Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.24, NO.2, JUNE, 1998

Statistical Tolerance Allocation을 이용한 제조비용과 품질손실비용의 최소화*

The Minimization of Tolerance Cost and Quality Loss Cost by the Statistical Tolerance Allocation Method*

Sunn-Ho Kim** · Yong-Sung Kwon** · Byong-Ki Lee** · Kyung-Sik Kang**

김선호** · 권용성** · 이병기** · 강경식**

Abstract

When a product is designed, tolerances must be given to the product so that required functions are guaranteed and production costs are minimized. In this research, a model is suggested which allocates tolerances to components optimally according to the STA(Statistical Tolerance Allocation) method. Taking into account the concept that dimensional errors have characteristics of statistical distributions, this model presents the discrete pseudo-boolean approach for the tolerance optimization by minimizing the tolerance cost and the quality loss cost. In this approach, two methods are proposed for the reduction of the problem scale: 1) a method for converting the minimization model for costs into the maximization model for cost savings, and 2) procedures to reduce the number of constraints and variables.

1. 개요

제품을 개발할 때 설계자는 요구기능을 보장하기 위해 공차(tolerance)를 가급적 작게 주려는 경향이 있다. 그러나 공차가 작게 주어질 경우 제조 공정이 복잡해지고 공수가 증가하여 제조비용이 증가하게 된다[3,6,7,10]. 그래서 일반적으로 제조 담당자는 공차가 크게 주어지기를 희망하고 있다. 그러나 공차가 크게 주어지면 제조비용이 감소할지는 모르지만 요구기능을 만족하지 못하거나 불량률이 높아질 가능성이 있고 소비자의 불만이 증가하여 보이지 않는 품질손실비용을 초래할 수 있다[1,5]. 그래서 설계시 제조비용과 품질손실비용을 고려하여 비용을 최소화하는 공차를 부여할 필요가 있다. 한편, 제품을 생산하는데 공정의 생산능력에 따라 여러 종류의 공정 프로세스가 가능하다. 그러나 프로세스에 따라 허용되는 가공 오차가 달라지게 된다. 그러므로 제조 담당자는 설계시 주어진 공차를 만족할 수 있는 프로세스를 선택하여야 하며, 이러한 프로세스 선택은 결국 제조비용에 영향을 주게 된다.

부품의 공차는 조립품에도 영향을 준다. 부품들이 조립되었을 경우, 각 부품들의 공차가 누적되어 최종 조립품의 공차는 부품의 공차보다 크게 된다. 지금까지 설계자

* 본 연구는 한국학술진흥재단의 '96 대학부설연구소 과제지원으로 수행되었음.

** 명지대학교 산업공학과

는 공차를 부여할 때 최종부품의 허용 공차를 부품 수로 나눈 값을 부품의 공차로 부여하였다. 이 경우는 WTA (Worst-case Tolerance Allocation) 방식[3,6,7,10]으로서 최악의 경우를 고려하여 부품에 가장 적은 공차를 부여하는 방식이다. 이 방식은 단순하여 쉽게 공차를 결정할 수 있으나 부품의 제조비용이 증가하는 단점이 있다. WTA방식의 단점을 보완한 방법이 STA(statistical tolerance allocation) [3,6,7,10]방법이다. 이 방법은 가공오차가 통계적인 분포를 한다는 특성을 고려하여 부품의 공차를 결정하게 된다. 이때 부품의 공차는 WTA방식보다 커지게 되어 제조비용을 줄일 수 있게 된다.

지금까지 이러한 두 방식을 이용하여 비용을 최소화하고자 하는 연구가 많이 진행되었다.

Bare, J. M. et al.[2]는 어떤 제품의 성능을 크게 좌우할 수 있는 정밀도와 같은 주요특성은 직접적으로 제어할 수 없으므로 제어하고자 하는 제품에 조립되는 부품들의 주요특성의 목표값 뿐만 아니라 그 값을 중심으로 허용될 수 있는 변동의 양(공차)역시 고려대상이 되어야 한다고 제시하고 있다. 즉 얼마나 큰 공차가 제품의 주요특성에 주어질 수 있는가? 제품의 주요특성과 관련이 있는 부품들의 주요특성들은 어떤가? 만일 제품에 요구되는 공차에 만족되는 부품들의 특성값이 여러개의 조합으로 모두 가능하다면 이들 중 어떤 것을 택할 것인가? 이와 같은 관점에서 공차를 최적화 시키기 위한 방법을 고려하였다.

Chase, K. W. et al.[4]는 최소의 비용으로 제품을 생산하기 위해 부품의 공차를 어떻게 선택할 것인가를 제조비용의 관점에서 분석하는 방법을 제시하고 있다. 이것은 공정을 선택하는 절차로서 exhaustive search방법과 univariate search방법이 있다. 이 방법들은 Lagrange Multiplier를 이용하여 최적 공정을 결정하는 방법이고, SQP (Sequential Quadratic Programming)는 nonlinear programming 기법을 사용한 방법이다. 또한 잘 알려진 zero-one method도 소개하고 있다.

