

수학적 이론을 이용한 이차원 곡면 덕트의 최적형상 설계

임 석 현* · 최 해 천**

(1998년 4월 9일 접수)

Optimal Shape Design of a 2-D Curved Duct Using a Mathematical Theory

Seokhyun Lim and Haecheon Choi

Key Words : Optimal Shape Design(최적형상 설계), Optimal Condition(최적조건), Mathematical Theory(수학적 이론), Minimum Pressure Loss(최소 압력손실), Adjoint Navier-Stokes Equation(Adjoint Navier-Stokes 방정식)

Abstract

The objectives of the present study are to develop a systematic method rather than a conventional trial-and-error method for an optimal shape design using a mathematical theory, and to apply it to engineering problems. In the present study, an optimal condition for a minimum pressure loss in a two-dimensional curved duct flow is derived and then an optimal shape of the curved duct is designed from the optimal condition. In the design procedure, one needs to solve the adjoint Navier-Stokes equations which are derived from the Navier-Stokes equations and the cost function. Therefore, a computer code of solving both the Navier-Stokes and adjoint Navier-Stokes equations together with an automatic grid generation is developed. In a curved duct flow, flow separation occurs due to an adverse pressure gradient, resulting in an additional pressure loss. Optimal shapes of a curved duct are obtained at three different Reynolds numbers of 100, 300 and 800, respectively. In the optimally shaped curved ducts, the separation region does not exist or is significantly reduced, and thus the pressure loss along the curved duct is significantly reduced.

기 호 설 명

C_p : 압력 계수	R_o : 원형 곡면 덕트 바깥쪽 반지름
h : 평판채널 폭	R_i : 원형 곡면 덕트 안쪽 반지름
J : 목적 함수 (Cost function)	s : 입구로부터의 거리
L : 평판채널길이	u_m : 평균속도
\mathbf{n} : 경계면에 수직방향 단위벡터	u_i : 속도벡터
p : 압력	z_i : adjoint 속도벡터
p_{out} : 출구 압력	Ω : 곡면 덕트의 내부영역
p_{in} : 입구 압력	Γ : 곡면 덕트의 벽면
r : adjoint 압력	ν : 동점성계수
	ρ : 밀도
	ξ, η : 일반좌표계
	w : 가중함수

* 서울대학교 대학원 기계공학과

** 회원, 서울대학교 기계공학과

ζ : 벽면수직방향으로의 형상변화거리

Re : 레이놀즈수 ($=u_m h/\nu$)

상첨자

* : 무차원수

하첨자

i : 텐서인덱스 (1, 2, 3)

1. 서 론

항력감소, 양력증가 또는 유동소음감소 등을 목적으로 하는 유동제어에 관하여 지금까지 많은 연구가 이루어져 왔다. 유동제어에는 유동장의 정보를 측정하여 그 값에 따라 제어를 하는 능동제어와 미리 정해진 제어값에 의해 유동장을 제어하는 수동제어방법이 있다. 능동제어 및 수동제어의 대표적인 방법으로서 분사/흡입, 전자기장, 스피커, MEMS (Micro-Electro Mechanical System) 등을 이용한 방법 등이 있다. 그러나 이들 방법들은 제어를 하기 위하여 추가적인 에너지가 필요하게 되고, 능동제어의 경우에는 측정 및 제어를 하는데 첨단 기술과 장비가 필요하게 된다. 형상설계는 수동제어의 한 방법으로서, 한번 형상을 제작하게 되면 제어에 필요한 추가적인 에너지가 필요 없으며 측정의 필요도 없다. Airbus에서는 비행기 항력감소를 위하여 riblet film을 비행기 표면에 부착하여 항력감소를 획득하였는데 이는 형상설계에 의한 유동제어의 좋은 예이다.

지금까지 형상설계는 주로 경험적 또는 실험적으로 행해져 왔는데 목적하는 최적의 형상을 찾기 위해서 최소한 몇십 개의 시험형상에 대해서 시험, 측정하는 등의 시행착오를 거쳐서 이루어졌으며, 이러한 방법은 시험형상의 설정이 주로 공학적 직관에 의존되기 때문에 체계적인 접근이 매우 어려우며 또한 이렇게 해서 구한 형상이 최적의 형상인지도 알 수 없다. 따라서 수학적 이론을 이용하여 최적형상을 설계하고자하는 연구가 이루어져 왔다. 1973년에 수학자인 Pironneau⁽¹⁾는 최적제어이론 (optimal control theory)을 사용하여 정상상태 유동에서 균일유동 하의 실린더가 받게되는 Stokes 유동저항을 감소시키는 최적형상의 설계에 관한 방법을 제안하였다. 그 후 1974년에 Pironneau⁽²⁾는 대류항을 포함한 Navier Stokes 방정식에 대한 최

적형상 설계에 대한 알고리즘을 제시하였다. 1975년 Glowinski & Pironneau⁽³⁾는 앞서 구한 최적조건과 경계층 이론을 이용하여 균일유동에서 최소항력을 가지는 물체형상을 근사적으로 구하였다. 1974년에 Pironneau⁽²⁾가 제안한 알고리즘은, 매우 낮은 레이놀즈수 ($Re=0, 20$)에서 실린더 주위의 항력 감소를 목적으로 1994년 Ganesh⁽⁴⁾에 의해 구현이 되었다. 한편, 단면적을 증가시켜서 유동속도를 줄이고 압력수두를 회복시키는 디퓨저의 최적형상 설계에 관한 연구는 Stratford^(5,6)에 의해 실험적으로 행하여졌는데, 디퓨저 벽면의 형상을 조금씩 변형시켜가면서 역압력구배가 생기는 구간에서 벽면마찰력이 0이 되도록 하는 형상을 구하였다. 즉, 역압력구배가 생기는 모든 구간에서 유동박리가 생기기 바로 직전이 되도록 디퓨저의 형상을 설계하여, 최대의 압력회복을 가지도록 한 것이다. Cabuk & Modi⁽⁷⁾는 최적제어이론을 이용하여 층류 평판 디퓨저의 최적형상을 설계하였다. 디퓨저 입구 폭에 대한 디퓨저 길이가 일정할 경우 최대압력회복을 가지는 디퓨저의 최적형상 문제에 대해 수학적으로 최적조건을 유도하고 여러 가지 레이놀즈수에 대해 계산을 통하여 최적형상을 설계하였다. 여기서 구한 최적조건에 따르면 모든 벽면에서 주유동방향 속도의 벽면수직방향 구배가 0 또는 주유동방향 adjoint 속도 (2.2.1절 참조)의 벽면수직방향 구배가 0이 되었을 때 최적형상이 되는데, 이는 모든 점에서 유동박리가 생기기 직전이 되도록 한 앞의 Stratford의 실험과 같은 조건이라 할 수 있다.

