

균질화이론을 이용한 규칙적인 배열을 갖는 실린더 집합체 사이의 점성유동 해석

승용호* · 장형일* · 이진희**
(1998년 4월 28일 접수)

An Analysis of Stokes Flow through Periodic Arrays of Cylinders Using Homogenization Theory

Yongho Seung, Hyongil Jang and Jinhee Lee

Key Words: Homogenization Theory(균질화이론), Viscous Flow(점성유동), Darcy's Law(다시의 법칙), Periodic Arrays of Cylinders(규칙적인 배열의 실린더 집합체)

Abstract

Numerical solutions of Stokes flow through periodic arrays of cylinders were sought using Darcy's law and homogenization theory. Drag and lift forces of each cylinder were computed for various attack angles and pitch-to-diameter ratios. It was found that drag force decreased as principal pressure gradient direction deviated from array direction and that drag force increased exponentially as pitch-to-diameter ratio approached unity. Similar tendency was found in lift force except that lift force increased and then decreased in quadratic manner as attack angle varied.

기호설명

μ	: 점성계수
p	: 압력
u_i, \underline{u}	: 속도
x_i, \underline{x}	: Macroscale 좌표계
y_i, \underline{y}	: Microscale 좌표계
Γ	: 매질-유체 경계면
Ω	: 해석하고자하는 전 구역
ϵ	: 크기가 작은 실수 ($ \epsilon \ll 1$)
∇_x	: Macroscale 변수의 미분연산자
∇_y	: Microscale 변수의 미분연산자
v_i, \underline{v}	: 가상속도
q	: 가상압력
w_{ik}	: Microscale 변수분리형 매개변수
π_k	: Microscale 변수분리형 매개변수

Y	: 단위구조의 크기
P	: 실린더의 배열주기
D	: 실린더의 직경
η	: 직경비(직경과 중심거리의 비)
U	: 평균속도

1. 서론

다공성 매질 사이로 흐르는 점성유동에 대한 연구는 유체공학 및 열공학의 제반 분야에서 급속도로 연구가 진행 발전되고 있는 과제중의 하나이다. 다공성 매질에서의 유체유동에 관한 해석은 폐열회수장치, 원자로의 노심, 지하수의 흐름해석 등 자연상태 또는 인간에 의해 개발된 많은 시스템의 광범위한 분야에 걸쳐 널리 응용될 수 있으며, 이를 적극적으로 응용하기 위한 많은 노력이 경주되고 있다. 따라서 다공성 매질에서의 유동에 대한 해석은 이론적 관점이나 실제적인 관점에서 매우 중요하지만 이러한 중요성에도

* 회원, 홍익대학교 대학원 기계설계학과

** 회원, 홍익대학교 기계설계학과 조교수

불구하고 대체로 제한적인 조건하에서 그 해를 얻을 수 있었다. Hasimoto⁽¹⁾는 주기적으로 배열된 구의 주위를 흐르는 느린 점성 유동에 대한 해를 Fourier 급수를 이용하여 해석적인 방법으로 얻었으며, Childres⁽²⁾는 Hasimoto의 연구를 확장하여 임의의 배열을 갖는 유한 갯수의 구 집합체 사이로 흐르는 느린 점성유동에서의 항력을 구하였다. Hasimoto와 Childres의 해석방법은 구와 구사이의 간극에 비해 구의 크기, 즉 단위 체적에 대한 구의 부피비가 작은 경우에만 해석이 가능하다는 제한을 갖고 있다. Zick와 Homsy⁽³⁾는 규칙적으로 배열된 구 주위의 유체흐름에 대한 등가의 적분방정식을 만들고, Youngren과 Acrivos⁽⁴⁾가 임의의 모양을 가진 단일 물체의 주위를 흐르는 유동에 대한 해를 구하는데 이용한 수치적인 해법을 확장하여 부피비가 작은 영역에서뿐만 아니라 큰 경우에도 다공성 매질에서의 점성유동에 대한 해석을 가능케 하였다.