Cheng, B. W. et al.[5]는 컴퓨터를 이용해서 각 부품에 공차를 조금씩 다르게 할당하여 제조하는 것과 총비용간에 어떤 관계가 있는지를 분석하고 제품이나 부품에 공차를 할당하는 경제적인 설계기법을 소개하고 있다. 이 기법은 제조비용과 품질손실비용을 동시에 고려하여 이 비용을 최소화할 수 있는 각각의 부품들의 최적공차를 결정하는 것이다. 여기서는 제조비용과 품질손실비용을 비선형 연속 함수로 고려하였으며 공차를 연속변수로 설정하여 제약조건에 만족하는 범위 안에서 총비용이 최소가 되는 최적공차를 구하였다.

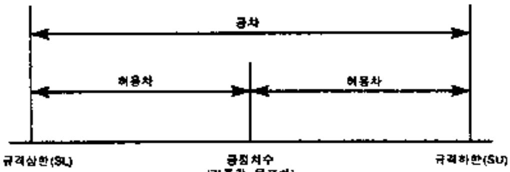
Kim, S. H. et al.[6]에서는 선택하는 공정에 따라 공차가 달라질 경우 이와 관련하여 발생할 수 있는 제조비용을 최소화하도록 부품의 공차를 구하는 방법을 제시하고 있다. 여기서는 WTA방식을 사용하고 있으며 품질손실비용은 고려치 않고 제조비용만을 고려하고 있다. 또한 공차와 제조비용이 이산적으로 존재할 경우 제조비용을 최소화하는 공차를 구하기 위한 방법으로 integer programming의 일종인 pseudo-boolean approach를 제시하였다.

본 논문에서는 어느 공정을 선택하느냐에 따라 부품의 오차가 달라지는 점을 고려하여 공차를 이산적인 변수로 설정하고, 제조비용과 품질손실비용을 모두 고려하여 총비용을 최소화하는 방법을 제시한다. 이를 위해 공차 부여 방식으로는 WTA방식이 아닌 STA방식에 따라 모델을 개발하였으며, 중복되거나 불필요한 변수와 제약식을 줄여 모델의 해를 손쉽게 찾는 pseudo-boolean approach 방법을 제시하였다. 이 방법은 본 저자가 제시한 참고문헌 [6]의 pseudo-boolean approach 방법을 새로 제시하는 모델에 맞게 변형한 것이다.

2. 제조비용과 품질손실비용

제품을 생산하기 위한 기술적인 규격은 (그림 1)과 같이 두가지 요소 즉 공정치수(nominal size)와 공차(tolerance)에 의해 정해진다. 공정치수는 제품 생산시 목표가 되는 기준 치수를 말하고 공차는 그 치수로부터 품질특성의 허용한계 (tolerance limit)를 말한다[1].

여기서 규격 상 · 하한값을 작게 주면, 즉 공차를 작게



(그림 1) 규격과 허용차

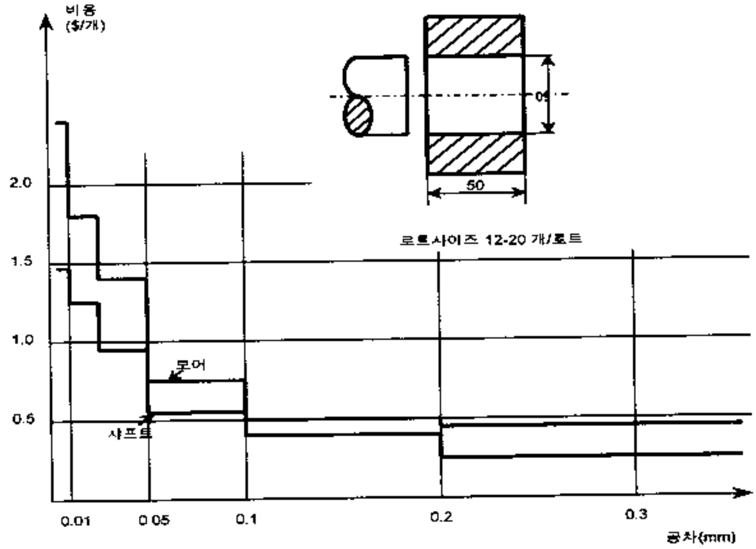
주면 그만큼 정밀한 공정이 요구되므로 공정비용이 증가하게 되고 반대로 크게 주면 공정비용이 감소하게 된다. 여기서는 이러한 공차의 변화에 따라 발생하는 공정비용을 제조비용(tolerance cost)이라고 정의한다.