본 연구에서는 최적형상을 시행착오에 의해 구하지 않고 수학적으로 유도된 최적조건에 따라서 설계하도록 하는 알고리즘을 구현하고 최적형상 설계 문제의 예로서 이차원 층류 곡면 덕트의 형상설계를 수행하고자한다. 유동이 곡면 덕트를 지나게 될 때, 역압력구배로 인한 유동 박리로 인해 압력수두의 손실이 생기게 된다. 본 연구에서는 두 개의 이차원 평판 채널을 잇는 곡면 덕트에 대해서 압력강하를 최소화하는 곡면 덕트의 형상을 설계하고자한다. 이 경우, 최적조건은 Cabuk & Modi⁽⁷⁾가 층류 평판 디퓨저에 대해 유도한 것과 유사한 방법으로 유도되며, Navier-Stokes 방정식의 비선형성으로 인해 최적형상 설계시 adjoint Navier-Stokes 방정식을 풀어야 한다. 따라서 이차원 정상 층류유동에 대해 Navier-Stokes 방정식과 adjoint Navier-Stokes 방정식을 푸는 컴퓨터 코드를 개발

하였으며, 타원형 격자생성코드를 이용하여 매 반 복계산시 새로운 형상에 대해 자동으로 격자를 생 성시키도록 하였다.

2. 이차원 층류 곡면 덕트의 최적형상 설계

2.1 문제 설정

Fig. 1은 이차원 곡면 덕트를 도식화한 것이다. 길이가 각각 L_1, L_2 인 두 평판 채널이 직각으로 놓여있을 때, 보통의 경우 두 평판 채널을 원형 곡면 덕트로 이어준다. 이때, 원형 곡면 덕트에서 원 심력에 의한 유동 및 벽압력 변화와 그에 따른 유 동박리 등으로 부차적 손실이 생기게되며, 이를 최 소화하기 위하여 두 평판 채널의 이음부분의 형상 을 설계하고자 한다. 원형 곡면 덕트의 안쪽과 바깥쪽의 반경을 각각 R_I, R_O , 입구와 출구의 평판 채널의 길이는 각각 L_1, L_2 이다. Γ_M 은 원형 곡면 덕트의 벽면 경계면을, Γ_I, Γ_O 는 평판 채널의 입 구와 출구 경계면을, Γ_F 는 평판채널의 벽면 경계 면을 나타낸다. $\Gamma_M, \Gamma_I, \Gamma_O, \Gamma_F$ 를 합쳐 Γ 라 하 고, Γ 로 둘러싸인 내부영역을 Ω 라 한다. 여기서 Γ_M 은 형상설계 부분으로서 가변적인 벽면이며, Γ_F 는 고정된 벽면이다. Γ_M 은, 유동의 형태가 주어졌 있을 때 (즉, 입구유동, 레이놀즈수 등), 뒤에서 정의하게 될 목적함수에 따라 결정되게 되므로, 목 적한 바의 최적형상을 얻기 위해서는 목적함수를 정확히 설정해야 한다. $\zeta(s)$ 는 Γ_M 을 따른 호의 길 이 s 에 대한 임의의 함수이며, 각 점에서 벽면에 수직인 방향으로의 길이를 나타낸다. Γ_M 의 각 점

들이 바깥쪽 수직방향으로 $\varepsilon\zeta(s)$ 만큼 움직여서 생 긴 새로운 곡면 덕트의 벽면형상을 $\Gamma_{M,\varepsilon}$ 이라 하고 $\Gamma_M, \Gamma_I, \Gamma_O, \Gamma_F$ 에 의해 생긴 새로운 내부영역을 Ω_ε 이라 한다. 이때, ε 은 아주 작은 양수이다.

곡면 덕트의 내부유동은 정상, 비압축성, 층류 유동으로 다음과 같은 Navier-Stokes 방정식을 만 족시킨다.

$$\begin{aligned} u_{i,i} &= 0 \\ u_j u_{i,j} &= -p_{,i}^* + \nu u_{i,jj} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 p^* 는 압력을 밀도로 나눈 값이다.

평판 채널의 입구와 출구에서의 경계조건은, L_1, L_2 가 충분히 길면 완전발달유동이 되므로, 다 음과 같이 Dirichlet 조건으로 가정한다.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \quad u_2 = f(x_1) \text{ on } \Gamma_I \\ u_1 &= g(x_2), \quad u_2 = 0 \text{ on } \Gamma_O \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $f(x_1), g(x_2)$ 는 완전발달된 층류 속도분포 로 주어진 함수이고 레이놀즈수는 $Re = umh/\nu = um(R_O - R_I)/\nu$ 와 같이 정의된다. um 은 평판 채널 의 입구에서의 유량평균속도이다.

본 연구에서는 주어진 초기 형상에 대하여 출구 에서의 압력강하를 최소화시키는 덕트 벽면의 형 상, 즉 Γ_M 의 형상을 찾고자 하는 것이 목적이며, 목적함수를 다음과 같이 정의한다.

$$J(\Gamma_M) = \int_{\Gamma_I} p^* u_i n_i ds + \int_{\Gamma_O} p^* u_i n_i ds \quad (3)$$

여기서 n_i 는 면에 대한 바깥쪽 수직방향 벡터이다.

