

Q-Q 플롯에 의한 Agreement의 통계적 분석

이재영¹ · 이성원 · 이재우²

요약

의학에서 새로운 치유방법으로 예전의 방법을 대신하여 교체 사용할 수 있는가 하는 물음에 대하여, 기존에는 상관계수(r)를 이용하여 결정하였으나 최근에는 Bland와 Altman식의 Agreement를 이용하여 결정한다. 본 논문에서는 이들이 표현되는 특성을 Q-Q플롯을 이용하여 살펴보고 이것을 Bland와 Altman식의 방법을 응용하여 그래프를 통한 Agreement에 대하여 분석을 하고자 한다.

Key Words and Phrases: Agreement

1. 도입

의학에서 새로운 치유방법을 도입하고자 할 때 먼저 예전의 방법과의 교체 사용할 수 있는가 하는 문제를 다루어야 한다. 하지만 이러한 경우 우리는 과연 두 방법이 어느 정도 일치하는지(Agreement)를 입증해야 한다. 즉, 의학 연구에서 같은 양을 측정하는 두 가지 방법에 대해 비교가 종종 필요할 때가 있다. 이러한 분석을 위하여 기존의 많은 의학연구들이 상관계수(r)를 사용하여 이 값이 높을 경우에 두 방법은 서로 일치(Agreement)한 다라는 결론을 내렸으나 이러한 방법이 여러 가지 문제점을 안고 있다는 사실을 Bland와 Altman(1986)이 지적하고 Agreement를 입증하기 위한 새로운 방법을 제시하였다. 우리는 2절에서 이 Bland와 Altman(1986)식의 Agreement접근법을 살펴보고 3절에서는 Q-Q플롯의 특성과 이를 이용한 Agreement의 방법을 소개하며 4절에서 변환된 Q-Q 플롯에 Bland와 Altman(1986) 식의 Agreement 기법을 이용하여 기존의 Agreement접근법과 비교해 보고자 한다.

Bland와 Altman식 Agreement의 기법

¹(712-749) 경상북도 경산시 대동 214-1 영남대학교 통계학과

²(712-749) 경상북도 경산시 대동 214-1 영남대학교 통계학과 대학원

Bland와 Altman식의 Agreement를 구성하기 위해서는 먼저 비교하고자 하는 두 방법들 간의 산 점도를 그린다. 이것이 $y = x$ 선상에 정확하게 나타난다면 이들 두 방법은 Agreement라는 결론을 내릴 수가 있다. 하지만 대부분의 실제 데이터들은 각 측정방법내의 고유한 오차를 가지고 있기 때문에 정확히 $y = x$ 선상에 나타나지는 않는다. 따라서 이것을 좀 더 시각적으로 명확하게 식별해 내기 위해서 두 방법간의 차와 평균으로 이루어진 플롯을 생각해 본다. 먼저 편의상 두 방법을 방법 1(M1), 방법 2(M2)라 하고 두 방법간의 차를 d 로 나타내고 차의 평균을 \bar{d} , 이들의 표준편차를 SD 로 나타내면, y 축에는 두 방법간의 차(d)를, x 축에는 한 subject의 두 방법간의 평균(mean)을 나타내는 좌표축을 그린다. 그 다음에 이들에 대한 산점도를 그리고 $\bar{d} \pm 2SD$ (엄밀히 말하면 $\bar{d} \pm 1.96SD$)를 구하여 일치한계(Limit of Agreement)를 구한다. 차를 구한 데이터들의 95%가 이 일치한계에 들어가 있다면 두 방법은 Agreement라고 결론을 내릴 수가 있다.

[표 1] PEFR measured with Wright peak flow and mini Wright peak flow meter (Bland & Antman, 1986)

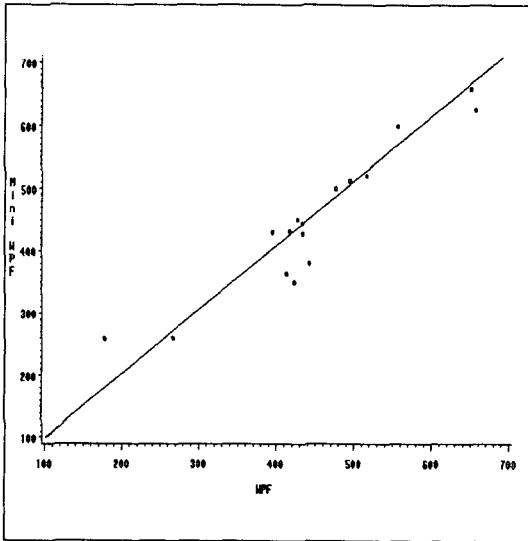
subject	Wright Peak Flow	Mini Wright Peak Flow meter
	PEFR(l/min)	PEFR(l/min)
1	494	512
2	395	430
3	516	520
4	434	428
5	476	500
6	557	600
7	413	364
8	442	380
9	650	658
10	433	445
11	417	432
12	656	626
13	267	260
14	478	477
15	178	259
16	423	350
17	427	451