다음 (그림 2)는 실제 보어(bore)와 샤프트(shaft) 조립품을 가공하는데 있어서 공차의 변화에 따른 제조비용의 변화를 나타내는 사례이다[3]. 이 그림에서 보듯이 공차와 제조비용은 반비례함을 알 수 있다.

여기서 k는 적절한 상수이고 목표 특성이 목표 값으로부터 벗어날 때 품질에 의한 손실을 제곱한 함수로 표현되며 특성이 목표로 한 값에서 멀어지면 그 손실은 제곱값으로 증가하게 된다.

생산의 총비용은 제조비용과 품질손실비용의 합으로 표현되는데 그 관계는 (그림 4)와 같이 나타난다.

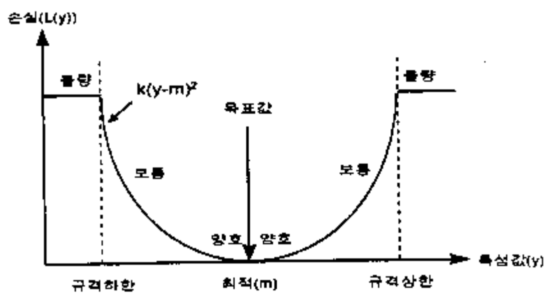
어떤 부품의 공차가 현실적으로 구간 A 내에서만 주어져야 한다면 공차가 증가할수록 총비용은 감소하는 형태



(그림 2) 공차의 변화에 따른 제조비용의 변화

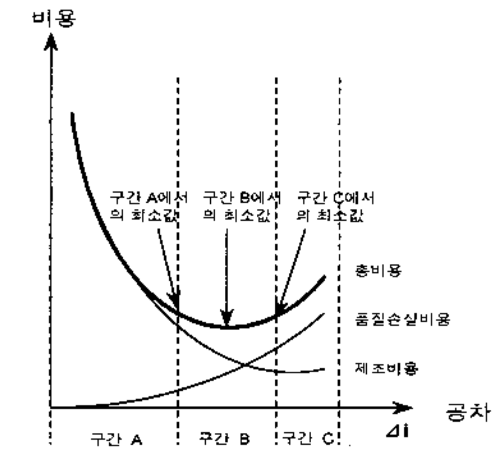
공차가 커지면 품질이 떨어지게 되는데 이로 인한 손실비용을 여기서는 품질손실비용(quality loss cost)이라 정의한다. 품질손실비용은 어떤 생산된 제품의 기능 자체에 의한 손실 뿐 만 아니라 제품이 출하된 후 사회에 끼치는 손실비용이라 할 수 있다. 즉 최고의 품질은 사회에 끼친 손실금액이 거의 없으며 나쁜 품질의 제품은 손실금액이 커지게 된다는 개념이다. 이러한 점을 관점에서 품질손실함수가 정의되는 것이다[8]. 다시 말하면 (그림 3)에서와 같이 제품특성의 목표치가 m이고 제품의 실질 특성치가 y인 경우에 품질손실함수 L(y)는 식 (1)과 같이 주어진다[9].

$$L(y) = k(y-m)^2 \tag{1}$$



(그림 3) 품질손실함수와 판정

가 되고, 구간 B에서만 주어져야 한다면 (그림4)에서와 같이 곡선의 꼭지점 부분에서 최소값을 가지며, 구간 C에서는 공차가 증가할수록 총비용도 증가하는 형태가 된



(그림 4) 제조비용과 품질손실비용의 조합

다. 따라서 공차의 변화에 따른 제조비용 혹은 품질손실비용 각각을 따로 고려했을 경우에는 일정한 형태 즉 증가곡선이거나 감소곡선을 가지므로 최소값을 계산하기가 쉬우나 이 두가지 비용들을 함께 고려할 경우에는 어려워진다.

3. 산술적 모델과 통계적 모델

부품들이 조립되었을 경우, 각 부품들의 공차가 누적되어 최종 조립품의 공차는 부품의 공차보다 크게 된다. 지금까지 설계자는 공차를 부여할 때 최종부품의 허용 공차를 부품 수로 나눈 값을 부품의 공차로 부여하였다. 이 경우는 산술적 모델 또는 WTA(Worst-case Tolerance Allocation)방식[3,6,7,10]으로서 최악의 경우를 고려하여 부품에 가장 적은 공차를 부여하는 방식이다. 이는 생산되는 모든 조립품들이 허용공차 내에 있도록 하여 단 1개의 불량도 허용하지 않는 것으로서 100% 전수검사를 필요로 할 때 사용되는 방식이다. 이로 인하여 모든 부품들의 공차를 적게 주게되어 생산비용이 증가하게 되는 단점이 있다.

