는 결과를 보이고 있다. 또한 원주방향 반파수가 클수록  $S$ 에 의한 영향이 크게 작용하는 것을 볼 수 있다.

사각개구부를 갖는 셀에 대해 보강재의 수에 따른 기본진동수 변화거동을 Fig. 9에 나타냈다. 개구부를 갖는  $S=1.5$ 의 분포비율로 보강된 원통셀의 경우 보강재수의 영향이 거의 없어 진동수가 거의 일정한 값을 갖는다. 이와 같은 현상이 나타나는 이유는  $S=1.5$ 인 경우 보강재가 거의 셀의 끝 단에 분포되어 개구부의 영향이 보강재에 미치지 않기 때문으로 판단된다. 한편 등간격으로 보강된 셀의 경우에서 보강재가 많아지면 진동수가

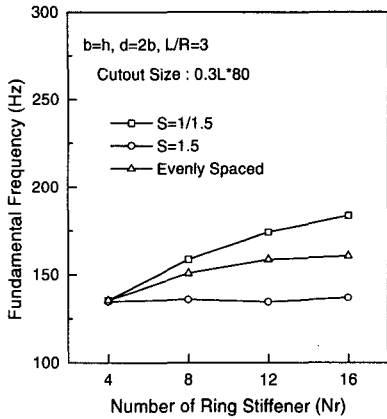


Fig. 9 Effect of stiffener arrangement on frequencies of the 8-externally eccentric ring stiffened cylindrical shell with a cutout.

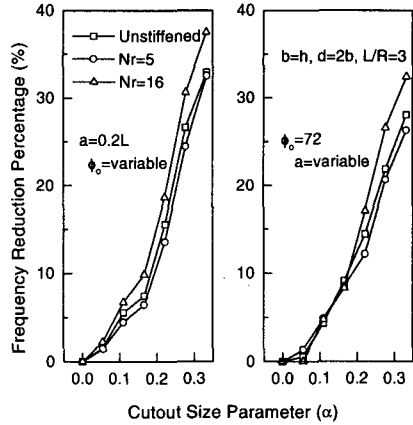


Fig. 10 Effect of cutout sizes on fundamental frequencies of the cylindrical shells with the various ring arrangements of the internally eccentric ring stiffeners.

어느 일정한 값으로 접근하는 것을 예상할 수 있어, 다른 분포비율을 갖는 셀에 대해서도 보강재가 많아지면 진동수가 일정한 값으로 접근할 것으로 예상된다.

Fig. 10은 내부에 등간격으로 보강된 원통셀에 대해 보강재의 수를 달리 하였을 경우 개구부의 크기가 셀의 기본진동수에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 여기서 개구부의 크기를 결정하는 매개변수  $\alpha$ 는 개구부의 크기를 나타내는  $a \times \phi_0$ 에서 개구 길이를  $a = \alpha L$ 로, 또는 개구각을  $\phi_0 = \alpha \times 360^\circ$ 로 나타냈을 때 도입된 비례상수이며, 진동수 감소율은  $(f_u - f_c) / f_u \times 100(\%)$ 로 계산된 것으로  $f_u$ 는 개구부를 갖지 않는 원통셀의 기본진동수이고  $f_c$ 는 개구부를 갖는 셀의 기본진동수이다. 좌측 그림은 개구길이를 고정하고 개구각의 크기를 변화시켰을 때의 결과이고, 우측은 그 반대의 결과로 개구 길이 및 개구각의 크기변화에 따른 기본진동수의 변화를 비교하고자 한 것으로 같은 매개변수  $\alpha$ 를 갖는 경우 개구부의 전개된 면적은 동일하다. 그림에 나타난 것처럼 축방향 또는 원주방향으로 개구부가 커질 경우 전반적으로 진동수가 감소되는 것을 볼 수 있다. 특히 개구각의 크기를 변화시켰을 경우 개구길이를 변화시켰을 경우보다 진동수감소가 크게 일어나고 있다. 이와 같은 현상은 셀의 1차 진동형상은 모든 셀에 대해 축방향 진동모드  $m=1$ 에서 이루어지고, 원주방향 진동모드  $n$ 은 셀의 길이 등과 같은 기하변수에 의해 변화될 수 있기 때문에 원주방향으로 개구부의 크기를 변화 시킴으로써 셀이 원주방향에 대한 강성이 축