본 연구에서는 임의의 다공성 매질 사이의 점성유동에 대한 해를 구하기 위한 시도의 첫 단계로서 규칙적으로 배열된 실린더 사이를 흐르는 느린 점성유동에 대한 해를 얻기 위한 새로운 방법을 제시하고자 한다. 수치적인 방법으로 다공성 매질 사이의 점성유동에 대한 해를 구하기 위해서는 기하학적인 특성상 대단히 많은 자유도와 계산 시간을 요구받게 되는데, 이를 극복하기 위해 유한요소법과 균질화이론을 사용하여 계산에 필요한 자유도를 현저히 줄이면서 다공성 매질에서의 유동에 대한 해를 얻을 수 있었다. 유한요소법에 균질화이론을 도입하는 방법은 이미 복합구조체의 응력해석문제⁽⁵⁾와 등가열전도계수의 계산⁽⁶⁾등 다른분야에서 응용되고 있다. 균질화이론을 이용한 이전의 연구⁽⁷⁾에서는 정사각형 배열의 실린더 집합체 사이의 점성유동 해석이 수행되었으며, 본 연구에서는 이와 함께 다른 배열을 갖는 실린더 집합체의 경우와의 비교 분석을 수행하였다.

2. 다공성 매질 사이의 느린 점성유동과 균질화이론

균질화이론의 기본개념은 유체유동이 존재하는 미세한 다공성 매질에서 같은 패턴이 반복된다고 생각되는 기하학적 기본단위를 취하고 이중좌표

계법을 적용하여 지배방정식을 재구성하여, 유한요소법 등의 수치적인 방법을 이용하여 유체의 흐름을 계산하는 방법이다. 일반적으로 미세한 다공성 매질 사이의 유체유동은 관성력보다 점성력이 우세하기 때문에 다음과 같은 지배방정식으로 표현되는 Stokes 흐름으로 간주된다.

$$0 = -\nabla p(x, y) + \mu \nabla^2 u(x, y) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u(x, y) = 0 \quad (2)$$

그리고 매질-유체 경계면에서 비활조건(no-slip condition)이 다음과 같이 주어진다.

$$u(x, y) = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (3)$$

위 식에서 $y = x/\varepsilon$ 는 미세좌표계를 뜻한다. Rubinstein⁽⁸⁾은 다공성 매질에서 압력과 속도가 다음과 같이 점근전개(asymptotic expansion)로 표현할 수 있음을 보였다.

$$u = \varepsilon^2 u^0(x, y) + \varepsilon^3 u^1(x, y) + O(\varepsilon^4) \quad (4)$$

$$p(x, y) = p^0(x) + \varepsilon p^1(x, y) + O(\varepsilon^2) \quad (5)$$

식(4)-(5)를 식(1)-(2)에 대입한 후 ε 을 0에 접근시키면 각각

$$0 = -\nabla_x p^0 - \nabla_y p^1 + \mu \nabla_y^2 u^0 \quad (6)$$

$$\nabla_y \cdot u^0 = 0 \quad (7)$$

이 됨을 알 수 있다. 또 식(3)의 경계조건은 미세좌표계에서

$$u^0 = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (8)$$

이 된다. 다공성 매질에서의 유동해석을 위하여 재구성된 지배방정식 (6)과 (7)의 해를 얻기 위하여 여러 가지 수치해석법을 이용할 수 있는데, 본 연구에서는 가상변위(속도)법을 적용한 유한요소법으로 다음과 같이 전개하였다.

식(6)의 양변에 가상속도 u 을 곱하여 다시 구간 Ω 에서 적분하면 아래와 같은 식을 얻을 수

있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v_i \mu \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial y_j \partial y_j} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} v_i \left(\frac{\partial p^0}{\partial x_i} + \frac{\partial p^1}{\partial y_i} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

이에 divergence theorem을 적용하여

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \mu \frac{\partial u_i^0}{\partial y_j} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} p^1 d\Omega + \int_{\Omega} v_i \frac{\partial p^0}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

을 얻게 된다. 한편 식(7)에 가상압력 q를 곱하여 구간 Ω 에서 적분하면

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial u_i^0}{\partial y_j} d\Omega = 0 \quad (11)$$

을 얻는다. 또한 Rubinstein⁽⁸⁾은 다공성 매질에서 유동의 경우 Darcy의 법칙을 이용하여 u_i^0 와 p^1 을 각각 다음과 같이 p^0 의 구배에 비례하는 크기로 나타낼 수 있음을 제안하였다.

$$u_i^0 = - \frac{1}{\mu} w_{ik} \frac{\partial p^0}{\partial x_k} \quad (12)$$

$$p^1 = \pi_k \frac{\partial p^0}{\partial x_k} \quad (13)$$

단위구조의 크기를 $|\mathbf{Y}|$ 라고 할 때, 미소좌표계 변수 w_{ik} 와 π_k 는 단위구조의 경계면에서 각각 다음과 같은 주기성을 갖으며

$$w_{ik}(\mathbf{y}) = w_{ik}(\mathbf{y} + \mathbf{Y}) \quad (14)$$

$$\pi_k(\mathbf{y}) = \pi_k(\mathbf{y} + \mathbf{Y}) \quad (15)$$

식(8)의 비활조건은 식(12)를 고려하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w_{ik} = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (16)$$

식(12)와 식(13)을 식(10)에 대입하면

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \frac{\partial w_{ik}}{\partial y_j} \frac{\partial p^0}{\partial x_k} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial v_m}{\partial y_m} \pi_k \frac{\partial p^0}{\partial x_k} d\Omega = \int_{\Omega} v_i \frac{\partial p^0}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (17)$$

이 됨을 알 수 있다. 식(12)를 식(11)에 대입한

$$- \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} q \frac{\partial w_{jk}}{\partial y_j} \frac{\partial p^0}{\partial x_k} d\Omega = 0 \quad (18)$$

을 식(17)에 더하면

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} \frac{\partial w_{ik}}{\partial y_j} + \frac{\partial v_m}{\partial y_m} \pi_k \right. \\ & \left. + q \frac{\partial w_{jk}}{\partial y_j} - v_k \right) \frac{\partial p^0}{\partial x_k} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

을 얻게 되는데, 아래의 식(20)은 식(19)의 충분조건이 됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} \frac{\partial w_{ik}}{\partial y_j} + \frac{\partial v_m}{\partial y_m} \pi_k \right. \\ & \left. + q \frac{\partial w_{jk}}{\partial y_j} - v_k \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

식(14)-식(16)의 경계조건과 식(20)으로부터 w_{ik} 와 π_k 를 구할 수 있다. w_{ik} 와 π_k 가 산출되면 식(4)-식(5)와 식(12)-식(13)의 관계로부터 다공성 매질에서의 속도와 압력이 계산된다.

3. 실린더 집합체에 대한 단위구조

다공성 매질에서의 느린 점성유동의 해석을 위한 균질화이론은 주기적으로 반복되는 기하학적 특성을 갖는 모든 매질에 대한 2차원 또는 3차원 유동문제의 해석에 적용될 수 있으나, 본 연구에서는 실린더 집합체에서의 규칙적인 배열의 대표적인 두 가지 유형인 정사각형배열(in-line array)과 정삼각형배열(staggered array)에 횡방향유동(cross flow)이 있는 경우를 그 대상으로 한다.

정사각형 배열을 갖는 실린더 집합체에서 실린더의 길이가 충분히 길어 양 끝단에서의 효과를

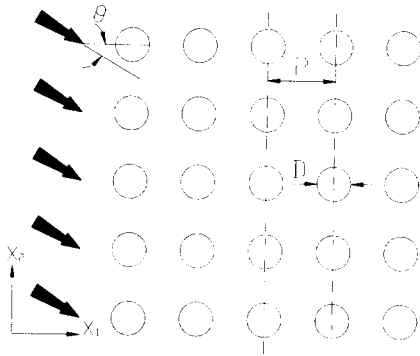


Fig. 1 Flow through in-line array of cylinders.

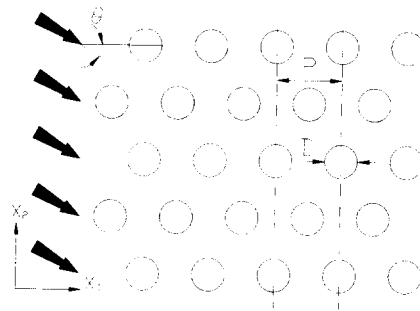


Fig. 3 Flow through staggered array of cylinders.

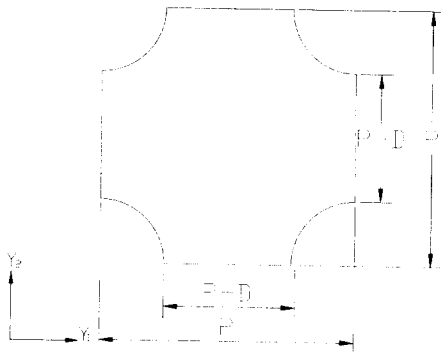


Fig. 2 Unit cell for the solution of Stokes flow through in-line array of cylinders.

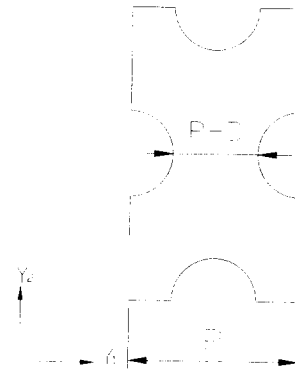


Fig. 4 Unit cell for the solution of Stokes flow through staggered array of cylinders.

무시할 수 있다고 가정하면 Fig.1과 같은 2차원 문제로 모델링이 가능하다. Fig.1에서 P는 실린더가 배열되어 있는 주기를, D는 실린더의 직경을 각각 나타내고 있다. 직경비 η 는 직경 D와 중심간 거리 P의 비로 나타내며, θ 는 주압력구배방향(principal pressure gradient direction)과 실린더 배열 방향이 이루는 각도를 뜻한다.

규칙적인 배열을 갖는 실린더 집합체 사이로 흐르는 느린 점성유동의 해를 균질화이론을 적용하여 구하기 위해서 unit cell에 대한 모델링이 필요하다. Fig.2에는 Fig.1의 정사각형 배열 실린더 집합체 사이의 2차원 유동에 대하여 같은 형태의 유동이 반복되는 최소단위에 대한 unit cell이 주어져 있다. η 를 0.05에서 0.95까지 변화 시키가며 각각의 경우에 대하여 Fig. 2와 같은 unit cell을 설정하고 그에 따른 유한요소 격자를 생성하였다.

Fig.3에 정삼각형 배열을 갖는 실린더 집합체의 2차원 모델이, Fig.4에는 Fig.3에 대한 unit cell이 각각 주어져 있다. 앞에서와 마찬가지로 Fig.3에서의 P, D, θ 는 각각 실린더가 배열되어 있는 주기, 실린더의 직경, 압력구배의 주방향과 실린더 배열 방향이 이루는 각도를 뜻한다. Fig.3과 같은 형상에서 직경비 η 를 0.05에서 0.95까지 변화 시키가며 각각의 경우에 대하여 Fig.4와 같은 unit cell을 설정하고 그에 따른 유한요소 격자를 생성하였다.

4. 실린더 집합체 사이를 흐르는 느린 점성유동 해석

앞에서 개발된 알고리즘을 FORTRAN 언어를 사용하여 프로그램화하였다. 이 프로그램을 정사각형 배열 실린더 집합체와 정삼각형 배열 실린

더 집합체 모델에 적용하고 조건식(14)-식(16)을 부과하여 w_{ik} 와 π_k 를 산출하였다. w_{ik} 와 π_k 의 값을 식(12)와 식(13)에 대입하면 임의의 압력 구배, $\frac{\partial p^0}{\partial x_k}$ 에 대한 u_i^0 와 p^1 을 구할 수 있다.

u_i^0 와 p^1 을 다시 식(4)-식(5)에 대입함으로써 속도 u 와 압력 p 을 구할 수 있다.

유동장에 놓인 임의의 물체의 항력과 양력은 물체 주위로 흐르는 유속의 구배와 압력의 차이로 인하여 발생한다. 유동장에 위치한 물체에 미치는 점성 유동의 영향은 미세한 다공성 구조체의 설계에 있어서 중요한 고려대상이 된다. 식(4)-(5)를 고려하여 2차원 비압축성 유동장에서의 stress는 아래와 같이 주어진다.

$$\sigma_{11} = -(p^0 + \epsilon p^1) + 2\mu \epsilon \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} \quad (21)$$

$$\sigma_{22} = -(p^0 + \epsilon p^1) + 2\mu \epsilon \frac{\partial u_2^0}{\partial y_2} \quad (22)$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \mu \epsilon \left(\frac{\partial u_2^0}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2} \right) \quad (23)$$

이들로부터 주압력구배방향을 기준으로 실린더에 가해지는 항력과 양력을 계산할 수 있다. Hasimoto⁽¹⁾는 정사각형 배열의 2차원 유동에서 Fig.1의 $\theta=0^\circ$ 인 경우 실린더의 항력을 다음과 같이 제안하였다.

$$F = \frac{4\pi\mu U}{\ln(2/\eta) - 1.3105 + (\pi\eta^2/4) + O(\eta^4)} \quad (24)$$

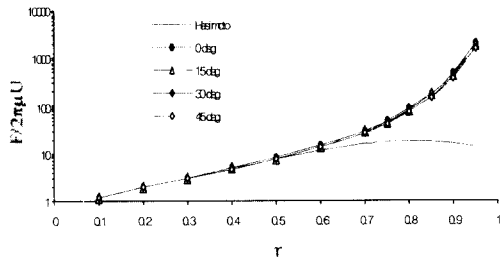


Fig.5 Comparisons of homogenization theory to Hasimoto⁽¹⁾ in in-line array.

Fig.5에는 정사각형 배열 실린더 집합체에서 $\theta=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ 인 각각의 경우에 대하여 η 를 0.05부터 0.95까지 변화 시켜가며 unit cell을 만들고 이에 균질화이론을 적용하여 계산한 항력과 Hasimoto의 이론적 예측값($\theta=0^\circ$)과의 비교가 주어져 있다. $\theta=0^\circ$ 인 경우에 η 가 작은 범위에 있어서 두 방법으로 계산된 항력의 크기가 거의 동일하게 나타나는 반면, η 가 증가함에 따라 두 방법의 결과에 큰 차이가 존재함을 볼 수 있다. 이는 Hasimoto가 실린더 크기에 비하여 실린더 사이의 거리가 멀다고 가정하여 식(24)를 유도하였기 때문에 η 가 큰 경우에는 식(24)의 오차항 $O(\eta^4)$ 이 무시할 수 없는 크기가 되어 그 적용이 적절치 않은 때문으로 판단된다. 반면 균질화이론을 이용하여 산출한 항력은 η 가 증가할 경우 지수함수적으로 증가하는 경향을 보이고 있다. $\theta=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ 인 경우 η 에

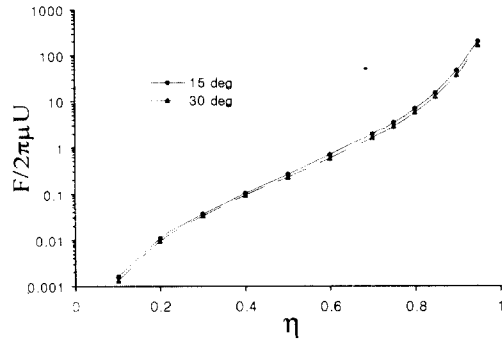


Fig. 6(a) Lift forces for $\theta=15^\circ$ and 30° in in-line array.

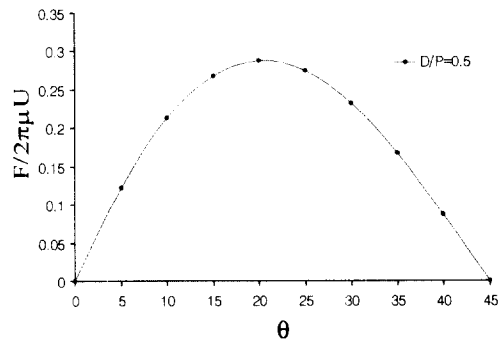


Fig. 6(b) Lift forces for $\eta=0.5$ in in-line array.

다른 항력의 변이는 대체로 $\theta = 0^\circ$ 의 경우와 비슷한 경향을 보이고 있으나 θ 가 증가함에 따라 항력이 감소함을 알 수 있다.

Fig.1에서 볼 때 $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ 의 경우 unit cell의 기하학적 대칭성 때문에 주압력구배방향에 대한 양력이 존재하지 않는다. Fig.6(a)에는 정사각형배열의 $\theta = 15^\circ, 30^\circ$ 인 경우에 대하여 η 를 0.05부터 0.95까지 변화 시키가며 각각의 경우에 대하여 산출한 양력의 크기가 주어져 있는데 항력의 경우에서와 마찬가지로 η 가 커질수록 증가하는 경향을 보였다. 또 Fig.6(b)에는 $\eta = 0.5$ 인 경우 θ 를 변화시켜 가며 산출한 양력이 주어져 있는데, $\theta \in [0^\circ, 45^\circ]$ 에서 θ 가 증가함에 따라 양력이 증가했다 다시 감소하는 2차 함수적인 경향을 보여주고 있다.

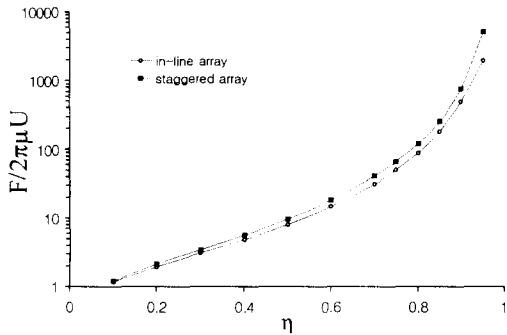


Fig. 7(a) Drag forces in in-line array and staggered array ($\theta=0^\circ$)

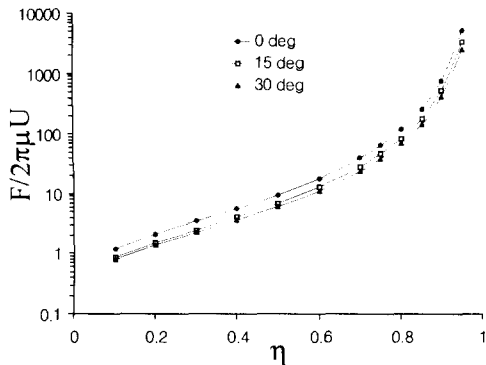


Fig. 7(b) Drag forces for various attack angles in staggered array.

Fig.7(a)에는 정삼각형 배열과 정사각형 배열에서 θ 를 0° 로 고정하고 η 을 0.05부터 0.95까지 변화시켜가며 각각의 경우에 대하여 계산한 항력이 주어져 있다. η 에 따른 항력의 변이는 대체로 정삼각형 배열과 정사각형배열에서 비슷하게 증가하는 추세를 보이고 있으나, 전자의 경우가 후자의 경우에서보다 항력이 크게 나타남을 알 수 있다. Fig.7(b)는 정삼각형 배열 실린더 집합체에서 $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ 인 경우의 각각에 대하여 η 에 따른 항력의 크기를 보여주고 있으며 η 에 따른 항력의 변이는 대체로 정사각형 배열의 경우와 비슷한 경향을 보이고 있다.

Fig.8(a)에는 정삼각형배열의 $\theta = 10^\circ, 20^\circ$ 에서의 η 에 따른 양력을 보여주고 있으며 정사각형배열의 양력선도인 Fig.6(a)에서와 같은 증가곡선을 보여준다.

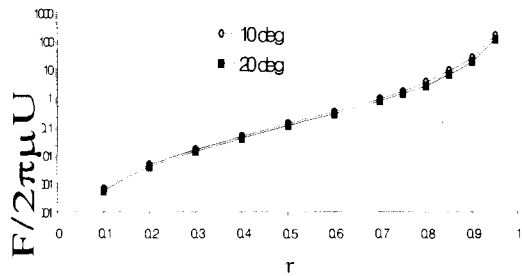


Fig. 8(a) Lift forces for $\theta=10^\circ$ and 20° in staggered array.

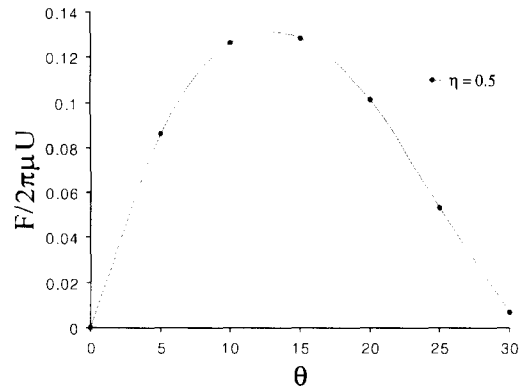


Fig. 8(b) Lift forces for $\eta=0.5$ in staggered array.

Fig.3에서 보는 것과 같은 정삼각형 배열의 경우 $\theta = 0^\circ, 30^\circ$ 에서 기하학적인 대칭성 때문에 양력이 존재하지 않는다. Fig.8(b)에는 $\eta = 0.5$ 인 경우 θ 를 변화시켜 가며 양력을 산출한 결과를 보였다. Fig.8(b)에서 $\theta = 30^\circ$ 인 경우에는 양력이 영(zero)이 되어야 하지만 실제 계산결과에서는 약간의 오차값을 가지고있다는 것으로 산출되었다.