산술적 모델의 단점을 보완한 모델이 STA(Statistical Tolerance Allocation)[3,6,7,10] 방법을 사용하는 모델인 통계적 모델로서, 가공오차가 통계적인 분포를 한다는 특성을 고려하여 부품의 공차를 결정하게 된다. 이는 100% 전수검사가 필요치 않을 때 사용되어 WTA의 경우, 즉 산술적 모델보다 훨씬 현실성이 있다고 할 수 있겠다. 개개의 부품들의 치수가 서로 독립적으로 존재하고 제품의 공차가 정규분포를 따른다고 가정한다. STA는 어느 정도의 불량이 생길 수가 있으나 오차가 정규분포 상에서 정한 임계치(제품의 허용공차)보다 크거나 작을 경우 각각의 부품의 공차를 산술적 모델의 경우보다 좀더 크게 줄 수가 있어 결과적으로 생산비용을 절감시키는 효과가 있다. 이때 부품의 공차는 WTA방식 보다 커지게 되어 제조비용을 줄일 수 있게 된다.

WTA의 경우

$$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\cdots+\Delta_n=\Delta_a \tag{2}$$

(Δ_i는 부품 i 의 공차, Δ_a는 최종조립품의 공차, $\Delta_i > 0$, i = 1 ,2 ,3 , … ,n)

Δ_i 가 모든 i에 대해 동일한 Δ값을 가질 경우 한 부품의 공차는

$$\Delta=\frac{\Delta_a}{n} \tag{3}$$

STA의 경우

$$(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\cdots+\delta_n^2)^{1/2}=\Delta_a \tag{4}$$

(δ_i는 부품 i 의 공차, $\delta_i > 0$, i = 1, 2, 3, …, n)

이다. 따라서 δ_i가 모든 i에 대해 동일한 δ값을 가질 경우 한 부품에 대한 공차는

$$\delta=\frac{\Delta_a}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

여기서 $\Delta \le \delta$이므로 STA에 의한 경우 한 부품에 대한 공차가 더 크게 주어짐을 알수 있다[10]. 그러므로 통계적 모델이 산술적 모델보다 더 현실적이라 할 수 있겠다.

4. 비용최적화 모델 개발

현장에서 공정을 선택할 경우, 그 공정에 속한 기계들의 특성으로 인하여 가능한 허용공차의 한계가 정해진다. 이와 같이 공차는 선택된 공정에 의해 결정되므로 공차를 이산적인 변수로 설정하는 것이 바람직하다. 또한, 총비용도 선택된 공정에 의해 결정되므로 이산적인 값으로

설정할 수 있다. 여기서는 이러한 개념을 이용하여 한 조립품을 예제로 하여 비용최적화 모델을 개발하기로 한다. (그림 5)는 어떤 조립품을 만들어 내는데 포함되는 총 9개의 부품들을 나타내고 있다. 1, 2, 4, 5번 부품은 각각 독립적인 부품들이고 6, 7, 8, 9번 부품들과 3번 부품의 조립이 끝나야 4번 부품이 조립 될 수 있다. 각각의 부품에 대한 공차와 총비용은 〈표 1〉에서와 같다. 그러나 〈표 1〉에 나와있는 제조비용과 품질손실비용은 임의로 주어진 것이고, 또한 모든 부품들을 조립하는데는 총 ±17 공차단위(tolerance unit)를 넘으면 안되며, 3번 부품의 공차는 6, 7, 8, 9번 부품들로 조립된 하위조립품(sub assembly)의 공차 내에 있어야 하며 이 하위조립품의 공차는 ±14 공차단위를 넘으면 안된다는 제약이 있다. 앞으로 전개할 일반식에서 사용될 수학적 기호들의 정의는 다음과 같다.

- T_{ij} : 부품 i 를 생산 공정 j 로 생산하는데 드는 제조비용
- L_{ij} : 부품 i 를 생산 공정 j 로 생산하는데 드는 품질손실비용
- C_{ij} : 부품 i를 공정 j 로 생산하는데 드는 총비용, $C_{ij} = T_{ij} + L_{ij}$
- t : 모든 부품들을 조립한 완제품의 공차
- t_{ij} : 부품 i 를 공정 j 로 생산하는데 허용되는 공차
- f : 모든 부품들을 조립했을 때 드는 총비용
- n_i : 부품 i 를 생산하는데 가능한 대안 공정의 수
- b_r : 제약식 r의 우변 upper bound
- m : 조립되는 부품들의 총 갯수
- g_r : r번째 제약식
- x_{ij} : 부품 i 를 공정 j 로 생산할 경우 1, 생산하지 않을 경우 0

4.1 통계적 방식을 고려한 모델링

앞의 예제에서는 모든 부품들을 제조했을 때 드는 총비용을 최소화하는 것이 목적이다. zero-one 방식에 의해 제조비용과 품질손실비용을 고려한 목적식과, WTA 방식으로 표현한 제약조건식들은 다음과 같다.

