

## 반응표면분석법을 이용한 세탁기의 최적설계

한형석\* · 김태영\*\* · 박태원\*\*\*  
(1998년 3월 9일 접수)

### Optimal Design of a Washer using a Response Surface Method

Hyung Suk Han, Tae Young Kim and Tae Won Park

**Key Words:** Design of Experimental(실험계획법), Response Surface Analysis(반응표면분석법), Orthogonal Array(직교배열표), Washer(세탁기)

#### Abstract

An optimal design method using a response surface method for dynamic characteristics of a washer is presented. The proposed method uses the design of experiment and a computer model is used for the experiment. The value of the cost function is estimated using a computer model for each case of the design variable variation. An orthogonal array is used to obtain best cases to be considered with minimum number of experimentation. Using these experimental values, optimal design is performed using a response surface method. The method used in this paper can be applied to any complicated mechanical systems that can be modelled and analyzed by a computer program. The method is applied to the design of dynamic characteristics of a washer.

#### 1. 서론

기계계의 동적문제에 대한 최적 설계는 이미 여러 연구자들에 의하여 이루어졌고 또한 여러 문제에도 적용되었다.<sup>(1-3)</sup> 그러나 제안된 많은 최적 설계법은 해석에 의존하기 때문에 복잡한 기계계의 경우 운동방정식의 유도에 많은 어려움이 있고<sup>(2)</sup> 따라서 간단한 기계계에는 정확한 해석을 할 수 있는 장점이 있으나 복잡한 기계계에서는 적용하기 힘든 단점이 있다.

이 논문에서는 해석적인 기계계의 최적 설계의 단점을 극복할 수 있는 설계법을 제시한다. 본 논문에서 제안한 최적 설계 방법은 최근에 급격히 발달한 컴퓨터 해석 기술과 실험계획법을 조합한 것이다. 실험에 의존한 최적 설계 과정인

실험계획법은 이미 잘 알려져 있다.<sup>(4)</sup> 본 논문에서는 실험계획법에 의한 최적 설계에 기초를 두고 실험을 실제 제품이 아닌 컴퓨터 해석으로 대체하였다. 현재 기계계에 대한 해석 기술이 발달하여 복잡한 기계계도 실제 실험을 컴퓨터 해석으로 대체할 수 있기 때문에 대상 기계계에 대한 체계적인 최적 설계 방법을 제시하였다. 제안한 최적 설계 방법을 세탁기의 흔들림 저감 설계에 적용하여 제안된 설계법의 타당성을 확인하였다.

#### 2. 기계계의 최적 설계

실험 계획법과 컴퓨터 해석 프로그램을 조합한 최적설계 과정은 Fig. 1과 같다. 이 과정의 특징은 일반적인 실험계획법에 기초를 두고 있으면서 단지 실제 실험 대신 컴퓨터 해석을 이용하였다. 우선 설계 대상 기계계에 대한 신뢰성 있는 해석 모델의 검증이 이루어진 후 설계 변수와 목적 함수를 정의한다. 다음으로 설계 변수들의 민감도 해석을 기존의 해석적(analytical) 방법을 쓰지 않

\* 한국기계연구원

\*\* LG생산기술원

\*\*\* 회원, 아주대학교 기계및산업공학과

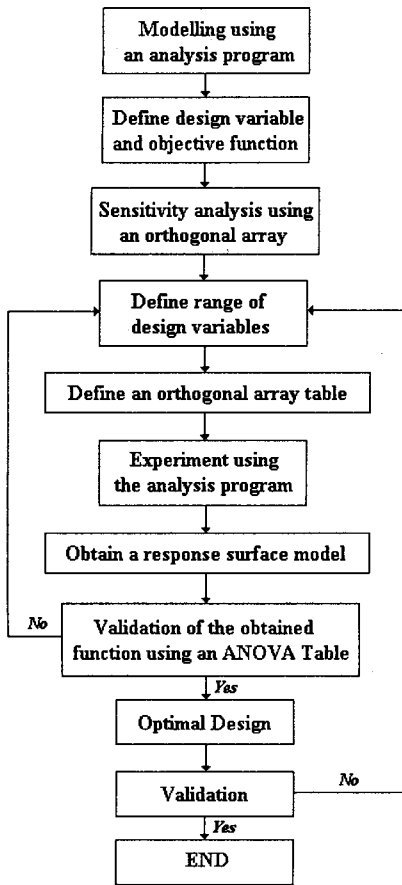


Fig. 1 Optimum design process.