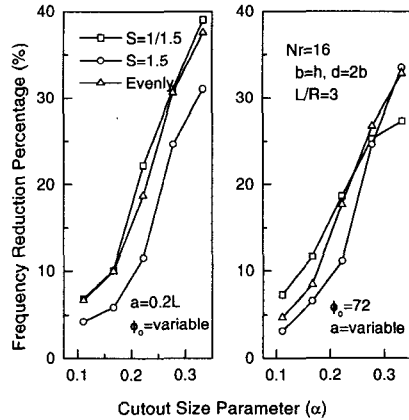


Fig. 11 Effect of cutout sizes on fundamental frequencies of the cylindrical shells with the various numbers of the internally eccentric evenly spaced ring stiffener.

방향 강성보다 크게 감소되었기 때문에 나타나는 현상으로 사료된다. 한편 개구부의 크기를 변화시켰을 경우 보강재수가 5인 경우는 보강되지 않은 셀의 진동수감소보다 적게 진동수 감소가 나타나 보강의 효과를 얻을 수 있으나, 보강재가 많아질 경우 오히려 반대현상이 발생된다. 이와 같이 보강을 많이 할 경우 개구부에 의해 강성저하가 보강을 적게 할 경우보다 크게 일어나기 때문에 나타나는 현상이다.



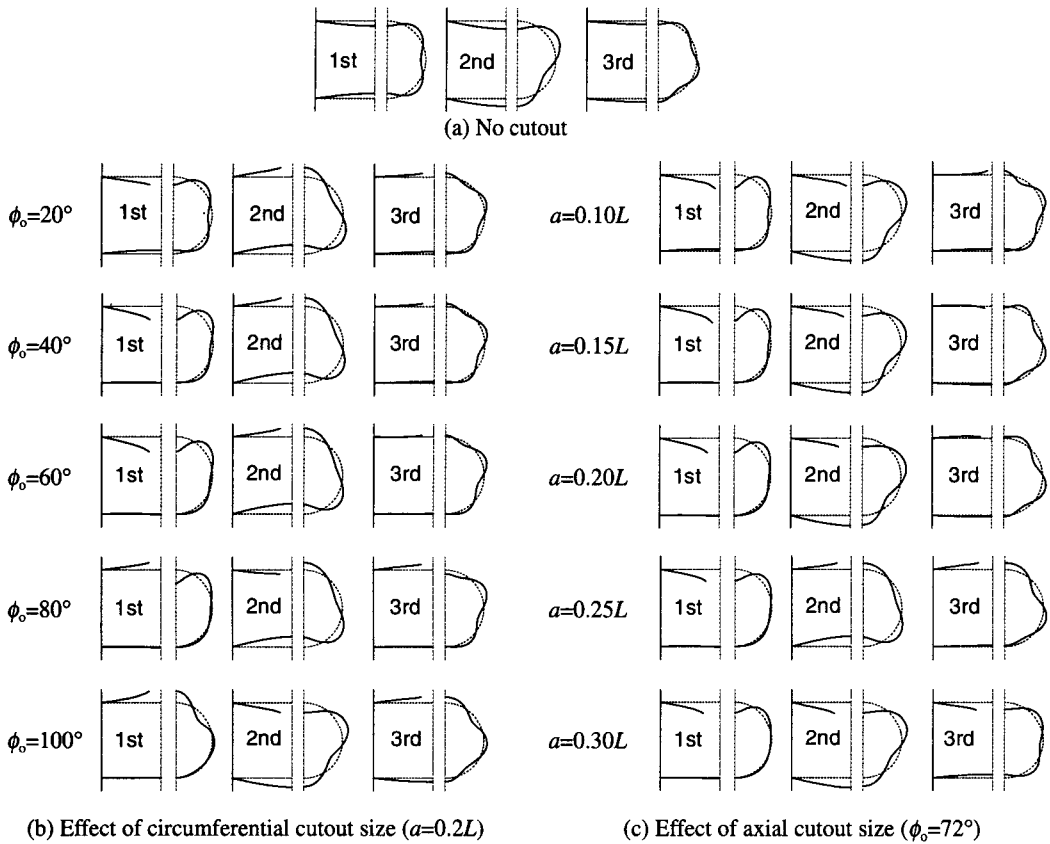


Fig. 12 Effect of cutout sizes on mode shapes of 10 internally eccentric, evenly spaced ring stiffened cylindrical shells with a cutout ( $b=h, d=2h, L/R=3$ ).

Fig. 11 은 Fig. 10 의 경우처럼 원주방향 및 축방향 개구부의 크기가 보강재의 분포를 달리한 셀의 기본진동수에 미치는 영향을 나타낸 것이다. Fig. 10 과 마찬가지로 개구각의 크기에 따른 영향이 개구길이에 따른 영향보다 크게 작용하고 있다. 먼저 개구각 변화에 대해 보강재의 분포비율이 큰  $S=1.5$  인 경우가 개구부에 의해 가장 작게 진동수 감소가 나타났으며, 등간격분포 및  $S=1/1.5$  인 경우는 거의 같은 진동수 감소를 나타내고 있으나  $S=1/1.5$  가 약간 큰 진동수감소를 유발시킨다. 이와 같은 현상은 고려된 개구길이  $0.2L$  에 의해  $S=1.5$  인 경우에는 보강재가 셀의 양단에 분포되어 개구부에 의해 링 보강재가 손상을 입지 않아 가장 적은 진동수감소가 일어났으나, 등간격 및  $S=1/1.5$  인 경우는 개구길이  $0.2L$  에 의해 링 보강재가 상당수 손상을 입었기 때문에 진동수감소가 크게 일어난 것이다. 한편 개구길이의 변화에 대해 개구부의 크기 매개변수  $a$  가 작은 곳에서는

$S=1/1.5$  인 경우 가장 큰 진동수감소가 일어나고, 개구부 매개변수  $a$  가  $0.27$  이상인 경우에는  $S=1/1.5$  인 경우가 가장 작은 진동수 감소를 보이고 있다. 이와 같은 현상은  $S=1/1.5$  인 경우 많은 수의 보강재가 셀의 중앙에 집중되어 작은 개구길이에 대해서도 보강재가 손상을 입게 되고, 매개변수  $a$  가 커짐으로써  $S=1.5$  인 경우에도 보강재가 손상을 입게 되어 많은 진동수감소가 발생된 것이다.

Fig. 12 는 10 개의 링이 내부에 등간격으로 보강된 셀의 진동형상에 개구부의 크기가 미치는 영향을 나타내고 있다. 개구부가 없는 원통셀의 진동형상은 1 차에서는 원주방향 반파수  $n$  이 4 이고, 2 차 및 3 차 진동형상은  $n=3, 5$  에서 나타난다. 먼저 개구각의 크기에 따른 진동형상에서 개구각이 작은  $\phi_0=20^\circ$ 에서의 진동형상은 개구부가 없는 셀의 진동형상과 동일하나, 개구각이 커짐으로써 1 차 진동형상에서 많은 변화가 일어나고 있다. 그

러나 2차 진동형상은 개구각의 크기에 관계없이 진동형상에는 변화가 없으며, 3차 진동형상의 경우  $n=5$ 의 형상에서 개구각이 커짐으로써  $n=4$ 의 형상으로 전화되었음을 볼 수 있다. 한편 개구길이에 따른 영향은 1차 및 2차 진동형상에서 크기에 관계없이 동일하게 나오고 있다. 이와 같은 현상은 원주방향 진동형상에 영향이 큰  $72^\circ$ 의 개구각이 고려되었기 때문에 나타나는 현상이다. 3차 진동형상은 앞의 개구각의 영향에서와 같이 개구길이가 커짐으로써  $n=5$ 에서 4로 진동형상이 전환됨을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 단순지지 경계조건을 갖는 링보강 원통셀에 대해 셀의 중앙에 위치하는 사각개구부가 보강셀의 고유진동수 및 진동형상에 미치는 영향을 Rayleigh-Ritz을 기초로 한 이론적 방법을 이용하여 분석하였다. 본 연구의 수치예를 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

보강재의 편심은 진동수에 영향을 미치며, 보강을 함으로써 진동수를 전반적으로 늘리 수는 있으나, 진동수를 늘릴 수 있는 보강재수의 한계가 있는 것을 알았다. 보강재를 셀의 중앙쪽으로 보강할 경우 중간격으로 보강할 경우보다 큰 진동수를 얻을 수 있다. 개구부가 존재함으로써 진동수는 감소하였으며, 특히 기본진동수에서 가장 많은 진동수 감소가 일어났다. 또한 큰 개구부가 존재할 경우 반파수에 의한 원주방향 진동형상을 판별하기가 매우 어려웠으며, 개구부를 갖지 않는 셀의 진동순서와 다르게 나타나는 것을 알 수 있었다. 개구각의 크기 변화가 개구길이의 변화보다 진동수감소에 민감하다. 보강재가 많아질 경우 개구부에 의한 진동수 감소가 더욱 크게 일어난다.

이와 같이 링보강 및 개구부가 존재함으로써 발생하는 고유진동수의 변화를 분석함으로써 외부의 동적 하중에 의한 구조물의 공진을 피할 수 있어 구조물의 안정성 평가에 유용하게 이용될 것으로 기대되며, 향후 원통셀 구조물에 존재할 수 있

는 다양한 형태의 개구부에 대한 연구와 개구부의 위치에 따른 진동특성연구가 수반되어야 할 것이다.

#### 참고문헌

- (1) Al-Najafi, A. M. J. and Warburton, G. B., 1970, "Free Vibration of Ring-Stiffened Cylindrical Shells," *J. of Sound and Vibration*, Vol.13, pp.9-25.
- (2) Mustafa, B. A. J. and Ali, R., 1987, "Prediction of Natural Frequency of Vibration of Stiffened Cylindrical Shells and Orthogonally Stiffened Curved Panels," *J. of Sound and Vibration*, Vol.113(2), pp.317~327.
- (3) Yang, B. and Zhou, J., 1995, "Analysis of Ring-Stiffened Cylindrical Shells," *J. of Applied Mechanics*, Vol.62, pp.1005~1014.
- (4) 이영신, 김영완, 1996, "길이방향으로 보강된 복합재료 원통셀의 진동해석," 대한기계학회논문집 (A), 20 권, 7 호, pp.2223-2233.
- (5) 이영신, 김영완, 1996, "복합재료원통셀의 고유진동수 및 좌굴하중에 대한 직교보강특성 연구," 한국소음진동공학회, 6 권, 4 호, pp.457~467.
- (6) Lee, Y. S. and Kim, Y. W., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Composite Cylindrical Shells with Orthogonal Stiffeners," *Computers and Structures*, Vol.69(2), pp.271~281.
- (7) Wang, M., Swaddiwudhipong, S., and Tian, J., 1997, "Ritz Method for Vibration Analysis of Cylindrical Shells with Ring Stiffeners," *J. of Engineering Mechanics*, Vol. 123, pp.134~142.
- (8) Brogan, F., Forsberg, K., and Smith, S., 1969, "Dynamic Behavior of a Cylinder with a Cutout," *AIAA Journal*, Vol.7, pp.903~911.
- (9) Mahabalaraja, Boyd, D. E., and Brugh, R. L., 1977, "Vibrations of Stiffened Cylinders with Cutouts," *J. of Sound and Vibration*, Vol.52(1), pp.65~78.
- (10) 이영신, 김영완, 1998, "회전운동을 고려한 cutout 이 있는 복합재료원통셀의 구조진동해석 및 최적설계," 한국소음진동공학회지, 8 권, 3 호, pp.467~476.
- (11) SASI, 1992, "ANSYS Users Manual," Swanson Analysis System Inc., Houston, Vol. III Element.