

비선형 현가요소를 가진 철도차량의 승차감 민감도 해석

Ride Sensitivity Analysis of a Train Model with Non-linear Suspension Elements

탁 태 오*
Tak, Tae-oh

김 명 훈**
Kim, Myung-hun

ABSTRACT

In this study, ride sensitivity analysis of a train with non-linear suspension elements is performed. Non-linear characteristics of springs and dampers for primary and secondary suspensions of a train is parameterized. Equation of motion of the train model is derived, and using the direct differentiation method, sensitivity equations are obtained. For a nominal ride quality performance index, sensitivity analysis with respect to various design parameters regarding non-linear suspension parameters is carried out.

키워드 : 승차감, 민감도해석, 직접미분법, 수치미분법

Keywords : ride quality, sensitivity analysis, direct differentiation method,
numerical differentiation method

1. 서 론

철도 차량의 현가장치는 1차와 2차 현가장치로 구성되어 있으며, 현가 요소로서는 코일스프링, 공기스프링, 판스프링, 롤스테빌라이저 그리고 여러 가지 댐퍼가 사용되고 있다.[1] 이러한 현가 요소는 차량의 안전성과 승차감을 결정하는 중요한 인자이며, 이들의 특성치는 차량의 초기 설계 단계의 주요한 설계변수가 된다. 그러나 현가 요소는 본질적으로 비선형성을 가지고 있으며 이러한 비선형성은 차량의 동적 거동에 영향을 미칠 것이다. 본 논문에서는 비선형 현가 요소가 승차감에 미치는 영향을 파악하기 위하여 비선형 현가요소의 승차감에 대한 민감도 해석을 수행하고자 한다.

승차감은 진동, 소음, 온도등의 여러 요소를 포함하는 주관적인 평가이다. 승차감을 평가하는 동역학적 해석은 진동 환경을 고려하여야 하고 특히 트랙의 불규칙 때문에 차량에 발생하는 진동이 중요하다. 승차감을 측정하는 여러 가지 방법이 있으나 대체로 평균 제곱(Root Mean Square : RMS) 가속도가 많이 사용된다. 구체적 방법은 ISO 지침서에 정의되어 있다. 그림1은 ISO의 수직 방향의 2시간 안락 경계 기준이 제시되어 있다. 각 주파수 대역에서 RMS 가속도가 기준 이상이 되면 불쾌감을 느낀다는 의미이다. 특히 4-10 Hz의 수직진동에 승객이 민감함을 알 수 있다.

2. 승차감 해석

2.1 차량 모델

승차감을 해석하기 위해서 대차를 포함하는 전차량 모델을 구성하였다. 그림2와 그림3은 KTGV 차량에서 사용되는 동력대차와 일반대차를 나타낸 그림

* 경희원, 강원대학교 기계공학과 교수 공학박사

** 강원대학교 기계공학과 석사과정

이 연구는 1998년도 G7 고속전철기술개발사업의 연구비 지원에 의한 결과의 일부임

이다. 그림4는 승차감 해석을 위해 구성한 차량모델로서 객차 3량과 대차4량으로 구성되어 있고 각 물체는 수직병진, 피치, 롤의 자유도를 가지고 있으며 객차와 객차 사이는 수직 방향으로 강성이 큰 스프링을 사용하고 있다. 이 전차량 모델은 모두 21개의 자유도를 가지게 된다. 사용되어진 현가요소의 특성값을 선형으로 가정하였을 때 식(1)과 같이 운동방정식을 나타낼 수 있다.[2]

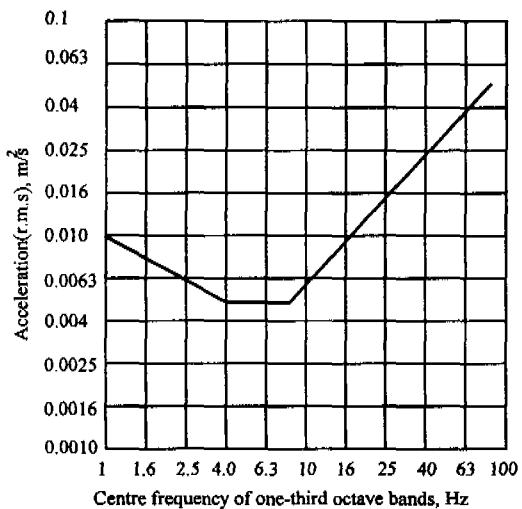


그림1 ISO 2hr 수직방향 안락경계기준

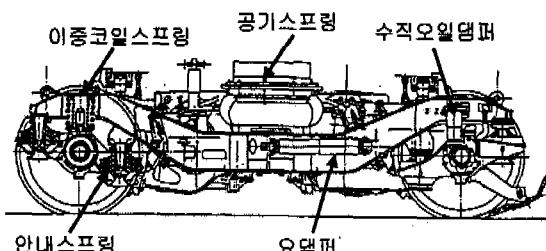


그림2 KTX에 사용되는 동력대차

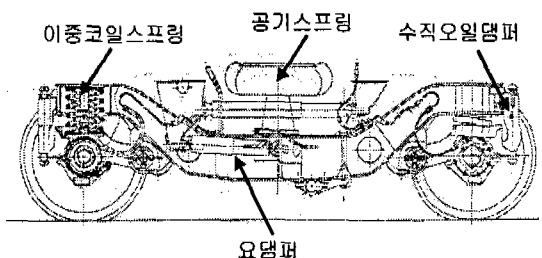


그림3 KTX에 사용되는 일반대차

$$[M]_{21 \times 21} \ddot{q} + [C]_{21 \times 21} \dot{q} + [K]_{21 \times 21} q = f(t) \quad (1)$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0, \quad q(0) = q_0$$

여기서, $[M]$, $[C]$, $[K]$ 는 각각 관성행렬, 감쇠행렬, 그리고 강성행렬을 나타내며 $f(t)$ 는 노면 가진에 의한 외부가진력을 나타낸다.

2.1 철로노면 모델

차량의 승차감을 해석하는데 중요하게 고려되는 성질이 레일의 노면 거칠기이다. 노면 형상은 노면 거칠기의 주파수와 진폭으로 결정할 수 있다. 시간에 대한 주파수 f 와 거리에 대한 공간주파수 Ω 의 관계는 다음과 같이 나타난다.[3]

$$f(Hz) = \Omega [cycles/m] \cdot V [m/s] \quad (2)$$

$$= \frac{1}{l_{un}} \cdot V$$

여기서, V 는 차량의 진행속도이고, l_{un} 은 공간주파수의 역수인 파형의 길이이다. 그에 따른 노면의 전력밀도함수(Power Spectral Density)는 다음과 같이 나타난다.

$$S(\Omega_i) = \frac{A_v \Omega_c^2}{\Omega_i^2 (\Omega_i^2 + \Omega_c^2)} \quad (3)$$

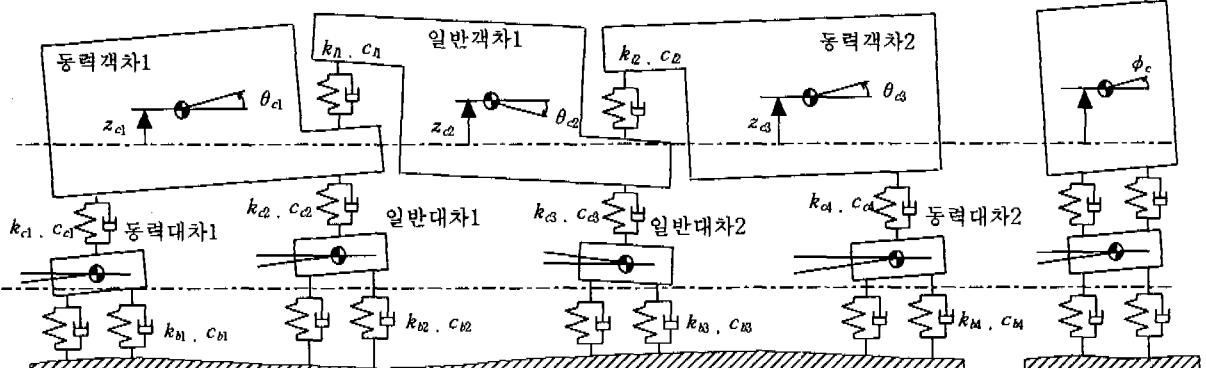


그림4 승차감 해석을 위한 전차량모델

여기서, Ω_i 는 공간주파수, Ω_c 는 한계 공간주파수이고, A_v 는 노면의 거칠기 상수이다. 표1은 노면의 분류에 따른 상수값을 나타내고 있다.[4] 주어진 주파수 대역에서 노면의 평균값은 다음과 같이 나타난다.

$$\bar{z}_{\Omega_1-\Omega_2} = \sqrt{S(\Omega_i)\Delta\Omega} \quad (4)$$

여기서, $\Omega_i = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$, $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ 를 의미한다.

따라서 거리 x 에서의 노면의 높이 $z(x)$ 는 각 주파수에 대하여 각각의 높이를 모두 계산한 다음 이를 산술적으로 더하여 구할 수 있다.

$$z(x) = \sum_{i=1}^4 \sqrt{2} \bar{z}_i \sin 2\pi \Omega_i (x - \phi_i) \quad (5)$$

여기서, $\sqrt{2}\bar{z}_i$ 는 진폭, Ω_i 와 ϕ_i 는 각각 공간주파수와 위상지연을 의미한다. 그림5는 노면 분류에 따른 PSD와 생성된 노면의 거칠기를 이산화하여 주파수 대역에서 나타낸 그림이다. 그림6은 전력밀도함수에 의해 생성된 노면의 거칠기를 나타낸 그림이다.

표1 노면의 분류에 따른 변수

변 수	노 면 분 류	
	등급 1	등급 6
$A_v(\text{cm}^2/\text{rad}/\text{m})$	1.2107	0.0339
$\Omega_c(\text{rad}/\text{m})$	0.8245	0.8245

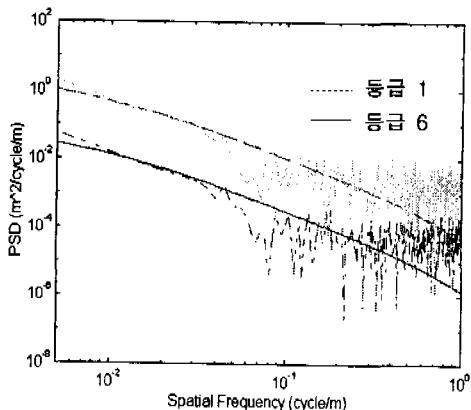


그림5 노면거칠기에 대한 전력밀도함수

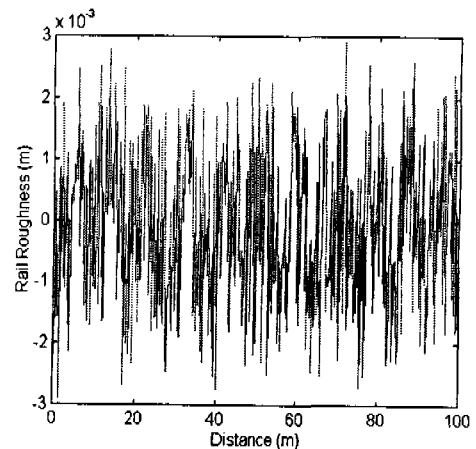


그림6 레일노면의 거칠기

등급 6의 생성 노면의 상태에서 승차감을 해석하기 위하여 RMS 가속도를 구하여 RMS 가속도 값을 주파수에 관한 함수로 나타내어 그림1에서 제시한 ISO 2hr 안락 경계 기준에 부합하는지를 알아보았다. 그림7은 승객이 가장 쉽게 불쾌감을 느낄 수 있는 객차의 후방 승객의 위치에서 승차감을 나타낸 것이다.

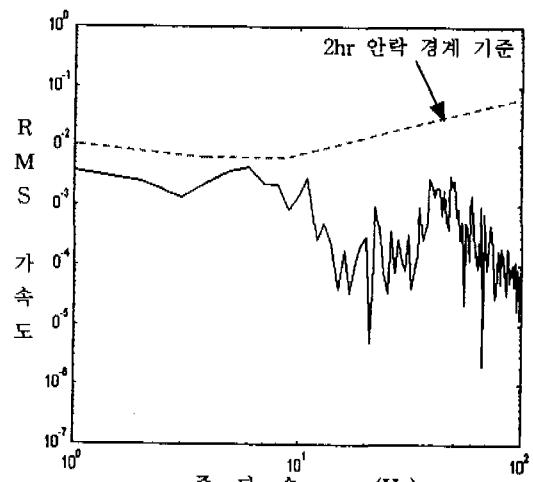


그림7 객차후방 승객위치의 승차감 해석

3. 비선형 현가요소의 설계변수화

그림4의 전차량 모델에서 1차 현가장치중 수직댐퍼와 고무 스프링에 대해서 비선형 특성치를 적용하여 승차감 해석과 민감도 해석을 수행하기 위해서는 비선형 현가요소에 대한 설계변수화가 수행되어야 한다.

비선형 댐퍼의 설계변수화는 동력객차와 일반객차로 나누어진다. 비선형 댐퍼는 그림8과 같이 O, A, B, C, D, E, F의 7개의 변수점으로 나타낼 수 있으며 이 변수점은 속도에 대한 설계변수와 하중에 대한 설계변수로 구성되어 있고, 7개의 점에 의해 5개의 직선으로 비선형 댐퍼의 하중-속도 선도를 나타낼 수 있다.

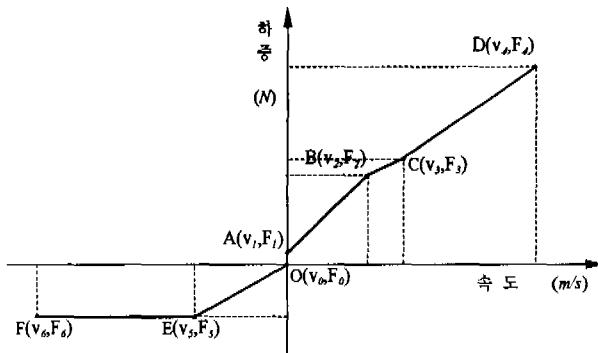


그림8 비선형 댐퍼의 하중-속도 선도

식(6)은 그림8에서 A-B구간과 B-C구간을 속도(\dot{z})에 대한 1차 식으로 나타내고 있다.

$$\begin{aligned} A-B : F &= \frac{v_2 - \dot{z}}{v_2 - v_1} F_1 + \frac{\dot{z} - v_1}{v_2 - v_1} F_2 \quad (6) \\ B-C : F &= \frac{v_3 - \dot{z}}{v_3 - v_2} F_2 + \frac{\dot{z} - v_2}{v_3 - v_2} F_3 \end{aligned}$$

그림4의 전차량 모델에서 동력객차 1차 현가장치에 사용하는 고무 스프링은 스프링의 압축과 인장시 고무의 성질에 의해 히스테리시스가 나타난다. 고무 스프링의 설계변수화는 압축, 인장의 곡선에 대해서 선형 구간 설계변수화 방법과 최소자승법에 의한 2차 곡선 설계변수화 방법, 그리고 라그랑지 보간법에 의한 3차 곡선 설계변수화 방법의 3가지를 검토하였다.

그림9는 스프링의 하중-변위 곡선을 임의의 3구간으로 구획하여 모두 6개의 선형 구간으로 나타낸다. 선형 구간화 방법에 사용되는 설계변수는 12개이다. 식(7)은 그림9에서 6개의 선형 방정식 중 A-B구간과 B-C구간의 식을 나타내고 있다.

$$\begin{aligned} A-B : F &= \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} F_1 + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} F_2 \quad (7) \\ B-C : F &= \frac{z_3 - z}{z_3 - z_2} F_2 + \frac{z - z_2}{z_3 - z_2} F_3 \end{aligned}$$

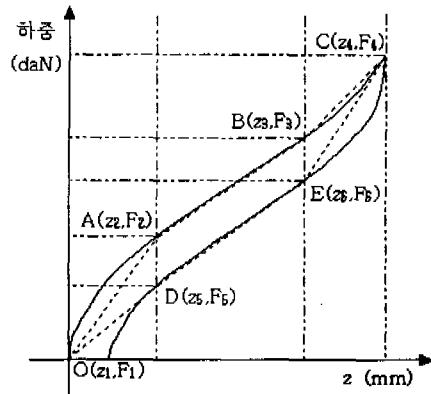


그림9 선형 구간 설계변수화

그림10은 스프링의 하중-변위 곡선을 O-A-B의 압축부분과 O-C-B의 인장부분의 2개 곡선부로 나누고 최소자승법에 의해 2차 곡선으로 나타낸 그림이다. 2차 곡선화 방법에 사용되는 설계변수는 8개이다. 식(8)은 그림10에서 O-A-B구간과 O-C-B구간의 식을 나타내고 있다.

$$\begin{aligned} O-A-B : F &= -0.0919452z^2 + 32.39533z \quad (8) \\ O-C-B : F &= -0.0402516z^2 + 28.35723z \end{aligned}$$

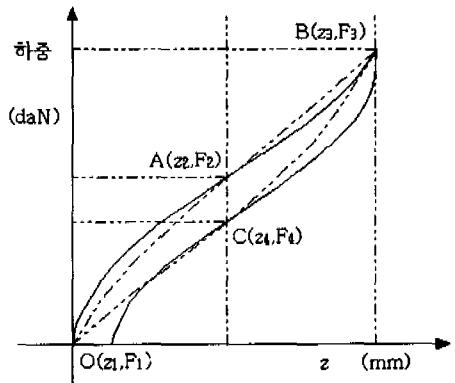


그림10 2차 곡선 설계변수화

그림11은 스프링의 하중-변위 곡선을 O-A-B-C의 압축부분과 O-D-E-C의 인장부분의 2개 곡선부로 나누고 라그랑지 보간법을 이용하여 3차 곡선으로 나타낸 그림이다. 3차 곡선화 방법에 사용되는 설계변수는 12개이다. 식(9)은 그림11에서 O-A-B-C구간의 3차 식을 나타내고 있다.

$$F_s = \frac{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} f_1 + \frac{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} f_2 + \frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)} f_3 + \frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}{(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)} f_4 \quad (9)$$

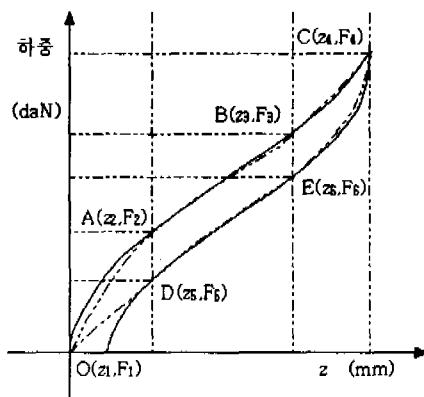


그림11 3차 곡선 설계변수화

그림12는 위에서 언급한 세가지 설계변수화 방법에 대해서 실제 하중-변위 곡선과 인장, 압축에 대한 하중-변위 곡선의 오차를 나타낸 그림으로 3차 곡선 설계변수화 방법이 변위에 따른 하중의 오차가 다른 두 방법에 비해 적다. 그 결과로 고무 스프링의 설계변수화 방법은 표2와 같이 라그랑지 보간법에 의한 3차 곡선 변수화 방법을 이용하기로 한다.

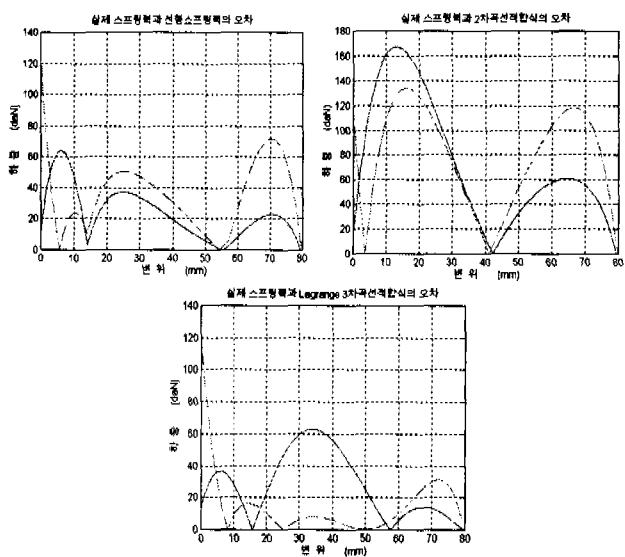


그림12 설계변수화 방법의 오차 비교

표2 하중-변위 곡선의 결점을 위한 비교

Order	변수 개수	곡선 개수	오차	비고
1 차	12	6	中	
2 차	8	2	大	
3 차	12	2	小	적용

4. 민감도 해석

민감도 해석의 방법으로는 직접미분법, 변수부가법, 수치미분법이 있다. 직접미분법은 일반적으로 적용이 쉬우나, 설계변수 만큼의 민감도 방정식이 필요하므로 많은 수의 민감도 방정식이 필요하다. 한편 변수부가법은 성능지수에 따라 민감도 방정식이 달라지므로 일반화가 어렵고, 전방향과 후방향의 적분에 의해 적분구간의 증가를 가져오나 설계변수의 개수에 무관하다. 수치미분법은 설계변수의 변경에 의한 재해석이 수행되어야 하고 계산상 부정확한 단점이 있다. 이 수치미분법은 민감도 해석의 검증을 위해 보조적 수단으로 사용된다.[5]

비선형 현가요소를 가진 차량의 운동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[M]\ddot{q} + F_d + F_s = F(t) \quad (10)$$

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

여기서, F_d 와 F_s 는 비선형 댐핑력과 비선형 스프링력을 나타낸다. 식(10)의 방정식을 임의의 설계변수에 대해 직접미분 하게 되면

$$[M]\ddot{q}_b + \frac{dF_d}{db} + \frac{dF_s}{db} = -[M]_b \ddot{q} \quad (11)$$

$$q_b(0) = 0, \quad \dot{q}_b(0) = 0$$

이며 초기값은 설계변수에 무관하므로 초기값의 설계변수 민감도는 0이 된다. 여기서, 식(11)의 $\frac{dF_d}{db}$ 와

$\frac{dF_s}{db}$ 는 많은 설계변수에 대해 모두 구하기 어려우므로 기호 계산법을 이용하여 민감도 방정식을 구하였다.[6] 그림13은 기호계산법을 이용하여 식(9)의 비선형 스프링력 F_s 를 설계변수 z_1 에 대해 미분을 수행하여 얻어진 민감도 방정식을 나타내고 있다.

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_1(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)^2} - \frac{f_1(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)^2(z_1-z_4)} = \\
 & \frac{f_1(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}{(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + \frac{f_2(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)}{(-z_1+z_2)^2(z_2-z_3)(z_2-z_4)} \\
 & \frac{f_2(z-z_3)(z-z_4)}{(-z_1+z_2)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} + \frac{f_3(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)}{(-z_1+z_3)^2(-z_2+z_3)(z_3-z_4)} \\
 & \frac{f_3(z-z_2)(z-z_4)}{(-z_1+z_3)(-z_2+z_3)(z_3-z_4)} + \frac{f_4(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}{(-z_1+z_4)^2(-z_2+z_4)(-z_3+z_4)} \\
 & \frac{f_4(z-z_2)(z-z_3)}{(-z_1+z_4)(-z_2+z_4)(-z_3+z_4)}
 \end{aligned}$$

그림13 기호계산법에 의한 민감도 방정식

그림4의 전차량 모델에 대하여 민감도 해석을 수행하였다. 동력객차의 1차 현가장치의 고무 스프링을 비선형으로 모델링하고, 동력객차와 일반객차의 1차 현가장치의 수직오일댐퍼를 비선형 댐퍼로 모델링하였다. 설계변수로는 라그랑지 보간법에 의한 비선형 스프링의 설계변수와 동력객차와 일반객차의 비선형 댐퍼의 설계변수를 사용하였다. 직접미분법에 의한 민감도 해석의 검증을 위해 수직미분법을 사용하였고 설계변수 변화량 Δb 는 0.1%, 0.5%, 1.0%이다.

그림14와 그림15는 그림11에서 나타난 비선형 스프링의 설계변수에 z_2 대한 동력대차와 동력객차의 가속도 민감도를 나타낸 그림으로 설계변수 변화량 Δb 가 감소함에 따라서 해석적 방법에 의한 민감도 결과에 수렴해 가는 것을 알 수 있다.

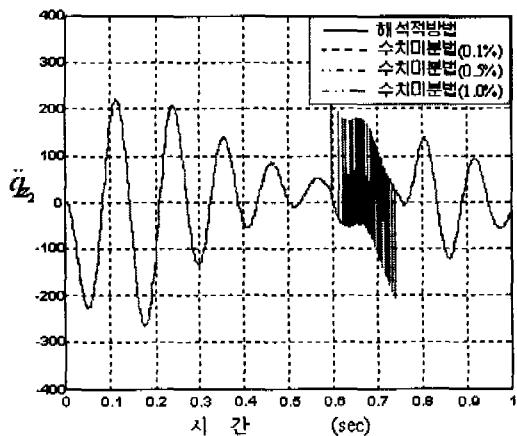


그림14 동력대차의 가속도 민감도

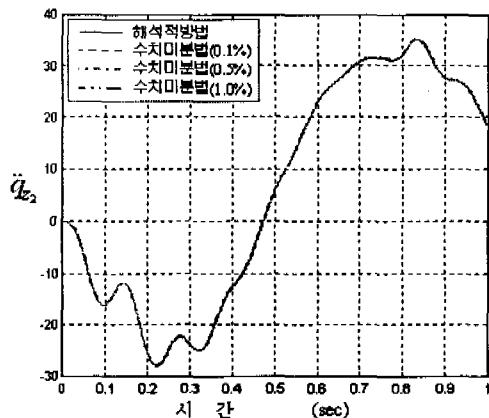


그림15 동력객차의 가속도 민감도

그림16과 그림17은 그림8에서 나타난 비선형 댐퍼의 설계변수에 v_3 대한 동력대차와 동력객차의 변위 민감도를 나타낸 수직미분법의 결과가 해석적 방법의 민감도 결과에 수렴해 가는 것을 알 수 있다.

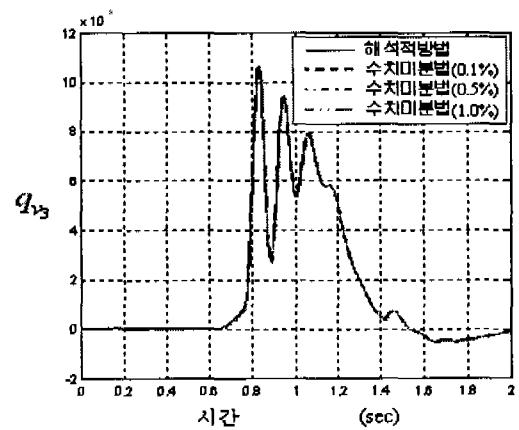


그림16 동력대차의 변위 민감도

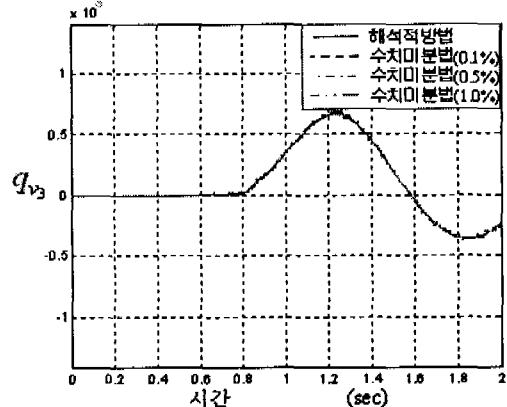


그림17 동력객차의 변위 민감도

식(10)과 식(11)을 이용하여 비선형 현가요소를 가진 승차감 모델의 민감도 해석을 수행하였다. 승차감을 알아보기 위해 임의노면에서 승차감 성능지수(I)를 식(12)와 같이 나타낼 수 있고, 그에 따른 승차 민감도(I_b)는 성능지수를 임의의 설계변수에 대해 미분하여 식(13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{q}^2 dt \quad (12)$$

$$I_b = \frac{1}{T} \int_0^T 2\dot{q}\dot{q}_b dt \quad (13)$$

승차 민감도를 검증하기 위해서 식(14)와 같이 수치미분법에 의하여 계산된 민감도와 직접미분법에 의하여 계산된 민감도를 백분율(%)로 정의하였다.

$$\frac{\frac{I(b + \delta b) - I(b)}{\delta b}}{\frac{dI}{db}} \times 100 \quad (14)$$

표3은 동력객차용 대차의 고무스프링의 설계변수에 대하여 승차 민감도를 나타낸 것이고 표4는 동력객차용 대차의 수직오일램퍼의 설계변수에 대하여 승차 민감도를 나타낸 것이다.

표3 비선형 스프링 설계변수의 승차 민감도

설계변수	민감도	0.1% 민감도	0.5% 민감도	1.0% 민감도
z_1	-7.665e+02	100.74	100.71	100.84
z_2	1.400e+03	99.76	99.76	76.80
z_3	-3.778e+02	99.64	65.79	60.00
z_4	-1.715e+02	99.02	96.55	87.20
F_1	1.678e-04	-2978.8	-3574.6	-3574.6
F_2	-6.877e-04	-768.45	-76.09	127.22
F_3	4.143e-03	158.26	115.44	113.03
F_4	-1.226e-04	99.86	98.64	274.69

표4 비선형 댐퍼 설계변수의 승차 민감도

설계변수	민감도	0.1% 민감도	0.5% 민감도	1.0% 민감도
v_1	-8.025e-01	99.99	99.99	99.99
v_2	-5.590e+00	100.03	99.99	100.12
v_3	-7.035e+00	100.52	100.57	100.37
v_4	-5.472e+00	100.60	-251.68	-73.40
v_5	2.714e+00	99.46	-966.87	-431.74
F_1	7.624e-05	100.01	100.09	100.18
F_2	6.096e-04	100.04	100.17	100.31
F_3	7.741e-04	100.03	100.11	100.24
F_4	5.671e-04	100.03	194.20	199.03
F_5	-1.250e-03	100.01	100.06	174.69

민감도 해석에 의해 설계변수의 승차 민감도를 구한 후, 설계변수의 변화에 따른 승차감을 비교하여 보았다. 그림18은 임의 노면 상태에서 비선형 스프링의 설계변수 z_2 를 5% 증가 시켰을 때 승차감을 비교한 그림이고, 그림19는 비선형 댐퍼의 설계변수 v_3 를 5% 증가 시켰을 때 승차감을 비교한 그림을 나타낸 것이다.

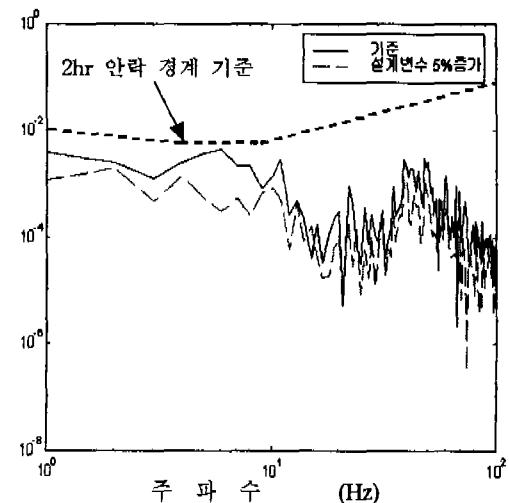


그림18 비선형 스프링 설계변수의 증가시 승차감 비교

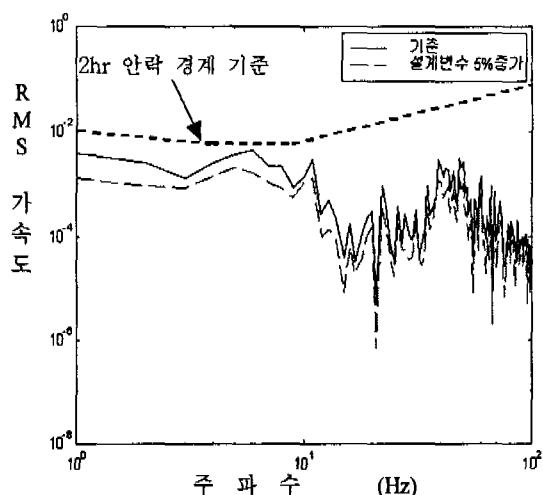


그림 19 비선형 댐퍼 설계변수의 증가시 승차감 비교

- [6]. Thomas B. "Bahder, *Mathematica for Scientists and Engineers*", Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

5. 결 론

임의 노면 상태에서 승차감 해석을 위하여 PSD를 이용하여 철로의 노면을 생성하고 ISO기준에 의거하여 승차감을 해석하였다.

현가요소의 비선형 특성에 대해 여러 가지 방법의 설계변수화를 수행하였다. 설계변수화가 이루어진 비선형 현가요소들에 대해 직접미분법에 의한 민감도 해석을 수행하였고 수치미분법에 의해 민감도를 검증하였다.

민감도 해석을 수행하여 비선형 현가요소인 댐퍼와 스프링에 대한 승차 민감도를 구하여 승차감에 민감한 설계변수를 구한 후, 설계변수의 변경에 따라 승차감에 미치는 영향을 평가하였다.

참고 문헌

- [1] "G7 고속전철기술개발 동력학적 설계 및 해석기술개발 1차년도 보고서", KIST, 아주대학교, 1997.
- [2] William T. Thomson, "Theory of Vibration with application", Prentice Hall International Inc, 1993.
- [3] 김광석, 유완석, "전력밀도함수를 이용한 노면형상 생성에 관한 연구", 한국자동차공학회논문집, 제5권, 제1호, pp.136~145, 1997.
- [4] Dukkipati, Amyot, "Computer-aided Simulation in Railway Dynamics", MARCEL DEKKER Inc., 1988.
- [5] "Matlab Reference Guide", The Mathworks Inc. 1992.