고 직교배열표와 분산분석을 이용한다.<sup>(4)</sup> 직교배열표는 적은 횟수의 실험으로 여러 정보를 얻을 수 있다는 장점을 가진다. 직교배열표에 의하여 민감도 특성이 파악되면 그 결과에 기초하여 민감한 변수부터 선택하고 반응표면 분석법을 이용하여 회귀모형을 추정한 후 추정된 모델을 이용하여 최적 설계가 이루어지게 된다.<sup>(5)</sup>

최적설계 과정에서 이용하는 반응표면분석법(response surface analysis)<sup>(5)</sup>은 공정설계 등에서 실험에 의하여 최적의 반응점을 찾는데 이용되어 왔다. 반응표면분석법에 의한 최적화 과정을 도식적으로 보면 Fig. 2와 같다. 반응표면분석법은 흥미영역에서 설계변수와 목적함수와의 관계 즉 반응표면을 추정한 후 극점을 체계적으로 찾아가는 실험적 최적 설계법이다. Fig. 3에서 보인 바와 같은 반응표면분석법의 장점은 최적점을 찾아갈 뿐만이 아니라 설계변수와 목적 함수가 이루

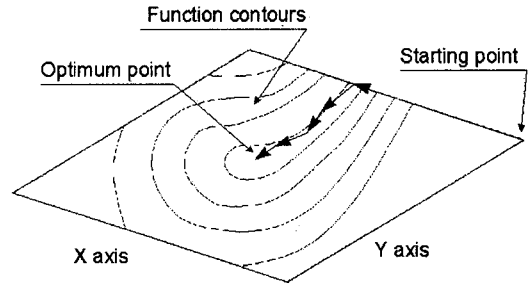


Fig. 2 Optimization by the response.

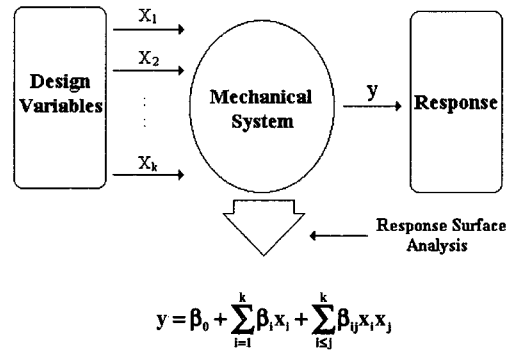


Fig. 3 Response surface analysis.

는 반응표면을 분석할 수 있다는 점이다. 반응표면분석법에서 설계변수와 목적함수가 이루는 반응표면모델은 기계계에서 일반적으로 비선형으로 2차 이상의 고차항을 쓸 수 있으나 3차 이상의 경우 실험횟수가 기하급수적으로 늘어남으로 문제의 목적에 맞게 가능한 저차항으로 근사화하는 것이 유리하다. 이 논문에서는 2차 다항식을 이용하였다. 일단 기계계에 대한 2차 다항식 모델이 추정되면 추정된 수학적 모델을 이용하여 근사 최적화 문제를 정의할 수 있고 근사 최적점을 찾을 수 있다. 여기서 2차 다항식 모델을 추정하기 위하여 해석 프로그램이 이용된다. 현재 상용 해석 프로그램들은 복잡한 기계계에 대한 해석이 가능하며 신뢰성을 인정받고 있다. 반응표면 모델의 추정시 최소의 실험 즉 컴퓨터 해석 조건을 계획하고 추정된 모델의 신뢰성을 검증해야 한다. 이 논문에서는 2차 모델을 추정하기 위하여 중심합성계획법을 이용하였으며 신뢰성 검증에는 ANOVA Table 즉 분산분석표를 이용하였다.<sup>(4)</sup>