〈표 1〉 9개의 부품에 대한 공차와 비용

부품 (i)	대안 (j)	공차단위 (t_i)	제조비용 (T_i)	품질손실비용 (L_i)	총비용 ($C_{ij}=T_{ij}+L_{ij}$)
1	1	1	40	13	53
1	2	3	32	18	50
2	1	2	52	10	62
2	2	6	31	11	42
2	3	8	10	12	22
3	1	10	65	6	71
3	2	12	44	8	52
3	3	18	40	36	68
4	1	1	85	14	99
4	2	2	83	21	104
4	3	4	75	34	109
5	1	8	165	5	170
5	2	11	141	9	150
5	3	16	122	40	162
6	1	1	50	2	52
6	2	2	33	7	40
7	1	6	20	4	24
7	2	8	10	10	20
7	3	12	5	24	29
8	1	2	26	7	33
8	2	4	24	18	42
8	3	8	10	35	45
9	1	2	70	3	73
9	2	4	57	6	63

(목적식)

$$\min f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij}\chi_{ij} \quad (C_{ij}=T_{ij}+L_{ij}) \tag{6}$$

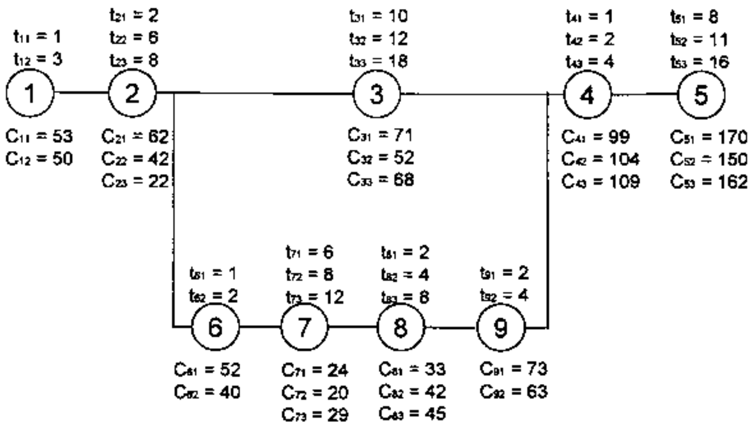
(제약식)

$$g_r = \sum_{i\in G_r}\sum_{j=1}^{n_i} t_{ij}\chi_{ij} \le b_r \quad (r=1,2,3,\cdots p) \tag{7}$$

$$g_{p+k} = \sum_{j=1}^{n_i} \chi_{ij} = 1 \quad (k=1,2,3,\cdots m) \tag{8}$$

$$(x_{ij}=0\ or\ 1,\ j=1,2,3,\cdots n_i,\ i=1,2,3,\cdots m)$$

이 모델은 STA를 고려하여 통계적 모델로 바꿀 수 있다. 식(4)를 STA방식으로 다시 작성하면 다음과 같다.



(그림 5) 조립 공정별 공차와 비용의 예제

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sigma_{ij}^2 x_{ij} = \sigma^2 \qquad (9)$$

만일 조립품과 각각의 부품들의 공차가

$$t = 3\sigma,\ t_{ij} = 3\sigma_{ij} \qquad (10)$$

라면, 식(7)은 다음과 같은 식으로 대체될 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} t_{ij}^2 x_{ij} \le t^2 \qquad (11)$$

위 통계적인 모델에 총 조립품의 공차 한계가 17, 그리고 3번과 6, 7, 8, 9번 부품들의 조립품에 대한 공차 한계가 14 일 때의 예제를 대입하여 보면,

(목적식)

$$\min f = (53\chi_{11} + 50\chi_{12}) + (62\chi_{21} + 42\chi_{22} + 22\chi_{23}) + (71\chi_{31} + 52\chi_{32} + 68\chi_{33}) + (99\chi_{41} + 104\chi_{42} + 109\chi_{43}) + (170\chi_{51} + 150\chi_{52} + 162\chi_{53}) + (52\chi_{61} + 40\chi_{62}) + (24\chi_{71} + 20\chi_{72} + 29\chi_{73}) + (33\chi_{81} + 42\chi_{82} + 45\chi_{83}) + (73\chi_{91} + 63\chi_{92}) \qquad (12)$$

(제약식)

$$g_1 = (\chi_{11} + 9\chi_{12}) + (4\chi_{21} + 36\chi_{22} + 64\chi_{23}) + (100\chi_{31} + 144\chi_{32} + 324\chi_{33}) + (\chi_{41} + 4\chi_{42} + 16\chi_{43}) + (64\chi_{51} + 121\chi_{52} + 256\chi_{53}) \le 289 \qquad (13)$$

$$g_2 = (\chi_{11} + 9\chi_{12}) + (4\chi_{21} + 36\chi_{22} + 64\chi_{23}) + (\chi_{61} + 4\chi_{62}) + (36\chi_{71} + 64\chi_{72} + 144\chi_{73}) + (4\chi_{81} + 16\chi_{82} + 64\chi_{83}) + (4\chi_{91} + 16\chi_{92}) + (\chi_{41} + 4\chi_{42} + 16\chi_{43}) + (64\chi_{51} + 121\chi_{52} + 256\chi_{53}) \le 289 \qquad (14)$$

$$g_3 = (100\chi_{31} + 144\chi_{32} + 324\chi_{33}) \le 196 \qquad (15)$$

$$g_4 = (\chi_{61} + 4\chi_{62}) + (36\chi_{71} + 64\chi_{72} + 144\chi_{73}) + (4\chi_{81} + 16\chi_{82} + 64\chi_{83}) + (4\chi_{91} + 16\chi_{92}) \le 196 \qquad (16)$$

$g_5 = \chi_{11} + \chi_{12} = 1$

$g_6 = \chi_{21} + \chi_{22} + \chi_{23} = 1$

$g_7 = \chi_{31} + \chi_{32} + \chi_{33} = 1$

…

$g_{13} = \chi_{91} + \chi_{92} = 1$

$\chi_{ij} = 0$ 또는 1 (모든 i, j에 대해서)

4.2 최적화 모델의 변환

위의 모델은 변수가 많기 때문에 계산을 하기가 비효율적이다. 따라서 다음과 같은 관점에서 변수를 줄여 재공식화 하는 것이 필요하다. 먼저 위의 식과 같이 목적식을 최소화하는 관점이 아니라 각 부품에서 공차를 가장 적게 주었을 때, 즉 비용이 가장 컸을 때를 기준으로 하여 대안적으로 공차를 많이 주게되면 그만큼 비용이 적게 들어가게 되므로 그 차이만큼 비용을 절감할 수가 있다. 그래서 이러한 비용 최소화의 모델을 비용절감을 최대화하는 모델로 변환할 수 있다.

부품 i를 공정 j 로 생산할 경우의 증가공차(excess tolerance)와 절감비용(cost saving)을 각각

$$E_{ij} = t_{ij}^2 - t_{i1}^2 \qquad (17)$$

$$S_{ij} = C_{i1} - C_{ij} \tag{18}$$

라 하자. 여기서 $t_{i1} < t_{i2} < \cdots < t_{in}$ 이다. 앞에서 제시된 비용최소화의 모델은 다음과 같이 비용절감의 최대화 모델로 변환하여 변수를 m개 줄일 수 있게 된다.

(목적식)

$$\max f' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{n_i} S_{ij}\chi_{ij} \tag{19}$$

(제약식)

$$g_r' = \sum_{i\in G_r}\sum_{j=2}^{n_i} E_{ij}\chi_{ij} \le b_r - \sum_{i\in G_r} t_{i1}^2 = d_r$$

$$(r = 1, 2, \cdots, p) \tag{20}$$

$$g_{p+k}' = \sum_{j} = 2^{n_k}\chi_{kj} \le 1$$

$$(k = 1, 2, \cdots, m) \tag{21}$$

(χ_{ij} = 0 or 1, j = 2, 3, …, n_i, i = 1, 2, … , m)

위의 일반식에 예제를 대입하여 보면,

(목적식)

$$\max f' = 3\chi_{12} + (20\chi_{22} + 40\chi_{23}) + (19\chi_{32} + 3\chi_{33}) + (-5\chi_{42} - 10\chi_{43}) + (20\chi_{52} + 8\chi_{53}) + 12\chi_{62} + (4\chi_{72} - 5\chi_{73}) + (-9\chi_{82} - 12\chi_{83}) + 10\chi_{92} \tag{22}$$

(제약식)

$$g_1 = 8\chi_{12} + (32\chi_{22} + 60\chi_{23}) + (44\chi_{32} + 224\chi_{33}) + (3\chi_{42} + 15\chi_{43}) + (57\chi_{52} + 192\chi_{53}) \le 119 \tag{23}$$

$$g_2 = 8\chi_{12} + (32\chi_{22} + 60\chi_{23}) + (3\chi_{42} + 15\chi_{43}) + (57\chi_{52} + 192\chi_{53}) + (3\chi_{62}) + (28\chi_{72} + 108\chi_{73}) + (12\chi_{82} + 60\chi_{83}) + 12\chi_{92} \le 174 \tag{24}$$

$$g_3 = (44\chi_{32} + 224\chi_{33}) \le 96 \tag{25}$$

$$g_4 = 3\chi_{62} + (28\chi_{72} + 108\chi_{73}) + (12\chi_{82} + 60\chi_{83}) + 12\chi_{92} \le 151 \tag{26}$$

$g_5 = \chi_{22} + \chi_{23} \le 1$

$g_6 = \chi_{32} + \chi_{33} \le 1$

$g_7 = \chi_{42} + \chi_{43} \le 1$

$g_8 = \chi_{52} + \chi_{53} \le 1$

$g_9 = \chi_{72} + \chi_{73} \le 1$

$g_{10} = \chi_{82} + \chi_{83} \le 1$

χ_{ij} = 0 또는 1 (모든 i, j에 대해서)

4.3 최적해 계산

이상과 같이 컴퓨터를 이용하지 않고 직접 계산을 하기 위해 최초 많이 존재하였던 변수를 줄이는 방법에 대해서 생각해 보았다. 이번에는 다음에 나오는 절차들을 적용하여 변수를 더 줄여 나가는 방법을 제시한다.