L_1, L_2 가 충분히 길게되면, Γ_I 와 Γ_O 에서 속도 분포는 완전발달된 속도분포가 되고 단면을 따라 압력은 일정하게 되므로 목적함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} J(\Gamma_M) &= \int_{\Gamma_I} p^* u_i n_i ds + \int_{\Gamma_O} p^* u_i n_i ds \\ &= (p^*|_{\Gamma_O} - p^*|_{\Gamma_I}) u_m h \end{aligned} \quad (4)$$

따라서 식 (3)의 목적함수 $J(\Gamma_M)$ 이 최대가 되도 록 하면 출구에서의 압력강하를 최소화시킬 수 있다.

2.2 제어 이론

2.2.1 최적조건 유도

$(u_i^\varepsilon, p^{*\varepsilon})$ 을 새로운 영역 Ω_ε 에서의 식 (1), (2) 의 해라고 하고, (ϕ_i, π) 를 다음과 같이 정의한다.

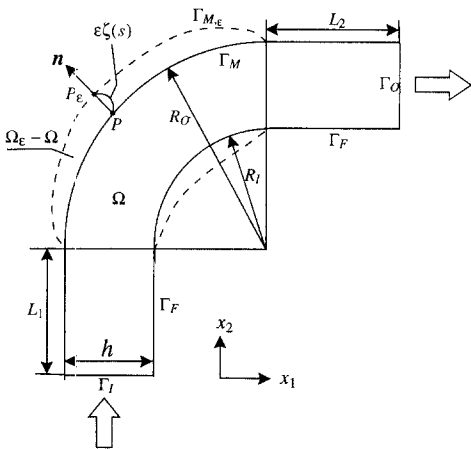


Fig. 1 Schematic diagram of a curved duct.

$$\begin{aligned}\phi_i &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [u_i^\varepsilon - u_i] \in \Omega \\ \pi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [p^{*\varepsilon} - p^*] \in \Omega\end{aligned}\quad (5)$$

그러면 $(u_i^\varepsilon, p^{*\varepsilon})$ 은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned}u_i^\varepsilon &= u_i + \varepsilon \phi_i \\ p^{*\varepsilon} &= p^* + \varepsilon \pi\end{aligned}\quad (6)$$

$(u_i^\varepsilon, p^{*\varepsilon})$ 과 (u_i, p^*) 는 모두 Navier-Stokes 방정식을 만족시키므로 (ϕ_i, π) 는 다음의 식을 만족시키게 된다.

$$\begin{aligned}\phi_{i,i} &= 0 \\ u_j \phi_{i,j} + \phi_j u_{i,j} &= -\pi_{,i} + \nu \phi_{i,jj}\end{aligned}\quad (7)$$

평판 채널의 입구와 출구(Γ_i, Γ_o)에서 속도가 일정하고, 평판채널의 벽면(Γ_F)은 고정되어 있으므로 점착조건에 의해 속도는 항상 0이다. 따라서 곡면 덕트의 형상이 변하더라도 $\Gamma_i, \Gamma_o, \Gamma_F$ 에서의 속도는 변하지 않고, $u_i^\varepsilon = u_i$ 이므로 곡면 덕트 벽면을 제외한 경계면에서 ϕ_i 는 0이 된다. 즉,

$$\phi_i = 0 \quad \text{on } \Gamma - \Gamma_M \quad (8)$$

다음은 ϕ_i 의 Γ_M 에서의 경계조건을 살펴보자. Γ_M 위의 한 점 P 와 $\Gamma_{M,\varepsilon}$ 에서 이에 대응되는 점 P_ε 에 대해서 살펴보면 (Fig. 1), Taylor 전개에 의해

$$\begin{aligned}u_i^\varepsilon|_{P_\varepsilon} &= u_i^\varepsilon|_P + \varepsilon \zeta \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial n}|_P + O(\varepsilon^2) \\ &= u_i|_P + \varepsilon \phi_i|_P + \varepsilon \zeta \frac{\partial u_i}{\partial n}|_P + O(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad (9)$$

점착조건에서 $u_i^\varepsilon|_{P_\varepsilon} = u_i|_P = 0$ 이므로

$$\phi = -\zeta \frac{\partial u_i}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_M \quad (10)$$

새로운 영역 Ω_ε 에서의 목적함수 $J(\Gamma_{M,\varepsilon})$ 은 다음과 같다.

$$J(\Gamma_{M,\varepsilon}) = \int_{\Gamma_i} p^{*\varepsilon} u_i^\varepsilon n_i ds + \int_{\Gamma_o} p^{*\varepsilon} u_i^\varepsilon n_i ds \quad (11)$$

목적함수의 일차 변분값 δJ 는 다음과 같이 정의된다.

$$J(\Gamma_{M,\varepsilon}) - J(\Gamma_M) = \varepsilon \delta J + O(\varepsilon^2) \quad (12)$$

식 (3), (6), (8), (11)을 이용하여 정리하면 식 (12)는 다음과 같다.

$$\delta J = \int_{\Gamma_i} \pi u_i n_i ds + \int_{\Gamma_o} \pi u_i n_i ds$$

$$= \oint \pi u_i n_i ds \quad (13)$$

여기서 $\oint = \int_{\Gamma_i} + \int_{\Gamma_o} + \int_{\Gamma_F} + \int_{\Gamma_M}$ 이고, Γ_F 와 Γ_M 에서 $u_i = 0$ 이다.