Fig.5-Fig.8에서 살펴 본 바와 같이 항력이 정사각형 배열의 경우에서 정삼각형배열보다 작게 나타나고 있다. 이는 상대적으로 규칙적인 배열인 정사각형배열이 정삼각형 배열 보다 유체의 흐름을 원활하게 할 수 있는 기하학적인 형상을 가지고 있기 때문에 점성유동에 의한 저항이 작은 때문인 것으로 보인다.

본 연구에서 수행한 실린더 집합체 사이의 점성유동에 대한 해석은 Hasimoto⁽¹⁾와 Childress⁽²⁾ 등의 해석방법과는 달리 직경비가 큰 경우에서도 적절한 근사해를 구할 수 있었다. 또한 입의 다공성 매질에서의 점성유동에 대한 해석을 전체 계산영역이 아닌 unit cell만에 대한 해석으로 대체함으로써 수치계산에서 필요한 계산용량과 계산시간을 크게 단축시킬 수 있었다. 또한 복잡한 기하학적 형상을 갖는 다공성 매질에서의 유동해석에 있어서도 균질화이론을 적용한 해석법의 활용이 기대된다. 이후의 연구에서는 균질화이론을 이용하여 3차원의 구 집합체 사이의 느린 점성유동에 대한 연구를 수행하고자 한다.

5. 결 론

균질화이론을 적용하여 규칙적인 배열을 갖는 실린더 집합체 사이로 흐르는 느린 점성유동에 대한 해석을 수행하였으며, 이로부터 각 실린더에 대한 항력과 양력을 계산하였다. 정사각형 배열과 정삼각형 배열을 갖는 실린더 집합체 내의 각 실린더에 가해지는 항력은 주압력구배방향이 실린더 배열방향과 어긋날수록 감소함을 보였고 직경비가 커짐에 따라 지수함수적인 증가를 보였다. 주압력구배방향과 실린더 배열 방향이 같은 경우의 항력은 각 직경비에서 정삼각형 배열의 경우가 정사각형 배열의 경우보다 크게 나타났고, 실린더에 가해지는 양력은 항력의 경우와 마찬가지로 직경비가 커짐에 따라 증가함을 보였으

며, 주압력구배방향이 실린더 배열방향과 어긋남에 따라 증가했다 다시 감소하는 2차 함수적인 특성을 보였다. 항력은 정사각형 배열의 경우 정삼각형 배열의 경우에서보다 작게 나타남을 보였다. 이는 상대적으로 규칙적인 배열을 갖는 정사각형 배열에서 정삼각형 배열의 경우보다 유체의 흐름을 원활하게 할 수 있는 요인을 가지고 있기 때문에 유동에 대한 저항이 작은 때문인 것으로 판단된다.

참고문헌

- (1) Hasimoto, H., 1959, 'On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of sphere', J. Fluid Mech. vol. 5, pp. 317-328
- (2) Childress, S., 1971, 'Viscous Flow Past a Random Array of Spheres', J. Chem. Phys., vol. 56, pp. 2527-2539
- (3) Zick, A. A., Homsy and G.M., 1981, 'Stokes Flow through Periodic Arrays of Spheres', J. Fluid Mech., vol. 115, pp. 13-26
- (4) Youngren, G. K. and Acrivos, A., 1975, 'Stokes Flow past a Particle of Arbitrary Shape: a Numerical Method of Solution', J. Fluid Mech., vol. 69, pp. 377-403
- (5) Guedes, J. M. , 'Nonlinear Computational Models for Composite Materials Using Homogenization.' Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1990.
- (6) 이진희, 이봉래, '균질화기법을 이용한 복합재료의 등가 열전도계수의 계산.' 대한 기계학회, 18 권 5호, 1994, pp. 1254-1252.
- (7) 장형일, 송용호, 이진희, 1998, '균질화이론을 이용한 정사각형 배열 실린더 집합체 사이의 점성유동 해석', 대한기계학회, 춘계학술대회 논문집, pp. B650-B654
- (8) Rubinstein, J. and Torquato, S., 1989, 'Flow in Random Porous Media: Mathematical Formulation, Variational Principles and Rigorous Bounds', J. Fluid Mech., vol. 206, pp. 25-46