[표 2] MF and SV in 21 patients without aortic valve disease (Zhang et al., 1986)

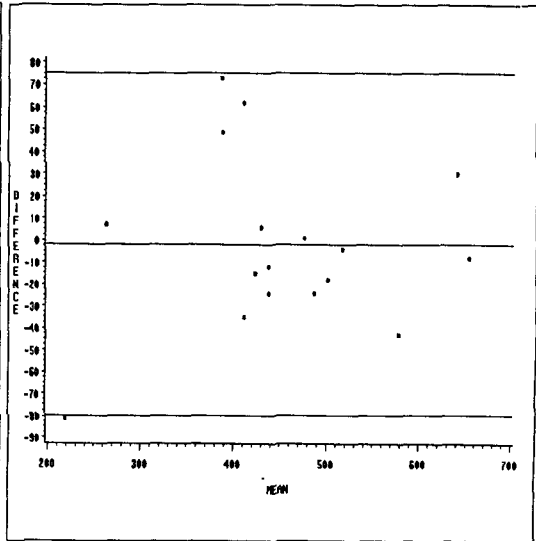
Patient	MF	SV
1	47	43
2	66	70
3	68	72
4	69	81
5	70	60
6	70	67
7	73	72
8	75	72
9	79	92
10	81	76
11	85	85
12	87	82
13	87	90
14	87	96
15	90	82
16	100	100
17	104	94
18	105	98
19	112	108
20	120	131
21	132	131

[표 1]은 Wright Peak Flow와 Mini Wright Peak Flow meter로 측정되어진 PEFR(Peak

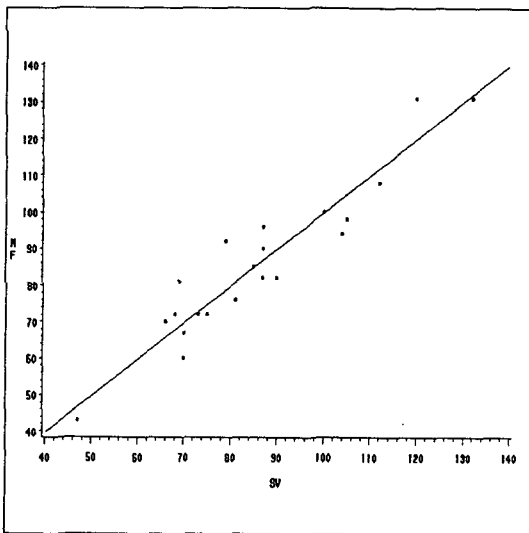
Expiratory Flow Rate)를 나타내는 데이터이다. Wright Peak Flow를 M1, Mini Wright Peak Flow meter를 M2라 하고 이들의 산점도를 그려보면 [그림 1]과 같다. [그림 1]의 산점도에서 두 방법이 거의 Agreement인 것으로 보여진다. 또한 이들의 상관계수의 값이 $r = 0.94(p < 0.01)$ 로 매우 강한 선형관계를 나타내고 있어 Agreement하다고 결론을 내릴 수가 있다. 하



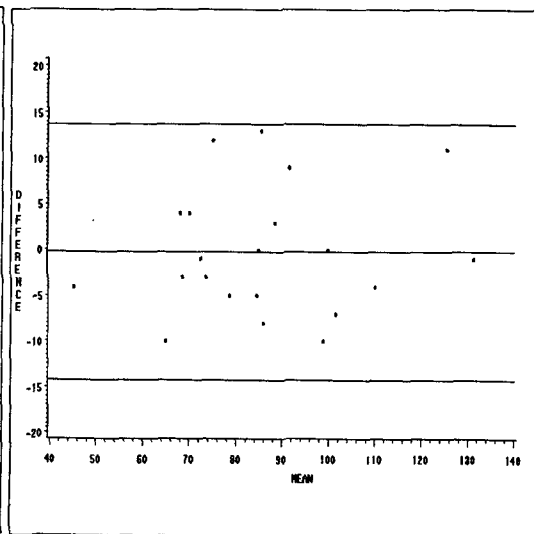
[그림 1] 표 1의 산점도



[그림 2] 그림 1의 Bland와 Altman 기법



[그림 3] 표 2의 산점도



[그림 4] 그림 3의 Bland와 Altman 기법

지만 Bland와 Altman(1986)에 의하면 이들 두 방법이 Agreement가 아닌 것으로 밝혀졌다(그림2). [표 2]는 대동맥의 질병이 없는 21명의 환자에서 Transmittal volumetric flow(MF)와 left ventricular stroke volume(SV)을 측정 한 데이터(Zhang *et al.*, 1986)로 역시 같은 방법을 적용하여 보면 이 두 방법은 Agreement인 것으로 밝혀졌다.

3. Q-Q 플롯을 통한 Agreement의 해석

확률표본 X_1, \dots, X_n 의 순서통계량을 $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ 이라 하고, 이 확률변수 X 의 누적분포함수(CDF)를 $F(x)$ 라고 하고, 이 누적분포함수의 역함수를 $F^{-1}(x)$ 라고 두게 되면, Q-Q 플롯은 (x, y) 좌표평면상에,

$$\left(\text{분포 } F \text{의 } \left(\frac{i}{n}\right) \text{ 분위수, 표본의 } \left(\frac{i}{n}\right) \text{ 분위수} \right)$$

를 나타내는 그래프로 정의된다. 이 때 분포 F 의 $\left(\frac{i}{n}\right)$ 분위수는 $F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)$ 가 되고, 표본의 $\left(\frac{i}{n}\right)$ 분위수는 $X_{i:n}$ 가 된다. 즉, 위에서 정의된 Q-Q 플롯은 (x, y) 좌표평면에,

$$\left(F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right), X_{i:n} \right)$$

를 표시하는 그래프로 나타낼 수 있다. 즉, Q-Q 플롯에서는 x 좌표에 $F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)$ 의 값 대신에 $F^{-1}\left(\frac{i-c}{n-2c+1}\right)$ 의 값을 사용한다. 이렇게 되면, 그래프는 좌표의 기대값과 좌표의 값이 같게 되어 기울기가 1인 직선이 될 것으로 기대된다(Lee & Rhee, 1997).

X_1, \dots, X_n 을 새로운 방법에서 얻어진 데이터라고 하고, Y_1, \dots, Y_n 을 예전의 방법에서 얻어진 데이터라고 하자. 그렇게 되면 새로운 방법과 예전의 방법은 $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ 과 같은 쌍으로 나타낼 수 있고 이들을 새로운 방법에서의 데이터를 기준으로 순서화하면

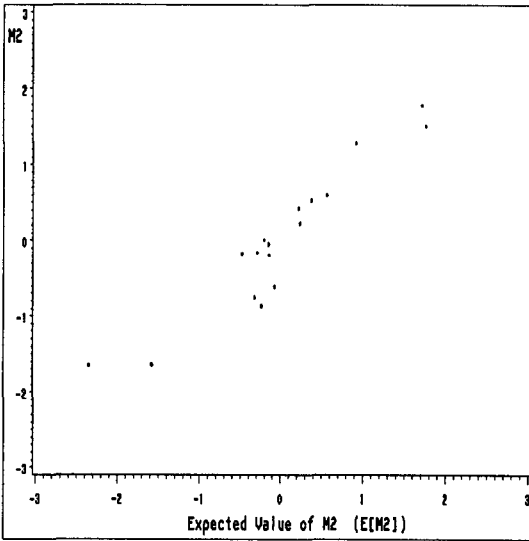
$$(X_{1:n}, Y_{a_1:n}), (X_{2:n}, Y_{a_2:n}), \dots, (X_{n:n}, Y_{a_n:n})$$

과 같이 나타낼 수 있으며, 이때 (a_1, \dots, a_n) 은 정수의 조합이다. 이렇게 정렬한 다음, 새로운 방법이 예전의 방법과 비교해서 Agreement이면 우리는 $E(X) \cong Y$ 라고 기대할 수 있다. 즉, 좌표평면에 이들 데이터의 쌍을 표시하면, 표시된 좌표들은 $y = x$ 직선을 따라 분포되어 있을 것이라고 기대할 수 있다.

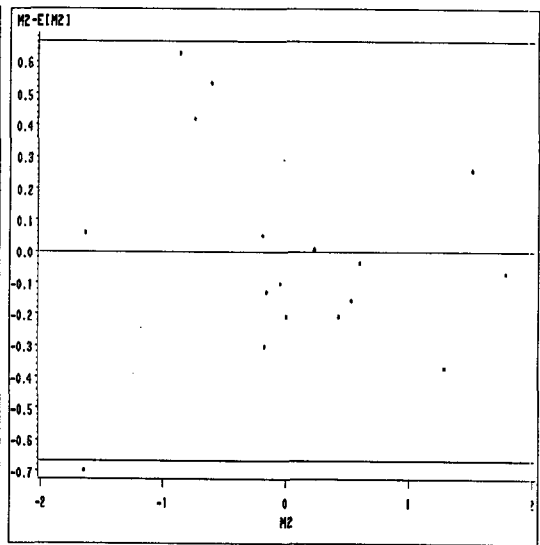
이와 유사하게도 Q-Q 플롯에서는 $y = x$ 의 직선 주위로 얼마만큼의 데이터들이 적은 편차를 가지고 흩어져 있는가를 조사하여 이들 분포에 대한 정규성을 판단하는 것이다. 이런 관점에서 Agreement를 새로운 방법에서 얻어진 데이터가 기존의 방법에서 얻어진 데이터와 통계적으로 교체 사용할 수 있는가에 대한 문제로 보면, $E(X) \cong Y$ 로 둘 수 있으므로 이것을 이용하여 Q-Q 플롯의 좌표를 아래와 같이 Agreement의 측정에도 근사적으로 사용할 수 있게 된다.

$$(E[X_{i:n}], X_{i:n}) \cong (Y_{a_i:n}, X_{i:n}).$$

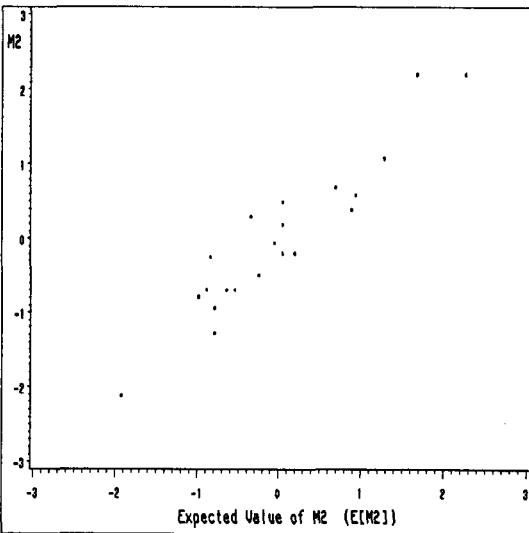
이와 같은 관계를 고려하여 Agreement에 관한 해석을 Q-Q 플롯에 적용하여 분석할 수 있다. 즉, 새로운 방법이 기존의 방법과 Agreement이면, 이 자료의 Q-Q 플롯은 기울기가 1인 직선의 형태를 가질 것이라고 기대할 수 있으며, Q-Q 플롯의 형태가 Lee와 Rhee (1997)에 의해 설명된 'S'-형상 등과 같이 Q-Q 플롯의 해석에 거론되었던 형상을 가지면 새로운 방법이 기존의 방법에 대하여 어떤 성질을 가지고 있는가를 판단할 수 있다.



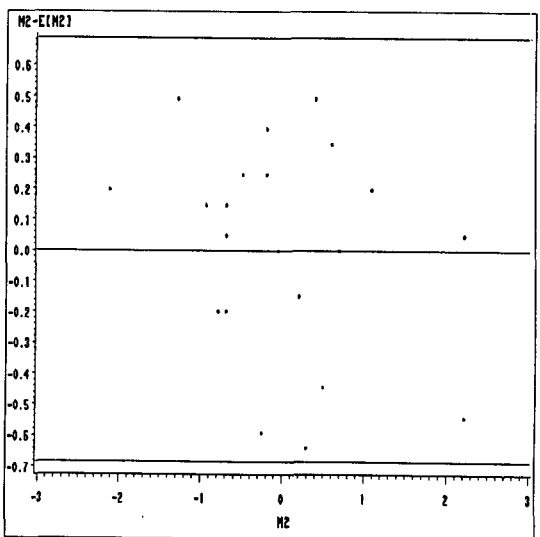
[그림 5] 표 1에 대한 Q-Q 플롯



[그림 6] 그림 5의 Bland와 Altman 기법



[그림 7] 표 2에 대한 Q-Q 플롯



[그림 8] 그림 7의 Bland와 Altman 기법

이와 같이 두 방법의 Agreement에 대한 분석을 Q-Q 플롯에 적용하기 위하여 일반적인 표준화(standardized)를 시도할 때, 기존의 방법을 새로운 방법의 기대값으로 취함으로써 평균과 표준편차의 추정량을 기존의 방법의 표본평균과 표본표준편차로 하여 표준화를 시킨다. 즉,

$$Y'_{a:n} = \frac{Y_{a:n} - \bar{Y}}{s_y}, \quad X'_{i:n} = \frac{X_{i:n} - \bar{Y}}{s_y},$$

이때 $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ 이고 $s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$ 이다.

그리고 직선으로부터의 편차를 $d' \equiv X'_{i:n} - Y'_{a:n}$ 로 두면, 이것은 근사적으로 $X'_{i:n} - E(X'_{i:n})$ 가 된다. 이때 d' 의 기대값은 근사적으로 0이 된다. 여기에서 Bland와 Altman식의 기법을 적용하여 데이터들의 대부분이 일치한계에 들어갈 것으로 기대할 수 있다.

앞에서 사용한 예제를 통하여 살펴보면 [그림 5]는 [표 1]에서 새로운 방법의 데이터를 표준화하여 Q-Q 플롯을 나타낸 것이다. [그림 5]에서 우리는 데이터들이 $E(X) \cong Y$ 라는 관계를 만족하여서 대부분의 데이터들이 $y = x$ 의 직선 주위에 나타나기를 기대한다. [그림 5]에서 Agreement의 판단을 보다 시각적으로 명확하게 내리기 위해 표준화된 데이터들간의 차를 이용하여 [그림 6]과 같이 나타내고 Bland와 Altman식의 기법을 적용하여 대부분의 데이터들이 상한과 하한($\pm 2SD$) 사이에 분포한다면 우리는 이것을 Agreement라고 결론을 내릴 수 있다. [그림 6]에서 우리는 [그림 2]에서 보는 것과 마찬가지로 유의수준 5%에서 두 방법이 서로 Agreement가 아니라는 동일한 결론을 얻을 수 있다.

[그림 7]은 [표 2]에서 새로운 방법의 데이터를 표준화하여 Q-Q 플롯으로 대부분의 데이터들이 $y = x$ 직선의 주위에 잘 나타나 있음을 알 수 있고, 데이터의 차에 대한 [그림 8]에서 Bland와 Altman식의 기법을 적용하여 보면 차들이 상한과 하한 사이에 모두 들어가 있으므로 두 방법이 서로 Agreement라고 결론을 얻을 수 있다.

4. 결론

비록 두 방법이 산점도에서 Agreement인 것으로 예상되었으나(그림 1) Bland와 Altman식의 방법에서 일치한계를 적용시켜 보면 이들 방법은 Agreement가 아닌 것으로 판명되어졌다(그림 2). 하지만 Q-Q 플롯의 개념을 이용한다면, Lee와 Rhee (1997)에 의해 설명된 Q-Q 플롯의 형태에 관한 해석을 두 방법의 Agreement를 분석하는데 적용할 수가 있다. 그리고 Q-Q 플롯만으로도 두 방법이 Agreement인지 아닌지에 대해 예측할 수 있으며(그림 5, 7), Q-Q 플롯에 의한 Bland와 Altman식의 방법을 이용하여 일치한계를 적용시켜 보면 더욱 명확한 결론을 내릴 수 있다.

참고 문헌

1. Altman, D. G. (1992). *Practical statistics for medical research*, Chapman and Hall, London.

2. Bland, J. M. and Altman, D. G. (1986). Statistical methods for assessing agreement between two methods of clinical measurement, *The Lancet*, i, 307-310.
3. Lee, J.-Y. and Rhee, S.-W. (1997). 특정분포에 따른 확률 Plot들의 정규성과 Bimodality 비교, 한국통계학회논문집, 4권 1호, 243-254.
4. Wilk, M. B. and Gnanadesikan, R. (1968). Probability plotting methods for the analysis of data, *Biometrika*, Vol. 55, 1-17.
5. Zhang, Y., Nitter-Hauge, S., Ihlen, H., *et al.*, (1986). Measurement of aortic regurgitation by Doppler echocardiography. *Br. Heart J.*, Vol. 55, 32-38

Statistical Analysis of Agreement by Q-Q plot

Jea-Young Lee ³ · Seong-Won Rhee · Jae-Woo Lee ⁴

Abstract

In clinical measurement comparison of a new measurement technique with an established one is often needed to see whether they agree sufficiently for the new to replace the old. Such investigations are often analysed inappropriately, notably by using the correlation coefficient(r). So, the measurement for agreement was determined by Bland & Altman's method recently. In this article, we will analyse the measurement for agreement by using Q-Q plot and by applying Bland and Altman's method through graph. And we will show characteristics for these techniques.

³Assistant Prof., Department of Statistics, Yeungnam University, Kyungpook, 712-749 Korea.

⁴Department of Statistics, Yeungnam University, Kyungpook, 712-749 Korea.