(ϕ_i, π) 에 대한 adjoint 변수(z_i, r)을 식 (7)에 곱한 식에 식 (13)을 더하면

$$\begin{aligned}\delta J &= \oint \pi u_i n_i ds + \iint r \phi_{i,i} dA \\ &+ \iint z_i (\nu \phi_{i,jj} - u_j \phi_{i,j} - \phi_j u_{i,j} - \pi_{,i}) dA\end{aligned}\quad (14)$$

여기서 adjoint Navier-Stokes 방정식은 다음과 같이 정의된다.^(2,7)

$$\begin{aligned}z_{i,i} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \nu z_{i,jj} + u_j (z_{i,j} + z_{j,i}) - r_{,i} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ z_i &= u_i \quad \text{on } \Gamma\end{aligned}\quad (15)$$

식 (8), (10), (15)를 이용하여 식 (14)를 정리하면

$$\begin{aligned}\delta J &= \nu \int_{\Gamma_M} \zeta \frac{\partial u_i}{\partial n} \frac{\partial z_i}{\partial n} ds \\ &+ \nu \int_{\Gamma_i + \Gamma_o} z_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_M} r \zeta \frac{\partial u_i}{\partial n} n_i ds\end{aligned}\quad (16)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} n_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_M$$

$$z_i = u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_i$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} = -\phi_{2,2} = \phi_{1,1} = 0 \quad \text{on } \Gamma_i$$

$$z_2 = u_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_o$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \phi_{1,1} = -\phi_{2,2} = 0 \quad \text{on } \Gamma_o \quad (17)$$

식 (17)을 이용하여 식 (16)을 정리하면 δJ 는 다음과 같다.

$$\delta J = \nu \int_{\Gamma_M} \zeta \frac{\partial u_i}{\partial n} \frac{\partial z_i}{\partial n} ds \quad (18)$$

이때

$$\zeta(s) = w(s) \frac{\partial u_i}{\partial n} \frac{\partial z_i}{\partial n} \quad (19)$$

라고 정의하면 δJ 는 항상 양의 값을 가진다. 이때 $w(s)$ 는 음수가 아닌 가중함수 (weighting function)이다. 즉, 식 (19)에 의해서 구해진 $\zeta(s)$ 의 크기를 따라 벽면을 움직여 새로운 형상을 얻게 되면 (Fig. 1), 목적함수 J 는 항상 증가하게 된다. 또한 곡면 덕트 벽면을 따라 모든 점에서 $\partial u_i / \partial n$

또는 $\partial z_i / \partial n$ 이 0이 되면 더 이상 목적함수 J 는 증가하지 않으며, 이때의 형상이 최적형상이 된다.

2.2.2 최적형상 설계 알고리즘

다음은 2.2.1절에서 유도한 최적조건 (19)를 이용하여 출구에서의 압력강하가 최소가 되는 곡면 덕트의 최적형상을 설계하는 알고리즘이다.

- 곡면 덕트의 초기 형상 (원형 곡면)을 가정한다.
- 곡면 덕트 내부에 격자를 생성한다.
- Navier-Stokes 방정식 (1)과 경계조건 (2)에서 속도장을 구한다.
- (c)에서 얻은 속도장을 이용하여 adjoint Navier-Stokes 방정식 (15)를 푼다.
- 곡면 덕트 벽면을 따라 $\partial u_i / \partial n$ 과 $\partial z_i / \partial n$ 값을 계산하고 식 (19)에서 $\zeta(s)$ 를 구한다. 이때, 본 연구에서는 가중함수 $w(s)$ 를 cosine 함수로 설정하였으며 곡면 덕트와 평판 채널과의 연결부분에서 $\zeta(s)$ 가 0이 되도록 하였다.
- 곡면 덕트 벽면의 각 점들을 $\varepsilon \zeta(s)$ 만큼 바깥쪽 수직방향 (n)으로 움직여 새로운 형상을 얻는다. 본 연구에서 사용된 ε 은 곡면 덕트 폭의 1~5%로 하였다.
- 목적함수 (3)이 수렴될때까지 (b) 이하를 반복계산한다.

유동장내의 전체 벽면을 변형시키지 않고, 본 연구에서와 같이 일부분 (곡면 덕트 부분)만을 변형시키는 경우, 곡면 덕트와 평판 채널의 경계 벽면에 첨점이 존재할 수 있다. 첨점에서 $\partial u_i / \partial n$ 은 무한대의 값을 가지게 되므로 이 값을 사용할 경우 문제가 발생할 수 있다. 그러나, 곡면 덕트의 시작점과 끝점은 고정되어 있으므로 그 점에서의 $\partial u_i / \partial n$ 은 형상설계시 반영되지 않는다.

식 (19)에서 이론적으로는 곡면 덕트 벽면을 따라 모든 점에서 $\partial u_i / \partial n$ 또는 $\partial z_i / \partial n$ 이 0이 되면 최적형상이 된다. 그러나, 곡면 덕트의 시작점과 끝점이 고정되어 있는 경우 모든 점에서 그 값이 0이 되도록 하는 것은 불가능하므로 반복계산을 통해서 목적함수가 더 이상 증가하지 않고 일정값에 수렴할 때까지 계산을 수행하였다.

$\zeta(s)$ 는 벽면의 각 점에서 구해지므로, 새로운 벽면 형상 ($\Gamma_{M,\varepsilon}$)이 부드러운 곡선을 이룬다는 보장이 없다. 따라서, 본 연구에서는 식 (19)의 최적

조건에 의해 새로운 벽면 형상을 구한 후, 벽면의 이웃한 두 점을 연결하는 직선사이의 각도가 160° 보다 작은 경우 해당되는 점을 재조정하여 벽면 형상을 부드럽게 만들었다.⁽⁷⁾

3. 수치해석 방법

일반좌표계에 대해서 covariant 속도 벡터에 대한 Navier-Stokes 방정식을 이차원 비압축성, 정상유동에 대하여 계산을 수행하였다. Navier-Stokes 방정식과 adjoint Navier-Stokes 방정식을 엇갈림 격자형태에 대해서 맥승법칙 방법을 사용하여 차분화하였고, 속도와 압력장의 분리방법은 SIMPLER 알고리즘을 사용하였다.⁽⁸⁾

