

**AN INTEGRAL EQUATION FOR KINKED CRACKS APPLIED TO
MODE III IN FINITE PLANE BODIES
(유한영역에서의 모드 III 꺾인균열 해석을 위한 적분방정식
적용연구)**

Ukhwan Sur

School of Mechanical Engineering, Halla Institute of Technology

Abstract

An integral equation representation of cracks was presented, which differs from well-known "dislocation layer" representation. In this new representation, an integral equation representation of cracks was developed and coupled to the direct boundary-element method for treatment of cracks in plane finite bodies. The method was developed for in-plane(modes I and II) loadings only. In this paper, the method is formulated and applied to mode III problems involving smooth or kinked cracks in finite region. The results are compared to exact solutions where available and the method is shown to be very accurate despite of its simplicity.

Key words: Stress Intensity Factor(응력세기계수), Kinked Crack(꺾인균열), Boundary Integral Equation(경계적분방정식), Finite Region(유한영역)

1. 서론

최근에 유한영역에서의 균열문제의 해결을 위하여 잘 알려진 경계적분방정식과 연합할 균열의 적분방정식 개발에 관심이 고조되고 있다[2]. 참고문헌 [3, 4]에서는 균열적분방정식이 균열표면 Traction의 향으로 되어있는데 이 표현에서 미지수는 균열선에 따른 Dislocation Density들이다. 그러나 이 표현방정식이 Curved 균열 문제해결에는 효과적이나 꺾임(Kink)을 포함하고 있는 경우는 적합하지 못하였다. 또 참고문헌[5, 6]에서는 균열적분방정식의 표현이 균열선을 따른 Resultant Force들의 향으로 표현되었는데 이 표현방식은 꺾인 균열문제를 해결할 수 있으나 아직도 미지수는 Dislocation Density들이다. 이 Density들이 Crack Tip에서의 Singular와 꺾인 부분에서 Weakly-Singular를

내재하고 있어 복잡하고 지루한 수치해석이 요구된다.

참고문헌[1]에서 이미 개발된 균열적분방정식 표현은 미지수로서 균열선을 따라 Displacement Discontinuity들을 포함한다. 이 값들이 Crack Tip에서 영(0)이고 꺾임에서 연속이기 때문에 이 표현방식의 수치해석은 경계적분방정식 취급보다 복잡하지 않다. 이 논문에서는 참고문헌[1]에서 개발된 균열적분방정식이 직접 경계적분방정식 방법과 연합하여 유한영역의 꺾임을 포함하는 모드 III 균열문제의 해결에 응용되었다. 사용된 수치해석모델은 아주 간단하며 결과값도 아주 정확하였다.

2. 이론전개(Theoretical Development)

한 점 x 에서의 응력을 알고자하는 무한의 등방(isotropic)의 탄성영역을 고려하자. 각각의 점들에서 Fig.1 에서와 같이 Unit Normal n 과 \bar{n} 를 갖는 내부 표면(surface)을 참조하고 영향함수들(influencefunctions),

$(uR)_{33}(x, \bar{x})$, $(uc)_{33}(x, \bar{x})$, $(\pi R)_{33}(x, \bar{x})$ 및 $(\pi c)_{33}(x, \bar{x})$ 를 채용하자. 그리고 응력함수라 정의되는 π 는 다음과 같이 놓는다.

$$\sigma_{13} = \partial \frac{\pi_3}{\partial x_2} \quad (1)$$

$$\sigma_{23} = \partial \frac{\pi_3}{\partial x_1} \quad (2)$$

Fig. 1에서와 같이 Γ_c 는 Crack을 나타낸다고 가정하면 양방향에 따라 변하는 표면을 갖는 Traction $t_3(s)$ 는

$$t_3 = -(\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2) = -\frac{d\pi_3}{ds} \quad (3)$$

Fig. 1에서와 같이 외부경계선 Γ_b 및 내부의 Piecewise Smooth Crack Line Γ_c 를 갖는 어떤 탄성구역 Ω 가 외부경계선의 일부분위에 Traction t_3 및 나머지 경계선 위에 변위(displacement) u_3 를 내재하고 있다고 가정하자. 그때 직접경계적분방정식(direct boundary integral equation) 및 참고문헌[1]에서 개발된 적분방정식이 다음과 같이 연합된다.

$$c_3(x)u_3(x) = \oint_{\Gamma_b} (uR)_{33}(x, \bar{x})t_3(\bar{x})ds(\bar{x}) - \oint_{\Gamma_b} (uc)_{33}(x, \bar{x})u_3(\bar{x})ds(\bar{x}) + \oint_{\Gamma_c} (uc)_{33}(x, \bar{x})\Delta u_3(\bar{x})ds(\bar{x}) \quad x \text{ on } \Gamma_b \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \pi_3(x) = & \oint_{\Gamma_b} (\pi R)_{33}(x, \bar{x}) t_3(\bar{x}) ds(\bar{x}) - \oint_{\Gamma_b} (\pi c)_{33}(x, \bar{x}) u_3(\bar{x}) ds(\bar{x}) \\ & + \oint_{\Gamma_c} (\pi c)_{33}(x, \bar{x}) \Delta u_3(\bar{x}) ds(\bar{x}) \quad x \text{ on } \Gamma_c \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $i=1,2$, $j=1,2$ 및 $\Delta u_3 = u_3^- - u_3^+$ 는 상대적인 균열면 변위를 나타낸다.