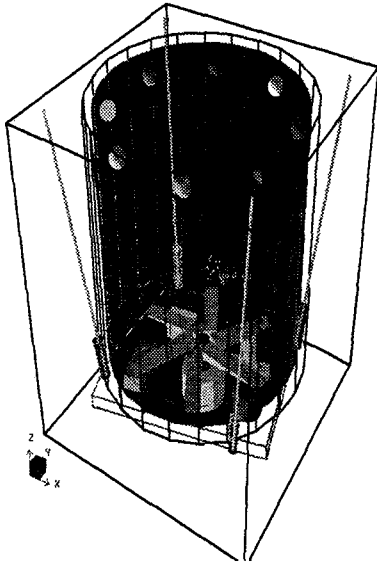


Fig. 4 Washer.

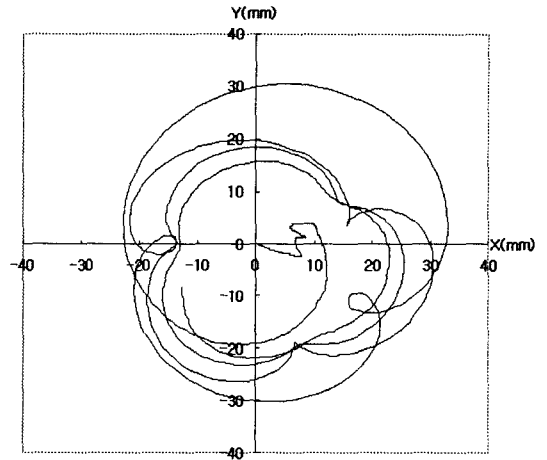


Fig. 5 Shaking of tube.

### 3. 적용

2장에서 제시한 최적 설계 과정을 동적 문제인 세탁기의 흔들림 최소화에 적용하였다.

Fig. 4는 이 논문에서 설계한 세탁기를 보여주고 있다. 세탁기는 세탁물의 불평형에 의하여 운동 시작시 Fig. 5와 같이 용기(tube)를 흔들리게 된다. 이 흔들림이 클 경우 내부 용기와 외부 용기와의 접촉이 생길 수 있기 때문에 최소의 흔들림을 갖게 하기 위한 용기의 지지부 설계가 중요하다. 이 세탁기의 흔들림 최소화 설계를 이 논문에서 제안한 최적 설계 과정에 따라 수행하였다.

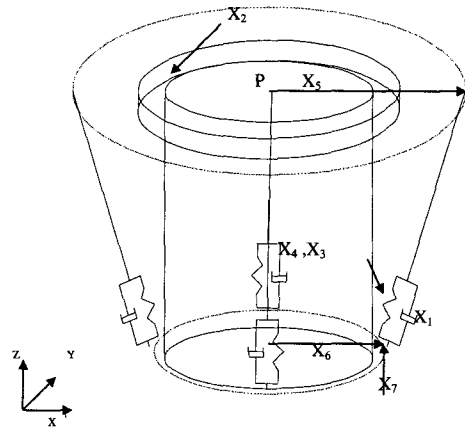


Fig. 6 Design variables.

**과정 1:** 세탁기의 모델링, 설계 변수, 목적 함수 정의

Fig. 4와 같은 세탁기의 동적 모델링을 동력학 해석 프로그램을 이용하여 완성하였다. 각 부품의 물성치는 도면과 실험을 통하여 구하였으며 완성된 모델의 신뢰성도 실험에 의하여 확인하였다. 최적 설계를 하고자 하는 용기 부분의 구조는 Fig. 6과 같다. 용기 지지부의 구조상 7개의 설계 변수를 선택할 수 있었다. Table 1에 7개의 변수에 대한 각 수준이 표시되어 있는데 Level 1은 초기 설계치이며 Level 0, Level 2는 설계 변

경 가능한 영역을 나타내고 있다. 최소화시킬 목적 함수는 Fig. 6에서 P점의 X-Y 평면상에서의 궤적 중 원점에서의 최대 거리로 하였다. 최대 거리를 최소화시킴으로써 세탁기 용기의 흔들림을 최소화할 수 있다.