Fig. 2는 곡면 덕트의 내부유동을 푸는 계산영역을 나타낸다. $L_1=3$, $L_2=6$ 으로 하고, 초기의 원형 곡면 덕트의 안쪽과 바깥쪽 반지름은 각각 $R_I=0.5$, $R_O=1$, 그리고 평판 채널 폭 $h=R_O-R_I=0.5$ 로 하여 곡면 부분의 최적형상을 설계하였다. 곡면 덕트의 벽면 형상이 매 반복계산횟수마다 변할 때 타원형 격자 생성 프로그램을 사용하여 내부 영역에 격자를 자동생성시켰다. ξ 방향으로는 280개, η 방향으로는 51개의 비균일 격자를 배열하였다. 평판 채널과 곡면의 이음 부분에서는 벽면전단율의 값이 커지게 되므로 (4절 참조), 그 부분에 격자를 조밀하게 분포시켰다.

Navier-Stokes 방정식을 푸는데에는 입구에서 Dirichlet 조건 (총류 완전발달유동 속도분포)을 주었으며, 출구에서는 Neumann 조건을 주었다. 2절에서 최적조건을 유도할 때 출구에서 Neumann 조건을 주는 경우 그 유도가 불가능하고, Dirichlet 조건을 줄 때에만 유도되는 단점이 있다.⁽⁷⁾ 한편,

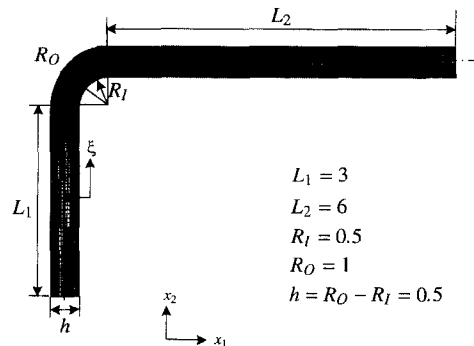


Fig. 2 Grid system of a curved duct (280×51).

공간적으로 발달하는 유동의 수치해석에서 출구조건은 일반적으로 Dirichlet 조건보다 Neumann 조건이 보편적이다. 따라서, 본 연구의 유동해석시 출구에서의 경계조건은 Neumann 조건으로 하였으며, 최적제어이론에서 사용된 Dirichlet 조건과의 모순을 없애기 위하여, 출구의 길이를 충분히 길게 하여 출구에서 완전발달 조건이 만족되도록 하였다. 이 경우, 출구에서의 Neumann 조건은 출구에서의 Dirichlet 조건과 수치해석결과는 완전히 일치하게 된다. 한편, Adjoint Navier-Stokes 방정식을 푸는데에는 입구, 출구 모두에서 $z_i = u_i$ 인 Dirichlet 조건을 주었다 (식 (15)).

4. 결과 및 토의

본 연구에서는 Fig. 2와 같은 초기의 원형 곡면 덕트에 대해서, 레이놀즈수가 100, 300, 800일때 곡면 덕트의 최적형상을 설계하였다. 이때, 평판채널의 이음부분인 원형 곡면 덕트 부분의 형상만 변화시켜가면서 최적형상을 설계하였다. Fig. 3은 레이놀즈수가 100인 경우, 초기 원형 곡면 덕트 형상에서 계산을 수행함에 따라 최종적으로 최적의 곡면형상으로 변해가는 과정을 보여주고 있다. 계산은 출구와 입구의 압력차이값이 (즉, 목적함수 (3)의 값이) 더 이상 변하지 않을때까지 수행하였다. 반복계산횟수가 50이상이 될 때 곡면 형상이 거의 수렴함을 볼 수 있다. Fig. 4는 레이놀즈수가 각각

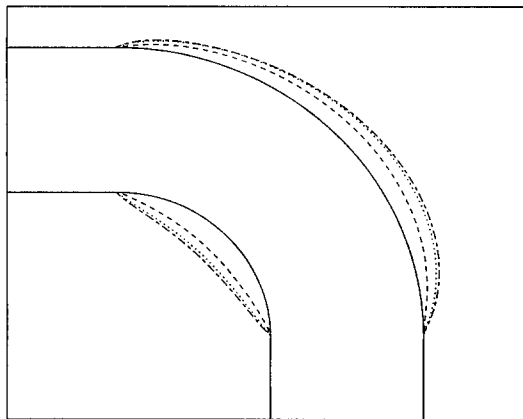
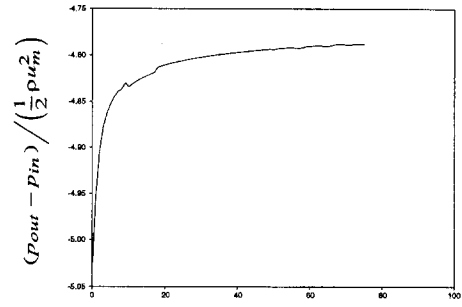


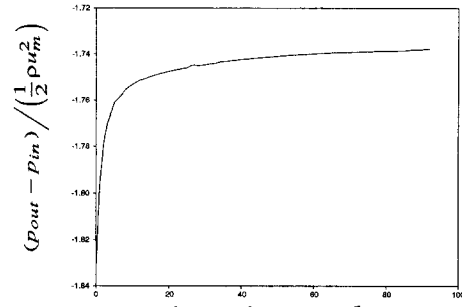
Fig. 3 Evolution of the shape of a curved duct at successive iterations ($Re=100$): —, iteration = 0; - - - - - , iteration = 10; ·····, iteration = 50; - · - · - ·, iteration = 75.

100, 300, 800인 경우에 대해서 반복계산횟수에 따른 출구와 입구의 압력차이값의 변화를 그린 그림이다. 반복계산하면서 출구와 입구의 압력의 차이가 줄어들면서 일정한 값들에 수렴함을 볼 수 있다.