3. 수치해법(Numerical Treatment)

Fig. 2에서와 같이 외부의 경계선위에 M_b 개 및 균열위 M_c 개의 직선으로 나타내어진 식(4) 및 (5)의 수치해법이 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} c_3(x)u_3(x) = & \sum_{m=1}^{M_b} \int_m [(uR)_{33}(x, \bar{x}) t_3(\bar{x}) - (uc)_{33}(x, \bar{x}) u_3(\bar{x})] ds(\bar{x}) \\ & + \sum_{m=M_b+1}^{M_b+M_c} \int_m (uc)_{33}(x, \bar{x}) \Delta u_3(\bar{x}) ds(\bar{x}) \quad x \text{ on } \Gamma_b \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \pi_3(x) = & \sum_{m=1}^{M_b} \int_m [(\pi R)_{33}(x, \bar{x}) t_3(\bar{x}) - (\pi c)_{33}(x, \bar{x}) u_3(\bar{x})] ds(\bar{x}) \\ & + \sum_{m=M_b+1}^{M_b+M_c} \int_m (\pi c)_{33}(x, \bar{x}) \Delta u_3(\bar{x}) ds(\bar{x}) \quad x \text{ on } \Gamma_c \end{aligned} \quad (7)$$

각요소에서의 변위, Traction 및 Displacement Discontinuity가 선형적으로 다음과 같이 개략된다.

$$\begin{aligned} u_3(\bar{x}) &= N_1(\xi) u_3^{(m-1)} + N_2(\xi) u_3^{(m)} \quad \bar{x} \text{ on element } m \text{ of } \Gamma_b \\ t_3(\bar{x}) &= N_1(\xi) t_3^{(2m-1)} + N_2(\xi) t_3^{(2m)} \quad \bar{x} \text{ on element } m \text{ of } \Gamma_b \\ \Delta u_3(\bar{x}) &= N_1(\xi) \Delta u_3^{(m)} + N_2(\xi) \Delta u_3^{(m+1)} \quad \bar{x} \text{ on element } m \text{ of } \Gamma_c \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $u_3^{(m)}$, $t_3^{(2m)}$, $t_3^{(2m-1)}$ 은 외부경계선의 노드점(node point) m ($m=1, \dots, M_b$), $\Delta u_3^{(m)}$ 은 균열의 노드점 m ($m=M_b+2, \dots, M_b+M_c$) 의 값들이며

$$N_1(\xi) = (1 - \xi)/2, \quad N_2(\xi) = (1 + \xi)/2, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (9)$$

더 나아가

$$\bar{x} = \begin{cases} N_1(\xi)x^{(m-1)} + N_2(\xi)x^{(m)} & \bar{x} \text{ on element } m \text{ of } \Gamma_b \\ N_1(\xi)x^{(m)} + N_2(\xi)x^{(m+1)} & \bar{x} \text{ on element } m \text{ of } \Gamma_c \end{cases} \quad (10)$$

$$ds(\bar{x}) = \begin{cases} [(s_b^{(m)} - s_b^{(m-1)})/2]d\xi = [\Delta s_b^m/2]d\xi & \bar{x} \text{ on element } m \text{ of } \Gamma_b \\ [(s_c^{(m+1)} - s_c^{(m)})/2]d\xi = [\Delta s_c^m/2]d\xi & \bar{x} \text{ on element } m \text{ of } \Gamma_c \end{cases} \quad (11)$$

여기서 Δs_b^m 은 외부경계선의 요소 m 의 길이이며 Δs_c^m 은 균열선의 요소 m 의 길이이다. 식(8)로부터 식(11)까지를 식(6) 및 식(7)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c_3^{(n)}u_3^{(n)} = & \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_b/4 \left[\int_m (1-\xi)(uR)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] t_3^{(2m-1)} \\ & + \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_b/4 \left[\int_m (1+\xi)(uR)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] t_3^{(2m)} \\ & - \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_b/4 \left[\int_m (1-\xi)(uc)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] u_3^{(m-1)} \\ & - \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_b/4 \left[\int_m (1+\xi)(uc)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] u_3^{(2m-1)} \\ & + \sum_{m=M_b+2}^{M_b+M_c} \Delta s_c/4 \left[\int_m (1-\xi)(uc)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] \Delta u_3^{(m)} \\ & + \sum_{m=M_b+1}^{M_b+M_c-1} \Delta s_c/4 \left[\int_m (1+\xi)(uc)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] \Delta u_3^{(m+1)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \pi_3^{(n)} = & \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_b/4 \left[\int_m (1-\xi)(\pi R)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] t_3^{(2m-1)} \\ & + \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_b/4 \left[\int_m (1+\xi)(\pi R)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] t_3^{(2m)} \\ & - \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_b/4 \left[\int_m (1-\xi)(\pi c)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] u_3^{(m-1)} \\ & - \sum_{m=1}^{M_b} \Delta s_b/4 \left[\int_m (1+\xi)(\pi c)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] u_3^{(2m-1)} \\ & + \sum_{m=M_b+2}^{M_b+M_c} \Delta s_c/4 \left[\int_m (1-\xi)(\pi c)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] \Delta u_3^{(m)} \\ & + \sum_{m=M_b+1}^{M_b+M_c-1} \Delta s_c/4 \left[\int_m (1+\xi)(\pi c)_{33}(x^{(n)}, \xi)d\xi \right] \Delta u_3^{(m+1)} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $u_3^{(n)} = u_3(x^{(n)})$ 인데 $x^{(n)}$ 은 외부경계선 노드점 $n(n=1, M_b)$ 의 위치이다. $\pi_3^{(n)} = \pi_3(x^{(n)})$ 이며 $x^{(n)}$ 은 균열의 요소중간점 ($n=M_b+1, M_b+M_c$)의 위치이다. 식(12) 및 식(13)는 다음과 같이 Matrix Form으로 나타내어진다.

$$[UC_3]\{u\} - [Q_3]\{\Delta u\} = [UR_3]\{t\} \quad (14)$$

$$[PC_3]\{u\} - [X_3]\{\Delta u\} = [PR_3]\{t\} - \{\pi\} \quad (15)$$

여기서 $[UC_3]$ 는 $M_b \times M_b$, $[Q_3]$ 는 $M_b \times (M_c - 1)$, $[UR_3]$ 는 $M_b \times 2M_b$, $[PC_3]$ 는 $M_c \times M_b$ 및 $[X_3]$ 는 $M_c \times (M_b - 1)$, $[PR_3]$ 는 $M_c \times 2M_b$ 이다.

다시쓰면

$$\begin{bmatrix} [UC_3] & -[Q_3] \\ [\Gamma_3][PC_3] & -[\Gamma_3][X_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [UR_3] & [0] \\ [\Gamma_3][PR_3] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ T \end{Bmatrix} \quad (16)$$

여기서 참고문헌[1]에서와 같이 균열에서의 Nodal Force Matrix는 다음과 같이 정의한다.

$$\{T\} = [\Gamma_3]\{\pi\} \quad (17)$$

여기서

$$[\Gamma_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

잘 알려진 rigid-body 이론으로부터 대각선 요소를 얻을 수 있다. 만약 rigid-body 변위를 응용하면,

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)} = u_3^{(3)} = \dots = u_3(M_b) = u_3 \quad (19)$$

이고, body-free를 고려하면

$$\{t\} = \{0\} \{\Delta u\} = \{0\}$$

그러므로 식(16)은 다음과 같이 된다.

$$[UC_3] \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_3 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (20)$$

결론적으로

$$UC^{(ii)} = - \sum_{j=0}^{M_b} UC^{(ij)} \quad (21)$$

식(16)은 재배치할 때 경계값을 포함하는 Γ_b 위에 각각의 노드점 m 에 두가지 조건이 나타난다.

즉

$$u_3^{(m)}, t_3^{(2m)}, t_3^{(2m+1)}$$

식(16)을 재배열하면 다음식을 얻는다.

$$[A]\{Z\} = \{F\} \quad (22)$$

여기서 $[Z]$ 는 Γ_b 에서의 미지의 경계값 및 미지의 Matrix $\{\Delta u\}$ 를 포함한다. 무차원 응력세기계수는 다음의 식으로부터 얻어진다.

$$K_{ll} |_{s=0} = \sqrt{\frac{\pi}{8\varepsilon}} G \Delta u_3(\varepsilon) \quad (23)$$

$$K_{ll} |_{s=l} = \sqrt{\frac{\pi}{8\varepsilon}} G \Delta u_3(l - \varepsilon) \quad (24)$$

여기서 $\varepsilon \rightarrow 0$ 이며 G 및 l 은 전단계수(Shear Modulus) 및 균열의 길이를 나타낸다. Traction Force를 갖는 균열 즉 $\{T\} = \{0\}$ 를 고려하면 식(16)은 최종 다음식이 된다.

$$\begin{bmatrix} [UC_3] & -[Q_3] \\ [F_3][PC_3] & -[F_3][X_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [UR_3] & [0] \\ [F_3][PR_3] & [I] \end{bmatrix} \{t\} \quad (25)$$

4. 결과

어떤 유한영역에서의 균열문제해결을 위하여 여기서 개발된 모델을 사용하여 다음과 같은 예제를 검토하였다.

4.1 직선균열(Straight Crack)

여기서 취급된 모든 직선균열문제에 대하여 균열 20 요소 및 외부경계선은 40 요소로 모델되었다. $\sigma\sqrt{a}$ 에 관하여 Normalized 된 응력세기계수가 계산되었다.

(a) 직선중앙균열(Straight central crack in a rectangular sheet subjected to antiplane shear stress)

높이 $2h$ 및 넓이 $2b$ 를 갖는 직사각형의 판에 균열의 길이가 $2a$ 인 Central Straight Crack을 갖으며 Fig. 3과 같이 분포일방전단응력(uniform shear stress)인 균열면에 직각으로 판의 끝면에 작용한다. Table 1은 응력세기계수를 a/b 및 a/h 의 여러 가지 비율에 대하여 참고 문헌[8]과 비교하였다.

(b) 직선중앙loaded균열(Straight central crack in a rectangular sheet subjected to antiplane shear stress on the crack)

높이 $2h$ 및 넓이 $2b$ 를 갖는 직사각형의 판에 균열의 길이가 $2a$ 인 균열을 갖으며 antiplane전단응력(antiplane shear stress)이 면의 끝에서 작용한다. Figs 4-6은 균열의 방향에 각을 갖는 경우를 보여준다. 이 경우의 응력세기계수는 여러 가지 a/b 비율 및 a/h 의 경우들에 대하여 Tables 2-4에서 참고 문헌 [9]와 비교하였다.

4.2 꺾인균열(Kinked Crack)

꺾인균열 문제에서는 $\sigma\sqrt{\pi a}$ 에 대하여 Normalization 되었으며 $G/\sigma=200$ 값을 적용하여 응력세기계수와 상대 균열면 변위를 계산하였다.

(a) V모형균열(Symmetric V-shaped crack in a rectangular sheet subjected to antiplane shear stress)

이 문제는 Fig. 7과 같이 분포antiplane 전단응력(uniform antiplane shear

stress)이 작용하는 정방형판(square plate)에서의 Symmetric Shaped Crack 을 보여준다. 균열은 40요소로 되어 있으며 외부경계선은 44요소가 되게 모델되었다. 이 문제에 대하여 응력세기계수는 여러 가지 경사각 α 에 대하여 Table 5에 표기되었다.

(b) Z 모양균열(Antisymmetric kinked crack in a rectangular sheet subjected to antiplane shear stress)

이 예는 Fig. 8과 같이 분포antiplane 전단응력(uniform antiplane shear stress)이 작용하는 정방형판(square plate)에서의 Antisymmetric Shaped Crack을 보여준다. 균열은 35요소로 되어 있으며 외부경계선은 44요소가 되게 모델되었다. 이 문제에 대하여 응력세기계수는 Table 7에 표기되었다.

5. 결론

참고문헌[1] 등에서 개발된 균열을 위한 적분방정식이 잘 알려진 경계요소법(boundary element method)과 연합되어 유한영역에서의 꺾인균열을 갖는 문제를 이 연합기술(coupled technique)을 이용하여 모드 I 및 II에 대하여 해결되었다. 이 논문에서는 참고문헌[1]에서 개발된 균열적분방정식이 직접 경계적분방정식 방법과 연합하여 유한영역의 꺾임을 포함하는 모드 III 균열문제의 해결에 응용되었다. 사용된 수치해석모델은 직선균열 문제 및 특히 꺾인균열 문제에 적용되어 아주 간단하며 결과값도 아주 정확하였다.

참고문헌

- [1] U. Sur and N. J. Altiero, An alternative integral equation approach for curved and kined cracks, Int. J. Fracture 38, 24-41 (1988)
- [2] N. Liu and N. J. Altiero and U. Sur, An alternative integral equation approach applied to kinked cracks in finite plane bodies, Comput. Meth. Appl. Mehc. Engng 84, 211-226 (1990)
- [3] C.F. Sheng, Journal of Applied Mechanics 54, 105-109, 1987
- [4] W.L. Zang and P. Gudmundson, Int. J. Fracture 38, 275-294, 1988
- [5] Y.K. Chueng and Y.Z. Chen, Engineering Fracture Mechanics 7, 177-185, 1987

- [6] W.L. Zang and P. Gudmundson, *Advances in Fracture Research Vol. 3*, ed. by K. Salama, et al., Pergamon Press, 2134-2134, 1989
- [7] N. Liu and N. J. Altiero, Multiple cracks and branch cracks in finite plane bodies, *Mech. Res. Commun.* 18, 233-244 (1991)
- [8] S. W. Ma, A central crack in a rectangular sheet where its boundary is subjected to an arbitrary antiplane load, *Engng Fracture Mech.* 30, 435-443 (1988)
- [9] S.W. Ma, A central crack of mode III in a rectangular sheet with fixed edges, *Int. J. Fracture* 39, 323-329 (1989)

Table 1. Stress intensity factors for a straight central crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 3

a:b	1:1.2		1:1.4		1:1.6		1:2.0		1:∞	
a:h	Present	Ref.[8]	Present	Ref.[8]	Present	Ref.[8]	Present	Ref.[8]	Present	Ref.[8]
1:0.25	1.897	1.900	1.780	1.782	1.771	1.773	1.770	1.772	1.770	1.772
1:0.5	1.723	1.725	1.460	1.463	1.399	1.401	1.377	1.379	1.375	1.377
1:1	1.689	1.691	1.369	1.370	1.254	1.256	1.176	1.178	1.147	1.149
1:2	1.686	1.689	1.359	1.361	1.233	1.235	1.127	1.130	1.046	1.047
1:4	1.686	1.689	1.358	1.360	1.233	1.235	1.126	1.128	1.012	1.013
1:∞	1.687	1.689	1.358	1.360	1.234	1.235	1.127	1.128	1.000	1.000

Table 2. Stress intensity factors for a straight central crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 4

a:b	1:1.2		1:1.4		1:1.6		1:2.0		1:∞	
a:h	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]
1:0.25	0.398	0.400	0.397	0.399	0.397	0.399	0.397	0.399	0.397	0.399
1:0.5	0.573	0.575	0.560	0.564	0.560	0.563	0.561	0.563	0.561	0.563
1:1	0.830	0.833	0.778	0.780	0.767	0.769	0.762	0.764	0.762	0.764
1:2	1.111	1.114	0.989	0.991	0.948	0.950	0.920	0.923	0.912	0.914
1:4	1.339	1.342	1.145	1.147	1.072	1.074	1.014	1.016	0.974	0.975
1:∞	1.687	1.689	1.358	1.369	1.234	1.235	1.127	1.128	1.000	1.000

Table 3. Stress intensity factors for a straight central crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 5

a:b	1:1.2		1:1.4		1:1.6		1:2.0		1:∞	
a:h	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]
1:0.25	1.650	1.653	1.759	1.760	1.769	1.771	1.770	1.772	1.770	1.772
1:0.5	1.177	1.180	1.295	1.298	1.351	1.354	1.373	1.375	1.375	1.377
1:1	0.844	0.847	0.981	0.984	1.055	1.058	1.120	1.122	1.147	1.149
1:2	0.772	0.775	0.868	0.871	0.920	0.922	0.977	0.979	1.046	1.047
1:4	0.767	0.770	0.856	0.859	0.899	0.901	0.941	0.943	1.012	1.013
1:∞	0.768	0.770	0.857	0.859	0.900	0.901	0.942	0.942	1.000	1.000

Table 4. Stress intensity factors for a straight central crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 6

a:b	1:1.2		1:1.4		1:1.6		1:2.0		1:∞	
a:h	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]	Present	Ref.[9]
1:0.25	0.396	0.398	0.397	0.399	0.398	0.399	0.398	0.399	0.398	0.399
1:0.5	0.546	0.551	0.560	0.562	0.561	0.563	0.562	0.563	0.562	0.563
1:1	0.700	0.702	0.746	0.748	0.758	0.760	0.762	0.764	0.762	0.764
1:2	0.763	0.765	0.844	0.846	0.878	0.880	0.903	0.905	0.913	0.914
1:4	0.767	0.770	0.856	0.858	0.899	0.900	0.940	0.940	0.915	0.915
1:∞	0.768	0.770	0.857	0.859	0.900	0.901	0.942	0.942	1.000	1.000

Table 5. Stress intensity factors for a symmetric V-shaped crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 7

α	15	30	45	60	75
$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi a}$	2.0700	1.8743	1.5755	1.1965	0.7456

Table 6. Stress intensity factors for a antisymmetric kinked crack under a uniformly distributed shear stress as shown in Fig. 8

α	15	30	45	60	75
$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi a}$	4.5605	4.3281	3.9757	3.5427	3.0664

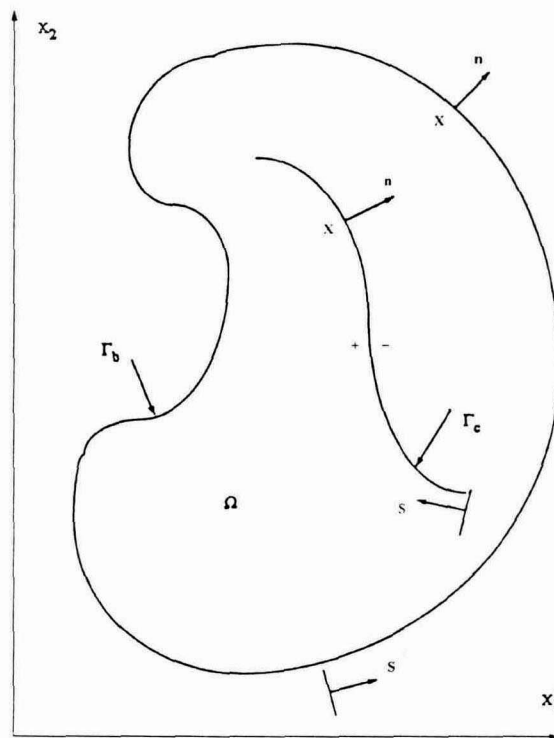


Fig. 1. Plane elastic region containing a crack.

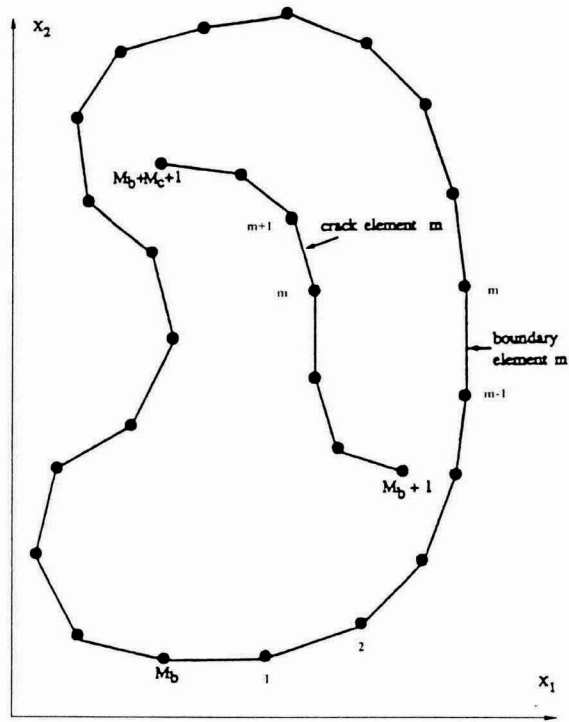


Fig.2. Discretized plane region containing a discretized crack.

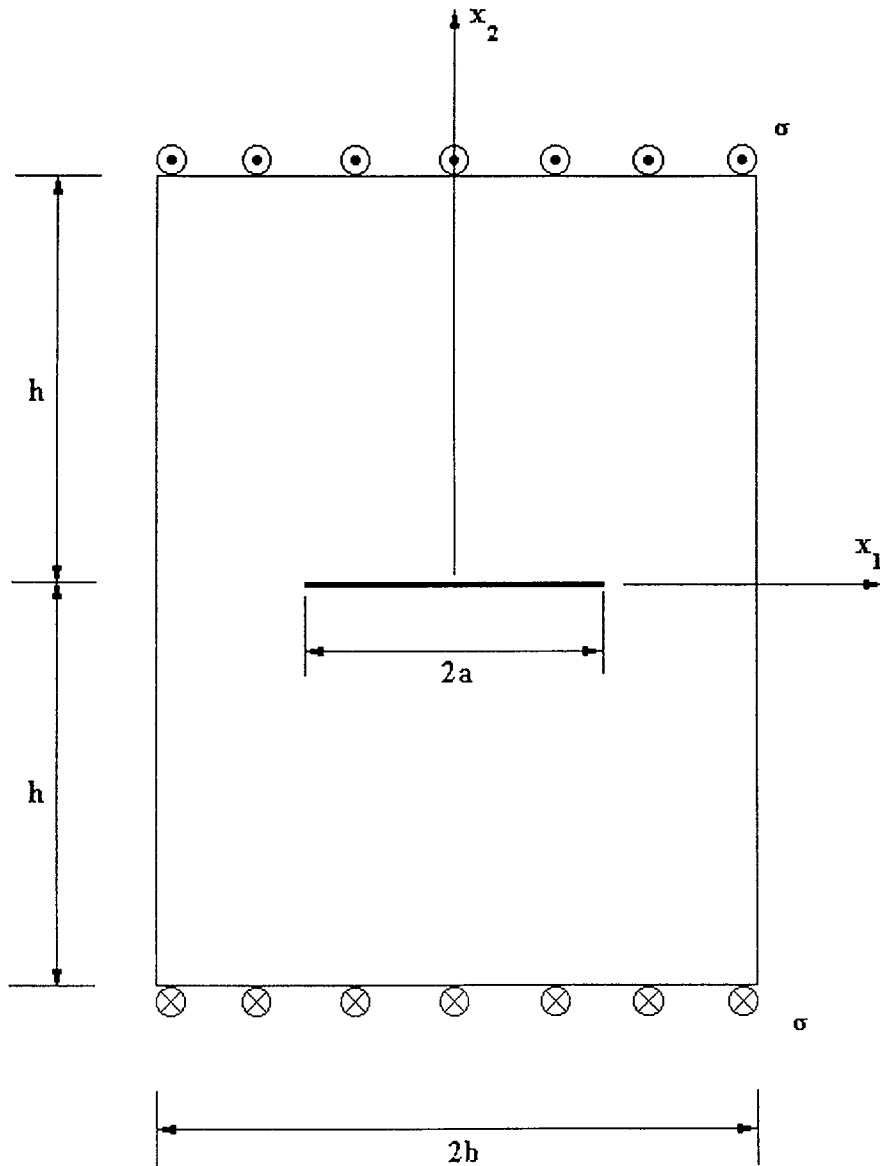


Fig. 3. Geometry and loading for a straight central crack in a finite sheet under a uniformly distributed shear stress.

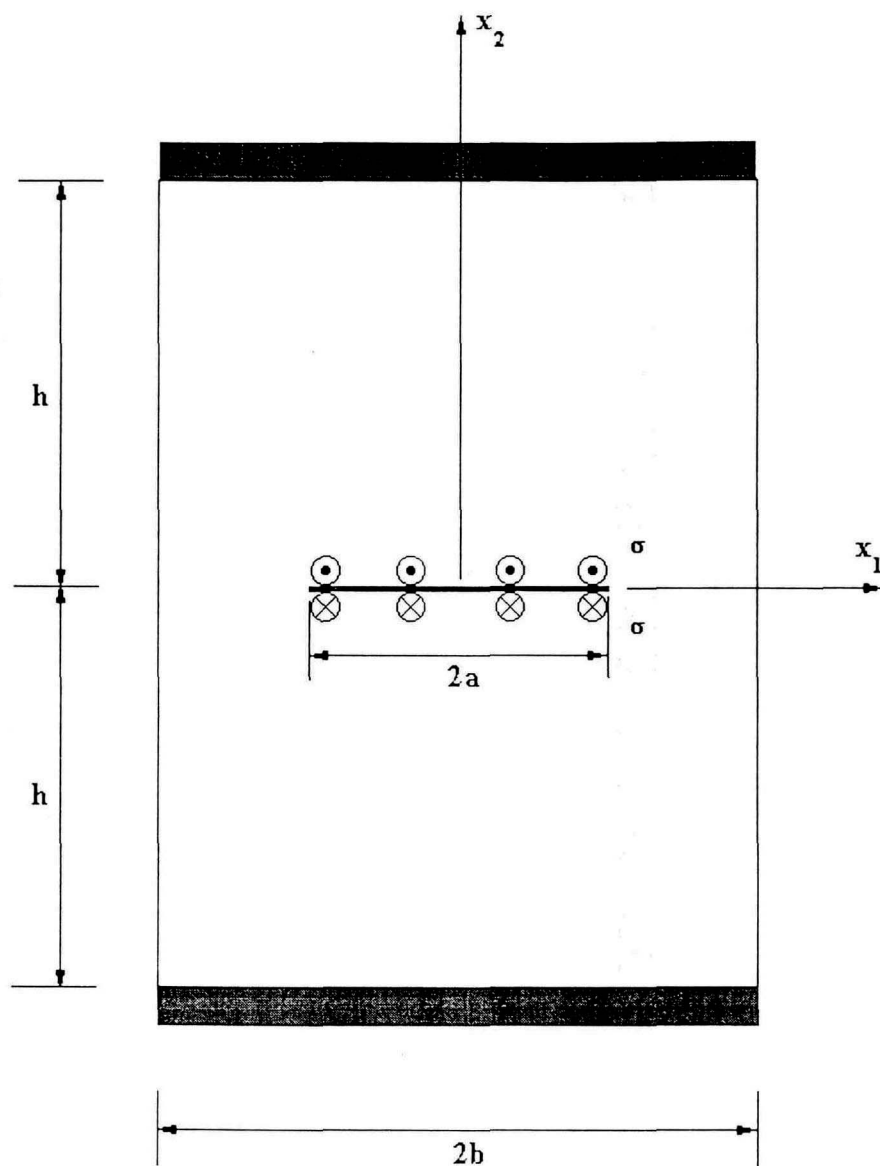


Fig. 4. Geometry and loading for a straight central crack in a finite sheet with edges parallel to the crack.

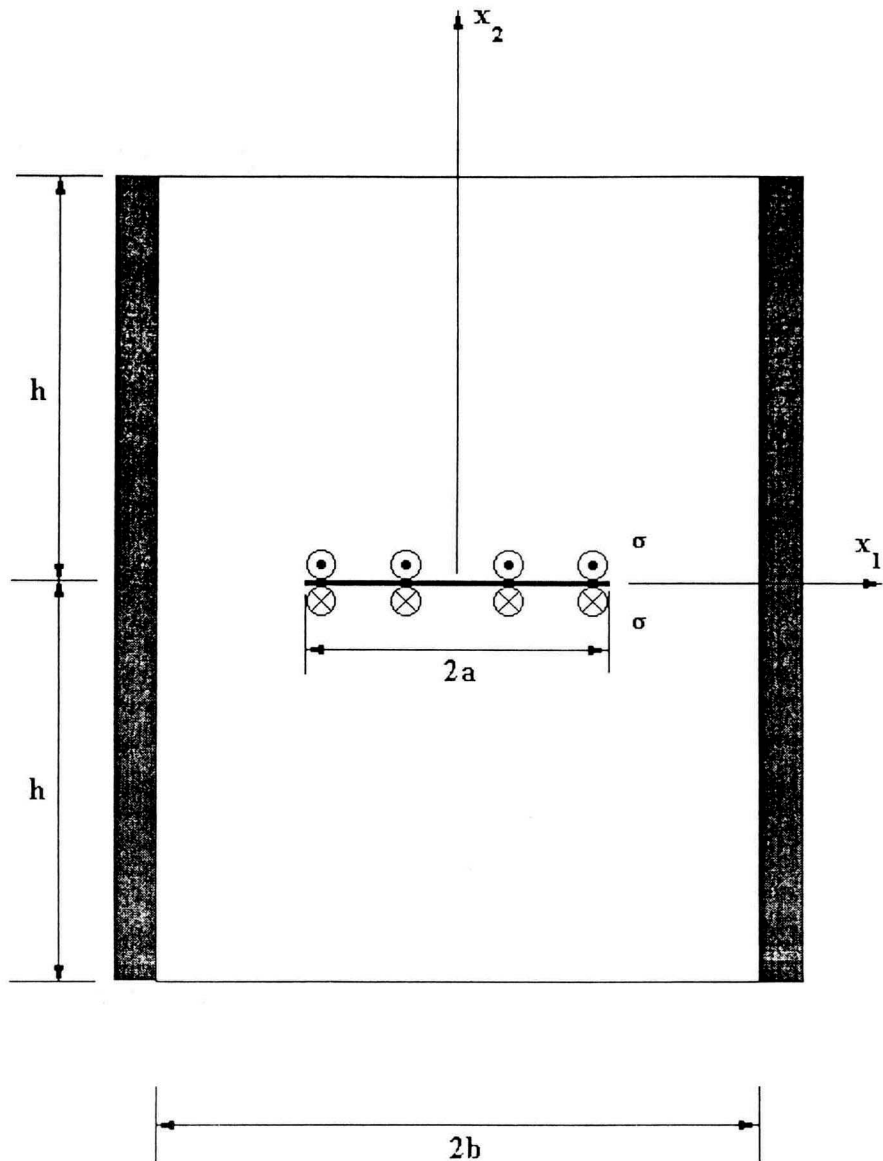


Fig. 5. Geometry and loading for a straight central crack in a finite sheet with fixed edges perpendicular to the crack.

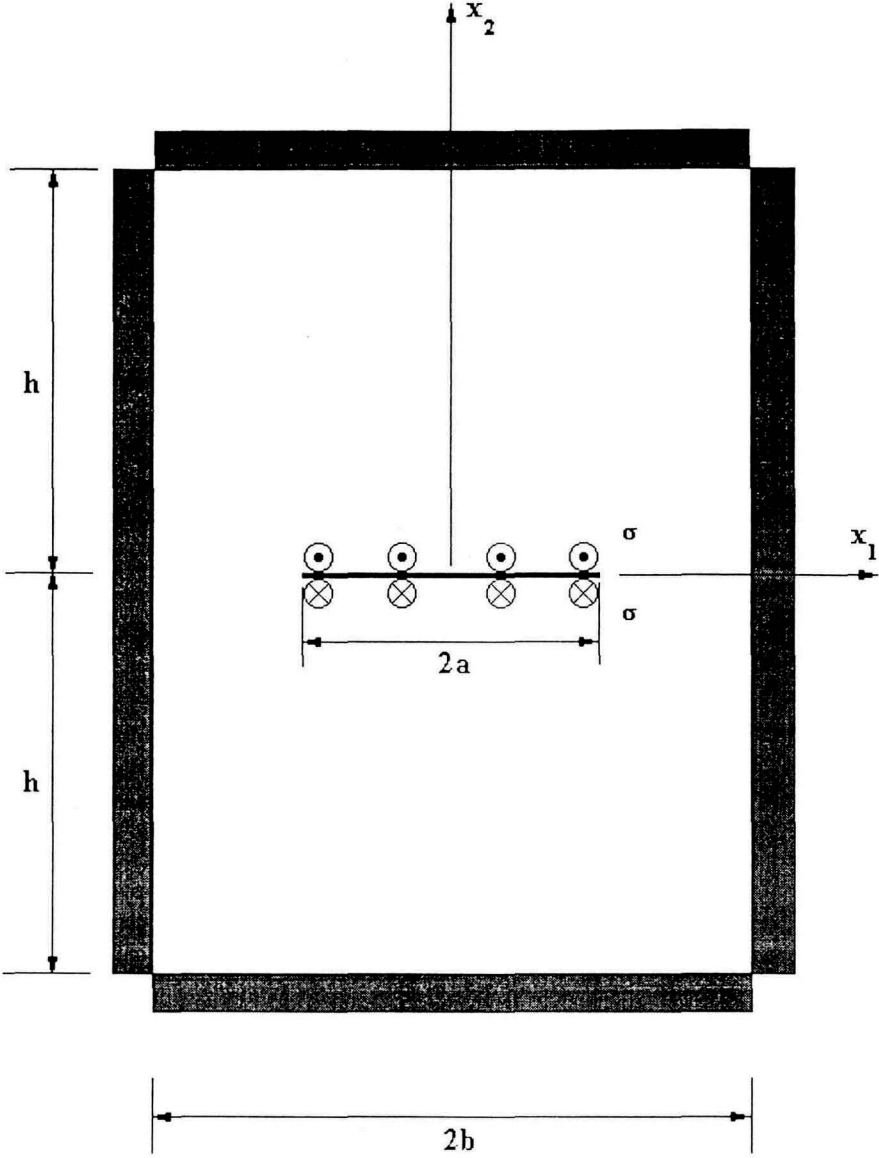


Fig. 6. Geometry and loading for a straight central crack in a finite sheet with four fixed edges.

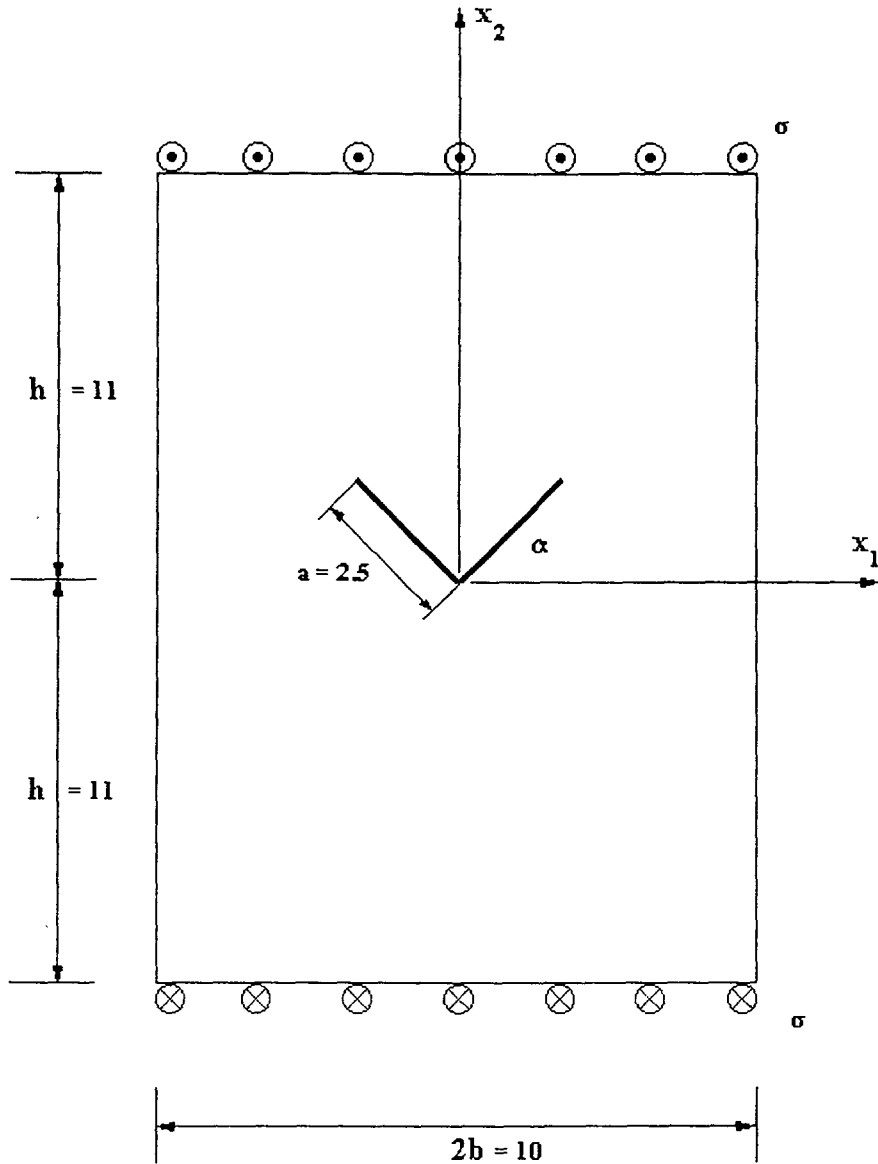


Fig. 7. Geometry and loading for a symmetric V-shaped crack in a finite sheet under a uniformly distributed shear force.

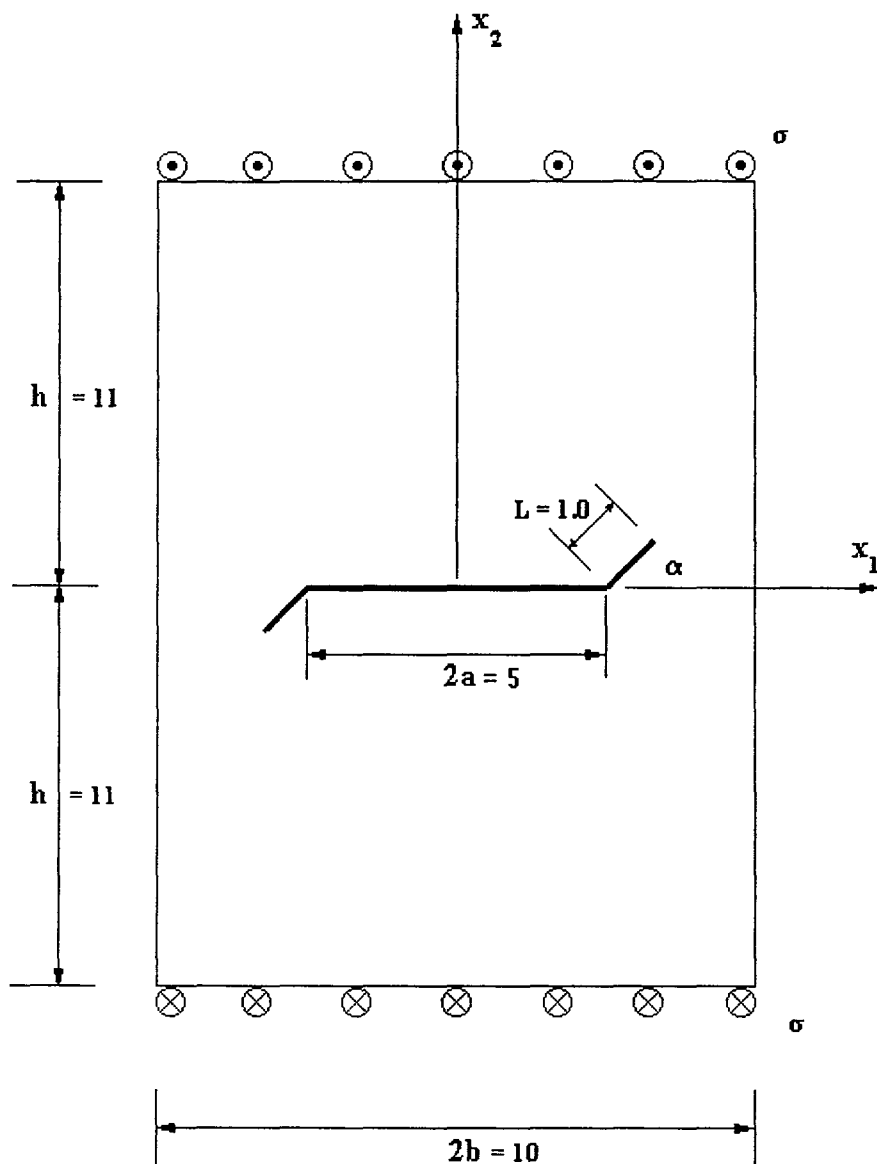


Fig. 8 . Geometry and loading for a straight central crack in a finite sheet under a uniformly distributed shear stress.