Step 1. 목적식의 계수가 음수인 변수를 0으로 하여 없앤다.

(∵목적식의 계수가 음수이면 목적값을 줄이는 효과를 내는 변수가 되므로 cost saving을 최대화한다는 관점에서 이와 같은 변수를 택하지 못하게 0으로 하여 없앤다.)

Step 2. $E_{ij} > d_r$ (모든 j에 대해서, $i \in G_r$ 에 대해서) 이면 $\chi_{ij} = 0$ 으로 한다.

(∵ $E_{ij} > d_r$ 인 χ_{ij} 를 0으로 하지 않으면 식이 성립되지 않으므로.)

Step 3. 제약식 중에서 좌변의 계수에서 얻을 수 있는 가능한 최대값 보다 우변의 상수값 이 더 클 때 이 제약식은 redundant한 식이 되지만 좌변에 있는 모든 변수가 다른 제약조건에 영향을 주지 않는다면 모든 변수를 택한다. 왜냐하면 비용절감을 최대화한다는 관점에서 제약식 내의 가능한 변수를 모두 택하는 것이 좋기 때문이다. (예를 들어 $g_r' = (2\chi_{11} + 3\chi_{12}) + (5\chi_{21} + 6\chi_{22}) \le 11$ 에서 $\chi_{12} = \chi_{22} = 1$이 고 $\chi_{11} = \chi_{21} = 0$ 일 때 최대값 9를 가진다. 최대값 $g_r' = 9 < 11$ 이므로 g_r'는 Redundant 한 식이 된다. 그러나 χ_{11}, χ_{12} 둘 중에서 목적값을 더 크게 만드는 변 수, χ_{21}, χ_{22} 중에서 목적값을 더 크게 만드는 변수를 택하면 된다.)

Step 4. 만약 $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(x)$가 모두 음이 아닌 함수이고, $g_r' = h_1(x) + h_3(x) \le d_r$, $g_k' = h_1(x) + h_2(x) \le d_k$ 이고 $h_2(x) \le d_k - d_r$ 라면 $g_r' \le d_r$을 만족하는 모든 x에 대해서 $g_r' \le d_k$도 또한 모두 만족하게 된다. 따라서 g_r'식이 redundant한 식 이 된다.

Step 5. 만약 $g_r' = h_1(x) + h_2(x) \le d_r$, $g_k' = h_1(x) + h_3(x) \le d_k$ 이고 $g_s' = h_3(x) \le h_2(x)$이면 $d_k \ge d_r$ 일 때

g_4'은 redundant한 식이 된다.

위의 절차들을 차례로 적용해 보자. 먼저,

Step 1. 목적식의 계수가 음수인 변수를 0으로 하면,
$\chi_{42} = \chi_{43} = \chi_{73} = \chi_{82} = \chi_{83} = 0$

(목적식)

$$\max f' = 3\chi_{12} + (20\chi_{22} + 40\chi_{23}) + (19\chi_{32} + 3\chi_{33}) + (20\chi_{52} + 8\chi_{53}) + 12\chi_{62} + 4\chi_{72} + 10\chi_{92} \quad (27)$$

(제약식)

$$8\chi_{12} + (32\chi_{22} + 60\chi_{23}) + (44\chi_{32} + 224\chi_{33}) + (57\chi_{52} + 192\chi_{53}) \le 119 \quad (28)$$

$$8\chi_{12} + (32\chi_{22} + 60\chi_{23}) + (57\chi_{52} + 192\chi_{53}) + 3\chi_{62} + 28\chi_{72} + 12\chi_{92} \le 174 \quad (29)$$

$$(44\chi_{32} + 224\chi_{33}) \le 96 \quad (30)$$

$$3\chi_{62} + 28\chi_{72} + 12\chi_{92} \le 151 \quad (31)$$

Step 2. 식 (28), (29), (30)에서
$\chi_{33} = \chi_{53} = 0$

Step 3. 식 (30), (31)에서
$\chi_{32} = \chi_{62} = \chi_{72} = \chi_{92} = 1$

위의 Step을 거친 뒤의 모델은 다음과 같이 축소될 수 있다.

(목적식)

$$\max f' = 3\chi_{12} + (20\chi_{22} + 40\chi_{23}) + 20\chi_{52} \quad (32)$$

(제약식)

$$8\chi_{12} + (32\chi_{22} + 60\chi_{23}) + 57\chi_{52} \le 75 \quad (33)$$

$$\chi_{22} + \chi_{23} \le 1 \quad (34)$$

식(32), 식(33), 식(34)를 검토해 보면 $\chi_{22} = 1$, $\chi_{23} = 0$일 경우는 목적식에서 20을 얻을 수 있고 $\chi_{22} = 0$, $\chi_{23} = 1$이면 40을 얻을 수 있으므로 목적값을 최대화하는 관점에서 χ_{23}을 택할 수 있다. 또한 식(33)을 만족시키기 위해서 $\chi_{12} = \chi_{23} = 1$, $\chi_{22} = \chi_{52} = 0$ 으로 하면 주어진 제약조건이 만족되는 최대값을 얻을 수 있다.

그러므로 최적대안은 $\chi_{12} = \chi_{13} = \chi_{32} = \chi_{41} = \chi_{52} = \chi_{62} = \chi_{72} = \chi_{81} = \chi_{92} = 1$ 이고 나머지 변수들이 모두 0일 때 최소값 549를 가질 수 있다. 다시 말하면, 이것은 1, 3, 5, 6, 7, 9번 부품은 2번 공정을, 2번 부품은 3번 공정을, 4, 8번 부품은 1번 공정을 택하면 최소의 비용 549로 요구되는 공차에 맞는 제품을 생산할 수 있다.

5. 결론 및 추후연구과제

본 연구는 지금까지의 연구와는 다르게 부품이 다양한 공정 대안에서 발생할 수 있는 오차들을 이산적으로 고려하고 통계적으로 공차를 부여하는 STA방법에 따라 모델을 구축하는 방안을 제시하였다. 또한, 제조비용과 품질손실비용을 모두 고려하여 총비용을 최소화하는 대안을 선정하는 방법을 제시하고 있다. 이 모델을 통하여 각 부품에 WTA방식보다 더 큰 공차를 줄 수 있어 제조 시간을 줄이는 효과를 얻을 수 있다. 또한, 비용 최소화 모델에서 비용절감 최대화 모델로 변환시킴으로써 부품 수만큼 변수가 줄어들며, 추가로 제시된 절차들에 따라 변수나 제약식이 더 줄어들게 되어 모델이 단순화된다. 여기서 제시한 예에서는 변수가 24개에서 4개로, 제약식은 13개에서 2개로 줄어들었다.

본 모델이 현장에 적용되기 위해서는 제조비용과 품질손실비용을 정확히 산정하는 기준이나 방안을 제시하는 것이 바람직하다. 특히 품질손실비용에 대해 아직 정확히 정의하거나 산정한 사례가 없어 이에 대한 연구가 필요하다. 또한 실제현장에서는 본 논문에서 다룬 제약조건 이외에 훨씬 더 많은 제약조건이 존재할 것이다. 그러므로 이러한 조건들 역시 모두 고려 대상이 되어 문제를 풀어야 원하는 최적대안을 얻을 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] 박성현, 다구찌 방법과 통계적 공정관리를 중심으로 한 품질공학, 민영사, 1995.

[2] Bare, J. M. and Kpur, K. C. and Zabinsky, Z. B., "Optimization methods for tolerance design using a first-order approximation for system variance," *Engineering design and automation*, Vol. 2, No. 3, pp. 203-214, 1996.

[3] Bjorke, Q., *Computer-aided tolerancing*, Tapir, 1978.

[4] Chase, K. W. and Greenwood, W. H. and Loosly, B. G. and Hauglund, L. F., "Least cost tolerance allocation for mechanical assemblies with automated process selection," *Manufacturing Review*, Vol. 3, No. 1, pp. 49-59, 1990.

[5] Cheng, B. W., and Maghsoodloo, s., "Optimization of Mechanical Assembly Tolerance by Incorporating Taguchi's Quality Loss Function," *Journal of Manufacturing system*, Vol.14, No.4, pp. 265-266. 1995.

[6] Kim, S. H and Knott, K., "A pseudo-boolean approach to determining least cost tolerance," *International Journal of Production Research*, Vol. 26, No. 1, pp. 157-167, 1988.

[7] Mansoor, E. M., "The Application of Probability to Tolerances Used in Engineering Designs," *Proc. Instn Mech. Engrs*, Vol. 178, Pt. 1, No. 1, pp. 29-44, 1964

[8] Phadke, M. S., *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice-Hall, 1989.

[9] Ross, P. J., *Taguchi Techniques for Quality Engineering*, McGraw-Hill, 1989.

[10] Spotts, M. F., *Dimensioning & Tolerancing for Quantity Production*, Prentice-Hall, 1989.

97년 11월 최초 접수, 98년 4월 최종 수정