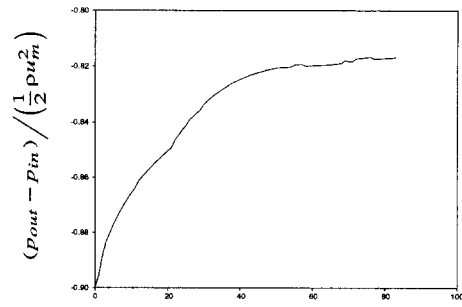
Fig. 5는 레이놀즈수 100, 300, 800인 경우의 곡면의 최적형상을 각각 그린 것이다. 레이놀즈수가 커질수록 곡면 부근의 채널폭이 감소함을 볼 수 있다. 이는 레이놀즈수가 클수록 주어진 채널 폭에서 유동박리가 일어나기 쉽기 때문이다. 또한, 안쪽벽



(a)



(b)



(c)

Fig. 4 Static pressure rise at successive iterations: (a) $Re=100$; (b) $Re=300$; (c) $Re=800$.

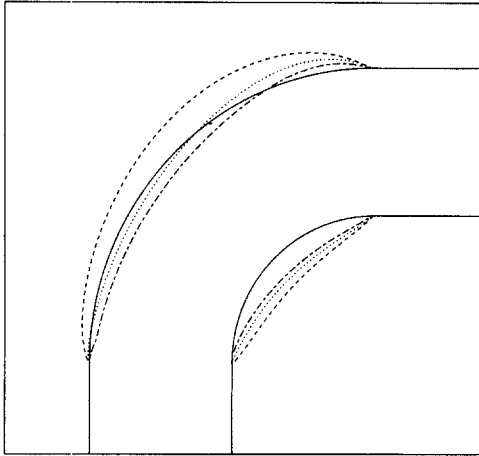
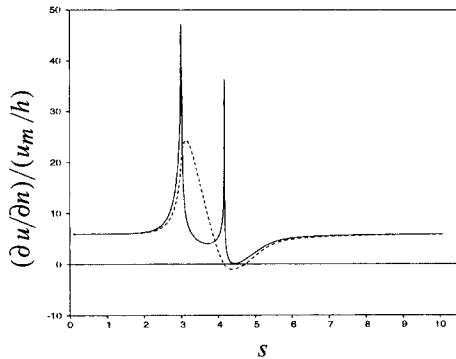


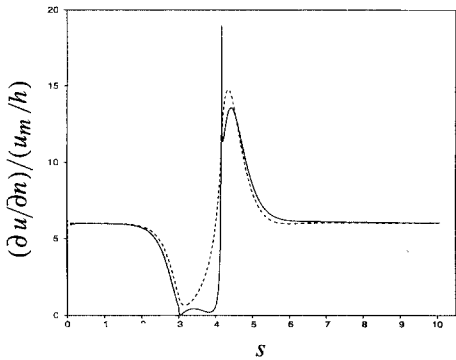
Fig. 5 Optimal shape of a curved duct at different Reynolds numbers: ———, initial circular duct; - - - - -, $Re=100$; ·····, $Re=300$; - · - ·, $Re=800$.

은 원형 곡면이 적합하지 않고 좀 더 평평한 면이 압력강하를 줄일 수 있음을 보여준다. 바깥쪽 벽은 유동의 상류부근에는 원형 곡면보다 곡률이 작고, 하류부근에는 곡률이 더 크음을 볼 수 있다

Fig. 5에서 제시된 형상이 최적형상인지를 알아보기 위하여 벽면에서의 $\partial u/\partial n$ 분포를 살펴보았다. Figs. 6, 7은 레이놀즈수가 300, 800일때 원형 곡면과 최적형상 곡면의 바깥쪽과 안쪽 벽면에서의 $\partial u/\partial n$ 의 분포를 각각 그린 것이다. 여기서 s 는 덕트의 중심선을 따라서 평판채널의 입구부분으로부터의 거리로서, 덕트의 바깥쪽과 안쪽벽면의 점들을 이 거리 s 에 대응시켜서 그린 것이다. $s=0\sim 3$ 인 부분이 입구쪽의 평판채널부분이고, $s=3\sim(3+0.75\times\pi/2)=3\sim 4.178$ 인 부분이 곡면 덕트 부분이며, $s=4.178\sim 10.178$ 인 부분이 출구쪽의 평판 채널 부분이다. 초기 원형 곡면 덕트에서 최적형상으로 변함에 따라, 벽면에서 $\partial u/\partial n$ 값이 0에 가까워

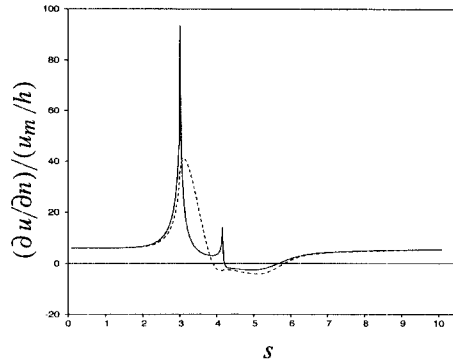


(a)

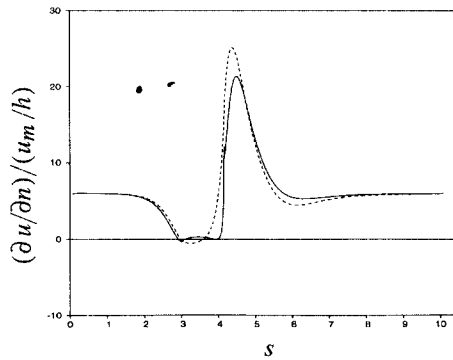


(b)

Fig. 6 Distribution of $\partial u/\partial n$ along curved duct walls at $Re=300$: (a) inner wall; (b) outer wall. - - - - -, circular shape; ———, optimal shape.



(a)



(b)

Fig. 7 Distribution of $\partial u/\partial n$ along curved duct walls at $Re=800$: (a) inner wall; (b) outer wall. - - - - -, circular shape; ———, optimal shape.