**과정 2:** 직교배열표를 이용한 민감도 해석

과정 1에서 선택된 설계 변수들의 목적 함수에 대한 민감도를 분석하고 설계변수 7개에 대한 최소의 실험으로 효과를 얻기 위하여 Table 2를 이용하였다. Table 2에 7개의 설계 변수를 1열-7열

Table 1 Design variables and its levels.

Design Variable	Content	Level 0 (Xi <sup>0</sup> )	Level 1 (Xi <sup>1</sup> )	Level 2 (Xi <sup>2</sup> )
X1	Damping Coefficient	0.05	0.161	0.272
X2	Damping Coefficient of an Auto Balancer	0.276	0.638	1.0
X3	Spring Coefficient	0.1	0.2754	0.4508
X4	Free length of the Spring	92	107	122
X5	Upper point of a Snubber bar(radial direction)	540	560	580
X6	Lower point of a Snubber bar(radial direction)	265	285	305
X7	Lower point of a Snubber bar(height)	46	66	86

에 배치하였고 8열에서 13열은 설계인자 사이의 교호작용을 고려하여 배치하고 총27회의 실험 즉 컴퓨터 해석을 수행하였고 그 결과는 Table 2의 마지막 열과 같다. Table 2의 결과에 대하여 변동 분석을 수행하면 Fig. 7과 같다. Fig. 7은 각 설계 변수가 변동에 주는 영향을 보여주고 있다. 수직 축은 변동

$$\frac{1}{9} \{ (0\text{수준의 데이터의 합})^2 + (1\text{수준의 데이터의 합})^2 + (2\text{수준의 데이터의 합})^2 \} - CT$$

을 나타내며 여기서  $CT = \frac{T^2}{9}$  이다. 이 세타기의 설계는 변동이 작을 수록 좋은 것이다. 또한 Table 2에 대한 분산분석 결과가 Table 3에 주어져 있다. 분산분석 결과 용기의 흔들림에 민감한 설계 변수 순서는 X6 > X3 > X5 > X7 > X4 > X2 > X1 임을 알 수 있다. 또한 각 설계 변수의 수준에 대한 변동을 Fig. 7을 통하여 알 수 있으므로 각 설계 변수의 설계 값의 가감시 목적 함수의 변화를 예측할 수 있다.

과정 3: 최적 설계 변수 선택

반응표면분석법을 이용한 최적 설계에서 이용할 수 있는 설계 변수는 최적 설계 시의 수렴성을 고려하면 5개 이하가 적합하다. 과정 2의 결과에 의하여 7개의 변수 중 민감도가 큰 설계 변

Table 2 L<sub>27</sub>(3<sup>13</sup>) Orthogonal array and experimental results.

Experiment 1 No.	Column No.													Data
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28.644
2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	29.045
3	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	29.608
4	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	2	2	2	33.175
5	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	0	0	0	34.477
6	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	35.609
7	0	2	2	2	0	0	0	2	2	2	1	1	1	34.328
8	0	2	2	2	1	1	1	0	0	0	2	2	2	35.229
9	0	2	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	35.847
10	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	33.863
11	1	0	1	2	1	2	0	1	2	0	1	2	0	30.711
12	1	0	1	2	2	0	1	2	0	1	2	0	1	38.876
13	1	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	31.468
14	1	1	2	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2	28.745
15	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	1	2	0	36.772
16	1	2	0	1	0	1	2	2	0	1	1	2	0	30.140
17	1	2	0	1	1	2	0	0	1	2	2	0	1	28.918
18	1	2	0	1	2	0	1	1	2	0	0	1	2	33.774
19	2	0	2	1	0	2	1	1	2	1	0	2	1	26.810
20	2	0	2	1	1	0	2	2	2	0	2	1	0	26.155
21	2	0	2	1	2	1	0	0	1	0	2	1	0	31.727
22	2	1	0	2	0	2	1	1	0	2	2	1	0	28.256
23	2	1	0	2	1	0	2	2	1	0	0	2	1	34.796
24	2	1	0	2	2	1	0	0	2	1	1	0	2	32.251
25	2	2	1	0	0	2	1	1	1	0	1	0	2	29.738
26	2	2	1	0	1	0	2	2	2	1	2	1	0	38.049
27	2	2	1	0	2	1	0	0	0	2	0	2	1	34.206

T =  $\sum_{i=1}^n y_i$

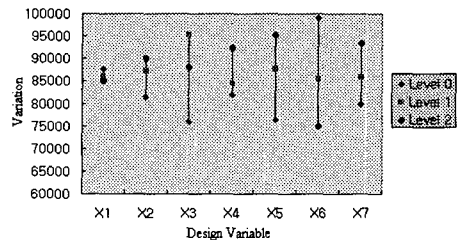


Fig. 7 Analysis of variation.

Table 3 Analysis of variance.

Design Variable	S	φ	V	F <sub>0</sub>	F(0.01)
X1	0.8858	2	0.4429	0.8314	6.93
X2	12.6982	2	6.3491	11.918	6.93
X3	63.3341	2	31.667	59.446	6.93
X4	19.1904	2	9.5952	18.012	6.93
X5	58.6941	2	29.347	55.091	6.93
X6	90.6155	2	45.307	85.053	6.93
X7	29.0241	2	14.512	27.242	6.93
E	6.392	12	0.5327		
T	280.834	26			

수 X3, X5, X6 (Case 1)에 대하여 먼저 최적 설계를 수행하고 다음으로 X2, X4, X7(Case 2)에

**Table 4** Optimal design variables and experimental regions.

Design Variable	Optimal design variables	Experimental regions
$x_1 (= X3)$	0.2754	$\pm 0.1754$
$x_2 (= X5)$	560	$\pm 20$
$x_3 (= X6)$	285	$\pm 20$

**Table 5** Central composite design and experimental results.

Run	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_i$
1	-1	-1	-1	31.05
2	-1	-1	1	27.93
3	-1	1	-1	33.94
4	-1	-1	1	30.42
5	1	-1	-1	32.64
6	1	1	1	27.90
7	1	1	-1	36.93
8	1	1	1	31.93
9	0	0	0	33.91
10	$-\alpha$	0	0	31.77
11	$\alpha$	0	0	21.83
12	0	$-\alpha$	0	35.65
13	0	$\alpha$	0	33.97
14	0	0	$-\alpha$	31.15
15	0	0	$\alpha$	33.86

$\alpha=1.216$

대하여 설계하였다. 설계 변수 X3, X5, X6에 대한 초기 설계 값과 설계 가능 영역을 Table 4에 나타내었다. 설계 변수가 선정되면 다음으로 실험표를 선택해야 한다. 여기서는 설계 변수가 3개이므로 Table 5를 이용할 수 있으며 실험은 총 15회이다.

과정 4: 컴퓨터를 이용한 실험

과정 3에서 결정된 설계 변수와 실험표를 이용하여 실험을 수행한다. 여기서 실험은 과정 1에서 완성된 컴퓨터 해석 모델을 이용하였다. 그 결과는 Table 5의 마지막 열과 같다. Table 5와 같은 실험계획에 의하여 컴퓨터 해석이 이루어지면 반응표면 모델을 추정하여야 한다. 2차 다항식의 계수  $\beta$  는 식 (1)을 이용하여 구할 수 있으며 식 (1)의 X,y는 식 (2), 식 (3)과 같이 정의된다.<sup>(4)</sup> 식 (1)을 이용하면  $\beta$  는 식 (4)와 같다.

$\beta=(X^T X)^{-1} X^T y$  (1)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{11}^2 & x_{21}^2 & x_{31}^2 & x_{11}x_{21} & x_{11}x_{31} & x_{21}x_{31} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{12}^2 & x_{22}^2 & x_{32}^2 & x_{12}x_{22} & x_{12}x_{32} & x_{22}x_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & x_{1n}^2 & x_{2n}^2 & x_{3n}^2 & x_{1n}x_{2n} & x_{1n}x_{3n} & x_{2n}x_{3n} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$y = [31.05, 27.93, 33.94, 30.42, 32.64, 27.90, 36.93, 31.93, 33.91, 31.77, 21.83, 35.65, 33.97, 31.15, 33.86]^T$  (3)

$\beta = [32.356, -0.560, 1.054, -1.185, -3.411, 2.003, 0.443, 0.354, -0.374, -0.072]^T$  (4)

결과적으로 실험에 의하여 추정된 반응표면 모델은 식 (5)와 같다. 여기서  $x_1, x_2, x_3$ 는 수치的大小에 대한 영향을 제거하기 위하여 단위크기로 조정하였다.

$y = f(x_1, x_2, x_3) = 32.356 - 0.560x_1 + 1.054x_2 - 1.185x_3 - 3.412x_1^2 + 2.003x_2^2 + 0.443x_3^2 + 0.354x_1x_2 - 0.374x_1x_3 - 0.072x_2x_3$  (5)

과정 5: ANOVA Table을 이용한 회귀모형 검증

과정 4에서 추정한 반응표면 모델 식 (5)의 신뢰성을 검증하기 위하여 분산분석표인 ANOVA Table<sup>(4)</sup>을 이용한다. 분산분석표를 작성하기 위하여 아래의 사항을 고려하여야 하는데 하나의 측정값  $y_i$ 와  $y_i$ 들의 평균  $\bar{y}$ 와의 차이를 총편차라 하며 이는 다음의 두 편차의 합으로 나타낼 수 있다.

$(y_i - \bar{y}) = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y})$  (6)

식 양변을 제곱하고 모든  $i$ 에 대하여 합하면 다음과 같이 된다.

$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$  (7)

위에서 좌변항을 총변동이라 하고 SST(Total Sum of Squares)라 표기하며 식 (8)의 관계가 성립한다.

$SST = SSE + SSR$  (8)

여기에서 SSE(Residual Sum of Squares)는 잔차 제곱합이라 하며 주어진 설계변수 값에서 목적함수 값의 변동을 나타내는 것으로서 회귀 모형 함수에 의하여 설명 안되는 변동을 뜻하고 SSR (Regression Sum of Squares)은 회귀제곱합이라 하

Table 6 ANOVA Table.

Factors	S	$\psi$	V	$F_0$	F (0.05)
SSR	102.486	3	34.162	4.25	3.59
SSE	88.395	11	8.036		
SST	190.881	14			

여 회귀모형 함수에 의해 설명되는 변동을 나타낸다. 위에서 논의된 세가지 변동의 간단한 계산 방법은 식 (9), (10), (11)과 같다.

$$SST = Y^T Y - n(\bar{Y})^2 \tag{9}$$

$$SSR = \beta^T X^T Y - n(\bar{Y})^2 \tag{10}$$

$$SSE = SST - SSR \tag{11}$$

또한 회귀평균제곱 MSR(Regression Mean Square)과 잔차평균제곱 MSE(Residual Mean Squares)는 다음과 같이 계산된다.

$$MSR = \frac{SSR}{k} \tag{12}$$

$$MSE = \frac{SSE}{n - k - 1} \tag{13}$$

이러한 계산을 통해서 식 (5)의 신뢰성을 검증할 수 있으며 그 결과는 Table 6과 같다. F-분포표에서  $F(=0.05)$  값보다  $F_0$ 이 크기 때문에 식 (5)는 5% 미만의 오차를 가진다고 볼 수 있다.

과정 6: 최적 설계

모델의 신뢰성이 과정 6에서 확인되었으므로 최적화 문제를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } y = f(x_1, x_2, x_3) \\ & \text{Subject to } -1 \leq x_i \leq 1 \end{aligned} \tag{14}$$

최적 값의 계산은 BFGS를 이용하였다.<sup>(6)</sup> 그 결과는 식 (15)과 같다.

$$\begin{aligned} X3 &= 0.4508 \\ X5 &= 558.895 \\ X6 &= 305.0 \end{aligned} \tag{15}$$

그리고 이때의 목적 함수값은 27.046 이었다. 식 (15)의 결과를 컴퓨터 모델에 입력하여 해석한 결과  $y=28.128$ 를 얻을 수 있었다. 초기모델에 비하여 약 4mm가 감소한 것을 볼 수 있다. 여기서 3개 변수를 제외한 나머지 즉  $X2, X4, X7$ 도 상대적으로 민감도가 크기 때문에 이 3개의 변수에 대하여도 같은 과정으로 최적화를 수행하였다.

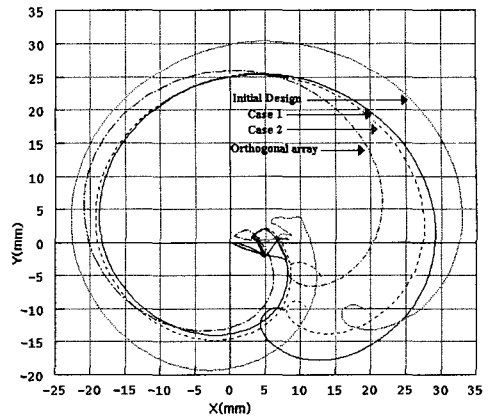


Fig. 8 Optimum design results.

여기서  $X3, X5, X6$ 은 이상에서 얻어진 값에 고정하고 실시하였다. 그 결과  $X2=0.276, X4=122.0, X7=46$ 을 얻을 수 있었으며 이때 모형 함수에 대한 목적 함수 값은  $y=28.453$ , 그리고 컴퓨터 해석에 의한 결과는  $y=27.93$ 이었다. 그런데 여기서 Fig. 7의 변동 분석을 이용해서 최적 설계를 할 수 있다. 즉 변동 분석에서 변동이 작은 수준들을 택하여 설계할 수 있다. 즉  $X_1^2, X_2^0, X_3^0, X_4^0, X_5^0, X_6^2, X_7^0$ 으로 설계할 수 있다. 여기서 위첨자는 각 설계 변수의 수준을 의미한다. 그 결과 흔들림  $y=26.02$ 를 얻을 수 있었으며 이 값은 최초 설계에 비하여 약 8mm의 흔들림 감소를 가져온 것이다. 이와 같이 직교배열표와 변동 분석에 의하여 설계된 값이 더 좋은 것을 볼 수 있는데 이는 세탁기 흔들림 오차 특성이 선형적 특성을 가지며 설계변경 가능 영역이 구조상 작기 때문으로 생각된다. 세 경우에 대한 해석 결과가 Fig. 8에 주어져 있다. Fig. 8에서 보듯이 변동분석에 의한 최적설계의 결과가 가장 작고 다음은 6개의 변수를 이용한 최적설계, 그리고 3개의 변수를 이용한 최적 설계순인 것을 알 수 있다.

4. 결론

컴퓨터 해석 프로그램과 실험 계획법을 이용한 기계계의 최적 설계법을 세탁기의 흔들림 최소화 설계에 적용하였다. 최적 설계법에 있어서는 실험 계획법을 이용하였기 때문에 이 논문에서 제안한 설계법은 일반적인 기계계에 적용이 가능하다. 컴퓨터 해석이 가능한 기계계에 적용 가능하

며 실제 실험에 의하지 않고 컴퓨터 해석에 의하여 설계하였기 때문에 설계 단계에서 적용이 가능하다. 직교 배열표를 이용하여 설계 변수들에 대한 민감도 해석을 수행하였고 이 결과를 이용하면 설계의 방향성을 제시할 수 있다. 더 나아가 실험 계획법에 의한 최적 설계를 수행하여 흔들림 저감 설계를 수행하여 흔들림 저감 설계를 할 수 있다.

### 참고문헌

- (1) Haug, E. J., Wehage, R. and Barman, N. C., "Design Sensitivity Analysis of Planar Mechanism and Machine Dynamics," 1981, *Transactions of the ASME*, Vol. 102, pp.560~570.
- (2) Haug, E. J., "Second-Order Design Sensitivity Analysis of Mechanical System Dynamics," 1982, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol.18, pp.1699~1717.
- (3) Haug, E. J., Wehage, R. A. and Mani, N. K., "Design Sensitivity Analysis of Large-Scale Constrained Dynamic Mechanical Systems," 1984, *Transactions of the ASME*, Vol.106, pp.156~162.
- (4) 박성현, 1995, 현대실험계획법, 민영사, 서울.
- (5) Box, G. E. P. and Wilson, K. B., "On the Experimental of Optimum Conditions," 1951, *Journal of Royal Statistical Society, Series B13*, pp.1~45.
- (6) Arora, J. S., 1989, Optimum Design, McGraw-Hill.