짐을 알 수 있다. 곡면 덕트의 바깥쪽 벽면에서는 $\partial u/\partial n$ 값이 거의 0을 가지지만 안쪽벽면에서는 이보다 큰 값을 가짐을 알 수 있는데, 이는 안쪽 벽면에서 $\partial u/\partial n$ 이 0이 될 경우, 바깥쪽 벽면의 역압력구배에 의해서 박리가 일어날 수 있기 때문에 이를 방지하도록 형상이 설계되었기 때문이다. 그러나 안쪽벽면에서도 초기의 원형 벽면형상에서의 $\partial u/\partial n$ 값보다는 훨씬 작은 값을 가짐을 알 수 있다. 곡면이 시작되는 부분과 끝나는 부분의 폭이 제한되어 있으므로, 곡면 형상이 최적형상에 가까워지면 벽면을 따라 $\partial u/\partial n$ 값이 거의 0이 되지만 입구와 출구부분에서는 $\partial u/\partial n$ 값이 0이 될 수 없다. 따라서 $\partial u/\partial n$ 값은 다른 점들에서는 거의 0인 반면, 입구와 출구 근처의 점들에서는 그보다 매우 큰 값을 가지게 되어, 그 부분에서는 덕트 형상이 급격하게 변하게 된다. 따라서 평판채널과 곡면의 이음부분에서는 Figs. 6, 7에서와 같이 $\partial u/\partial n$ 의 값이 매우 큰 값을 가지게 되며, 이 때문에 곡면과 평판채널의 이음경계부분에 격자를 조밀하게 분포시켜서 계산을 수행하였다 (Fig. 2). 벽면을 따른 $\partial u/\partial n$ 을 보면, $Re=300$ 의 경우 원형 곡면 덕트에서 안쪽 벽면에 존재하는 유동박리가 최적형상 덕트에서는 제거되었음을 볼 수 있다. 또한 $Re=800$ 의 경우, 바깥 벽면에 존재하는 유동박리지역이 제거되고, 안쪽벽면의 유동박리지역은 그 크기가 감

소되었음을 볼 수 있다. 이는 레이놀즈수가 각각 100, 300, 800일 때, 원형 곡면 덕트에서의 유선과 최적형상 덕트에서의 유선을 비교한 Fig. 8을 보면 더욱 명확히 알 수 있다.

Fig. 9는 레이놀즈수 100, 300, 800에서 원형 곡면

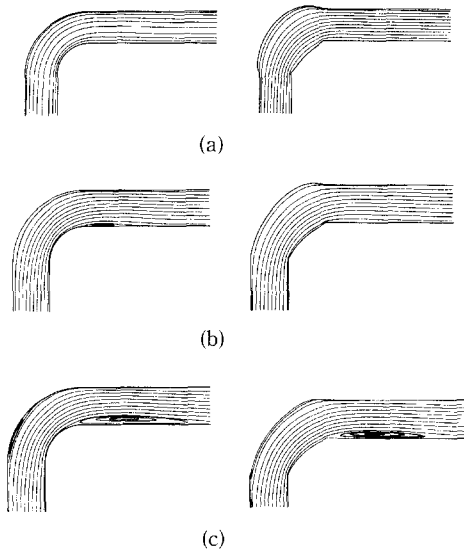


Fig. 8 Streamlines inside the circular duct and optimal duct: (a) $Re=100$; (b) $Re=300$; (c) $Re=800$.

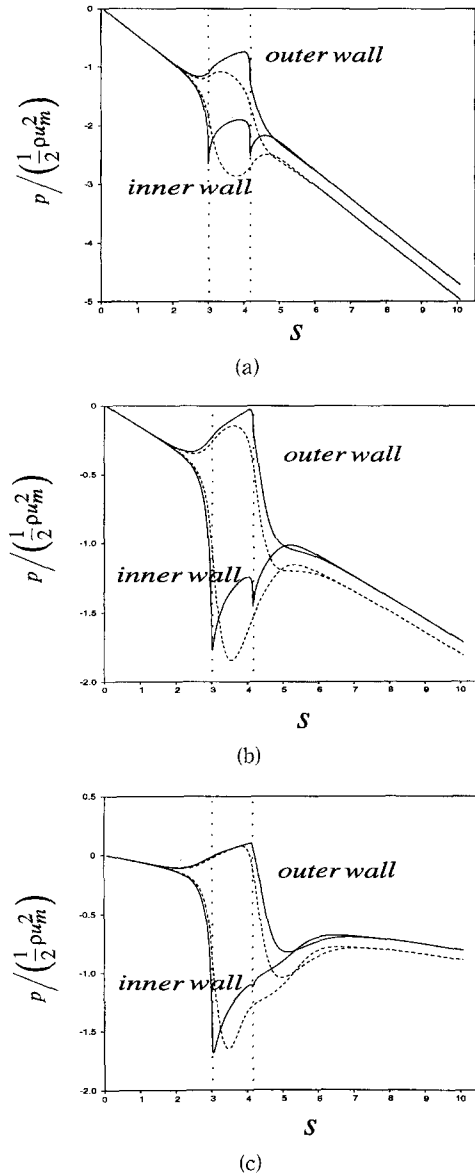


Fig. 9 Distribution of the wall pressure along the inner and outer walls of the curved ducts: (a) $Re=100$; (b) $Re=300$; (c) $Re=800$. -----, circular shape; ———, optimal shape. Dotted lines denote the starting and ending points of the curved wall.

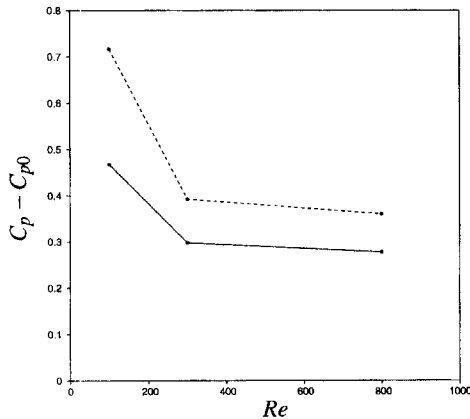


Fig. 10 Pressure loss of the curved ducts: -----, circular shape; ———, optimal shape.

덕트와 최적형상 덕트의 안쪽벽면과 바깥쪽벽면을 따라서 압력분포를 그린 것이다. 최적 덕트 형상은 처음에 단면적이 증가하다가 감소하므로 처음 부분은 디퓨저의 역할을 하여 바깥쪽과 안쪽벽면 모두 압력을 증가시킴으로써 압력강하를 감소시키는 역할을 한다. 곡면 덕트의 뒷부분은 평판채널에 이어져 있으므로 증가하였던 단면적이 감소하면서 다시 압력은 떨어지게 되나, 전체적으로 압력강하를 감소시킨다. 또한 곡면 덕트의 뒷부분에서 일어나는 압력강하는 곡면 덕트를 빠져나오면서 안쪽벽에서 생기는 유동박리를 지연 또는 방지하는 역할을 하게 되는데, 이는 안쪽벽면에서 순압력구배간이 생김으로 인해 운동량을 증가시키고 역압력구배간을 짧게 함으로써 유동박리를 지연 또는 방지하게 된다.

Fig. 10은 평면으로 곧게 연결된 덕트에 비하여 덕트가 90° 굽어질때 발생하는 부차적 C_p 손실을 나타낸 그림이다. 이때 $C_p = 2(p_{in} - p_{out}) / (\rho u_m^2)$ 이다. 길이가 L_1 , L_2 인 두 개의 평판 채널에 완전발달유동이 흐른다고 가정할 때, 두 개의 평판 채널에서의 이론적인 C_p 손실은 $C_{p0} = -2 \frac{dp}{dx} (L_1 + L_2) / (\rho u_m^2) = (24/Re) \cdot (L_1 + L_2) / h$ 이다. 따라서, 곡면 덕트에서 출구와 입구의 압력차이로 계산한 C_p 값에서 C_{p0} 를 빼면 곡면 덕트에 의한 부차적인 손실을 나타낼 수 있다. 점선은 초기의 원형 곡면 덕트의 부차적인 손실을, 실선은 최적형상 덕트의 부차적 손실을 나타낸다. 본 연구에서 구한 최적형상은 부차적 손실을 크게 줄인 것을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 수학적 이론을 이용하여 압력강하가 최소가 되는 이차원 곡면 덕트의 최적형상을 설계하였다. 이 경우 Navier-Stokes 방정식의 비선형성으로 인해 adjoint Navier-Stokes 방정식을 풀어야 한다. 따라서 Navier-Stokes 방정식과 adjoint Navier-Stokes 방정식을 푸는 컴퓨터 코드를 개발하였고, 자동 격자 생성 프로그램을 접목시켜 곡면 덕트의 최적형상을 설계하였다. 이차원 곡면 덕트의 최적형상을 설계한 결과 유동 박리를 방지 또는 감소시킬 수 있었으며, 곡면 덕트를 지나면서 생기는 부차적인 손실을 상당히 감소시킬 수 있었다.

본 연구에서 구해진 최적조건을 달리 해석해 보면, 결국 유동박리가 생기지 않는 최대의 유로를 확보하도록 벽면 형상을 바꾸는 것으로 생각할 수 있다. 따라서, 형상변화의 시작점과 끝점에서 첨점은 자연스럽게 발생할 수 있다. 아주 낮은 레이놀즈수의 경우 ($Re=100, 300$), 최적형상에서 곡면의 시작점과 끝점 부근에 첨점이 존재하더라도 유동박리가 생기지 않는다 (Figs. 8 (a), (b)). 이는 낮은 레이놀즈수의 경우 관성력이 작아 첨점 주위에서도 박리가 발생하지 않기 때문이다. 한편, $Re=800$ 의 경우, 첨점이 심하게 생길 때 더 큰 유동박리를 발생시킬 수 있다. 따라서 형상설계 결과를 보면, 최적형상에서 첨점이 발생하기는 하나, $Re=100, 300$ 의 경우에 비하여 그 정도가 약함을 볼 수 있다 (Fig. 8 (c)). 이로 유추해 볼 때, 높은 레이놀즈수의 난류유동에서는 본 연구에서 보여진 심한 기울기의 불연속성은 나타나지 않을 것으로 생각된다. 따라서 본 연구는 향후 곡관에서 이차유동이 있을 경우의 곡관 단면의 형상설계 및 난류유동에서의 형상설계로 이어질 예정이다.

후 기

본 연구는 1995년도 교육부 학술연구조성비 (기계공학: ME95-B-06)에 의하여 연구되었으며 이에 감사드린다.

참고문헌

- (1) Pironneau, O., 1973, "On Optimum Profiles in Stokes Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 59, pp. 117~128.
- (2) Pironneau, O., 1974, "On Optimum Design in Fluid Mechanics," *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, pp. 97~110.
- (3) Glowinski, R. & Pironneau, O., 1975, "On the Numerical Computation of the Minimum-Drag Profile in Laminar Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 72, pp. 385~389.
- (4) Ganesh, R. K., 1994, "The Minimum Drag Profile in Laminar Flow: A Numerical Way," *J. Fluids Engng.*, Vol. 116, pp. 456~462.
- (5) Stratford, B. S., 1959, "The Prediction of Separation of the Turbulent Boundary Layer," *J. Fluid Mech.*, Vol. 5, pp. 1~16.
- (6) Stratford, B. S., 1959, "An Experimental Flow with Zero Skin Friction Throughout its Region of Pressure Rise," *J. Fluid Mech.*, Vol. 5, pp. 17~35.
- (7) Cabuk, H. & Modi, V., 1992, "Optimum Plane Diffusers in Laminar Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 237, pp. 373~393.
- (8) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill.