

초기변형을 갖고 있는 회전축의 동특성에 관한 연구

A Study on the Dynamic Characteristics of a Shaft with Initial Deflection

김 용 철*, 김 봉 균**, 김 병 옥**
Y. C. Kim, B. K. Kim, B. O. Kim

ABSTRACT

In this study, the effects of residual shaft bow and flexible bearings of a single disk rotor are investigated. The stiffness coefficients of a shaft with initial deflection are different from those of a straight shaft. The stiffness coefficients are calculated using Castigliano theorem considering initial deflections. The stiffness coefficients, which are obtained in this study, are in good agreement with FEM results. The speed which causes zero amplitude is shown to be the square root of the ratio of residual bow amplitude to unbalance eccentricity in the case of rigid bearings and isotropic flexible bearings, but not in anisotropic bearings.

주요기술용어 : Rigid Bearing(강체 베어링), Flexible Bearing(유연한 베어링), Stiffness Coefficient(강성계수), Isotropic Bearing(등방성 베어링), Anisotropic Bearing(비등방성 베어링)

1. 서 론

최근 산업기술의 발전은 회전기계류의 고속화와 경량화에 괄목할만한 성과를 이루어내었다. 그러나 고속화, 경량화된 회전기계는 운전중 여러개의 위험속도를 통과해야 하기 때문에 진동문제를 발생시킨다. 운전중인 회전기계는 불평형질량, 축정렬불량, 축의 초기변형, 베어링과 축강성 비대칭 등 많은 요인들에 의해 진동이 발생된다. 이러한

요인들 중에서 불평형 질량에 의해 발생하는 진동 특성은 선행 연구자들에 의해 많은 연구가 이루어졌으나 불평형 질량과 초기변형이 함께 존재할 경우, 특히 유연한 베어링으로 지지된 회전축의 동특성에 대한 연구는 미약한 실정이다. 초기변형의 원인은 자중에 의한 처짐, 불균일한 열 분포, 억지 박음등과 같은 여러 가지 요인들에 의해 발생될 수 있으며 영구적인 것과 일시적인 것으로도 분류할 수 있다. Nicholas 등^{1,2)}은 초기변형을 고려한 회전체 해석의 초기 연구자들로서 이론적, 실험적 해석을 통하여 초기변형의 효과를 잘 묘사하고 있으며 특히 주목할 만한 내용으로는 초기변형과 불

* 정회원, 영남대학교 기계공학부

** 영남대학교 대학원

평형 질량이 서로 반대위상을 가질 경우에는 (초기변형량/편심량)^{1/2}에 해당되는 회전속도에서 진폭이 영으로 되는 self-balancing-speed가 존재한다는 것과 공진점에서의 위상이 90°를 통과하지 않는다는 점을 강조하고 있다. 이후 Shiao⁴⁾는 Benson³⁾의 연구결과를 토대로 초기변형과 원판의 기울어짐을 고려한 동특성 해석을 수행하였다.

위의 연구자들은 베어링을 단순한 강체베어링으로 가정하여 해석을 수행하였으나, 본 연구에서는 강체베어링과 유연한 베어링의 경우를 서로 비교·분석하고 아울러 초기변형을 고려한 강성계수를 직접 구하여 좀 더 향상된 수학적 모델을 제시하고자 한다.

2. 해석방법

본 연구에 사용된 회전체 시스템은 Fig.1(a)와 1(b)에서 보는 바와 같이 균일한 회전축이 유연한 베어링으로 지지되어 있으며 왼쪽 베어링으로부터 a만큼 떨어진 회전축상에는 τ 만큼의 기울어짐을

가진 원판이 부착되어 있는 시스템이다. 원판은 강성이 없는 집중질량으로 가정하고 원판의 질량을 m , 극관성 모멘트를 I_p , 횡관성 모멘트를 I_d 로 표기한다. 또한 회전축은 질량이 없고 강성만 있으며 길이는 L 이고, 초기변형량 δ_r 과 위상각 ϕ_r 을 가지고 있다.

원판의 질량중심은 기하학적 중심점 C에서 e_u 만큼 떨어져서 불평형력을 발생시키며, 또한 회전축의 수직단면에 대하여 Fig.1(c)에서처럼 τ 만큼 기울어져 불평형 모멘트를 유발시킨다. 더불어 자이로스코픽 효과를 고려하기 위하여 오일러 각 ϕ , ψ 를 포함시켰다. ϕ 와 ψ 에 대한 정의는 Fig.1(d)를 참고한다. 회전축의 강성계수를 구하기 위하여 영향계수법을 다음과 같이 이용하였으며 h_{ij} 는 영향계수(Influence coefficient)를 나타낸다.

$$\begin{aligned} x &= h_{xx}F_x + h_{x\phi}M_\phi, & y &= h_{yy}F_y + h_{y\psi}M_\psi \\ \psi &= h_{\psi y}F_y + h_{\psi\psi}M_\psi, & \phi &= h_{\phi x}F_x + h_{\phi\phi}M_\phi \end{aligned} \quad (1)$$

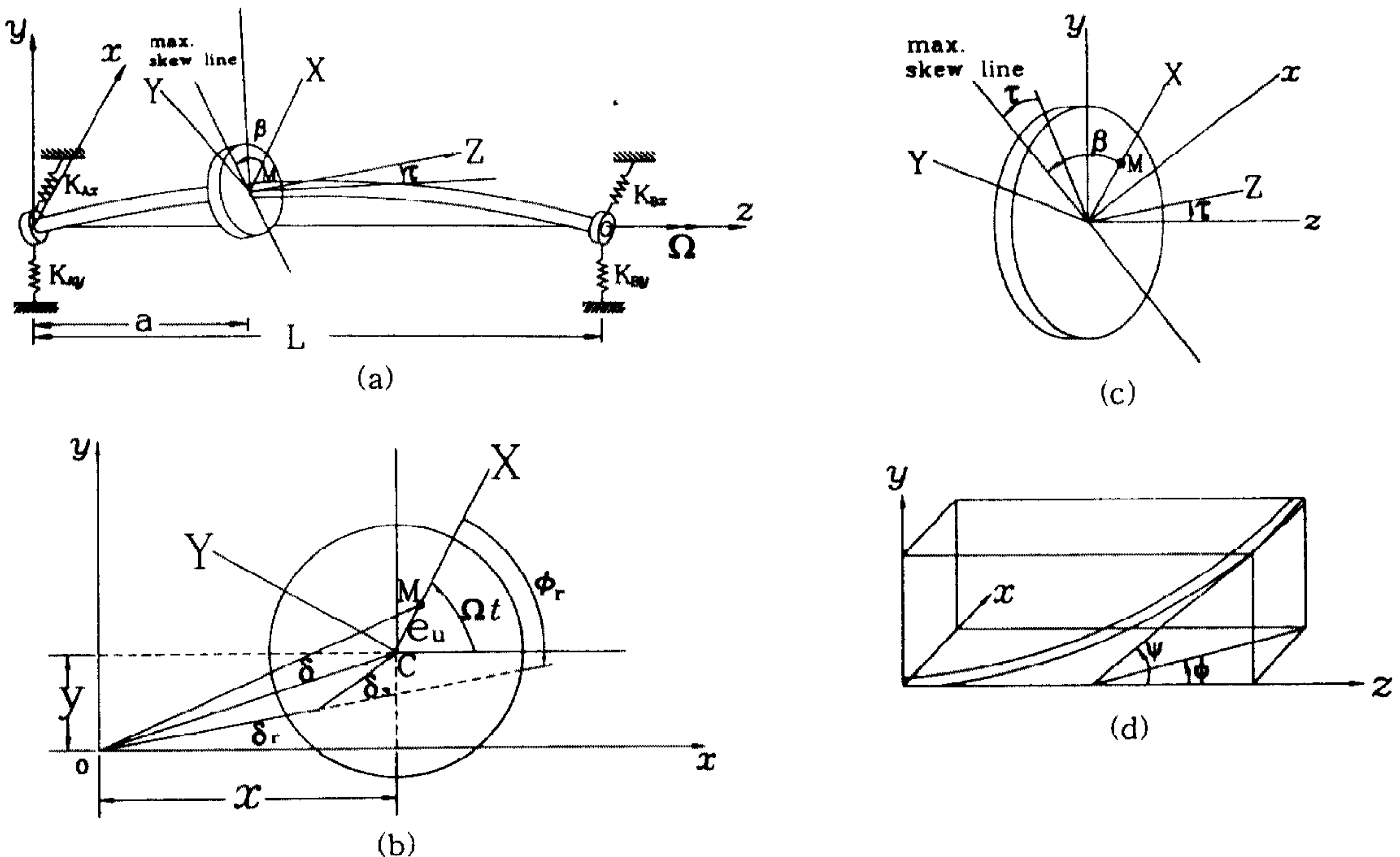


Fig.1 회전체 시스템의 개략도

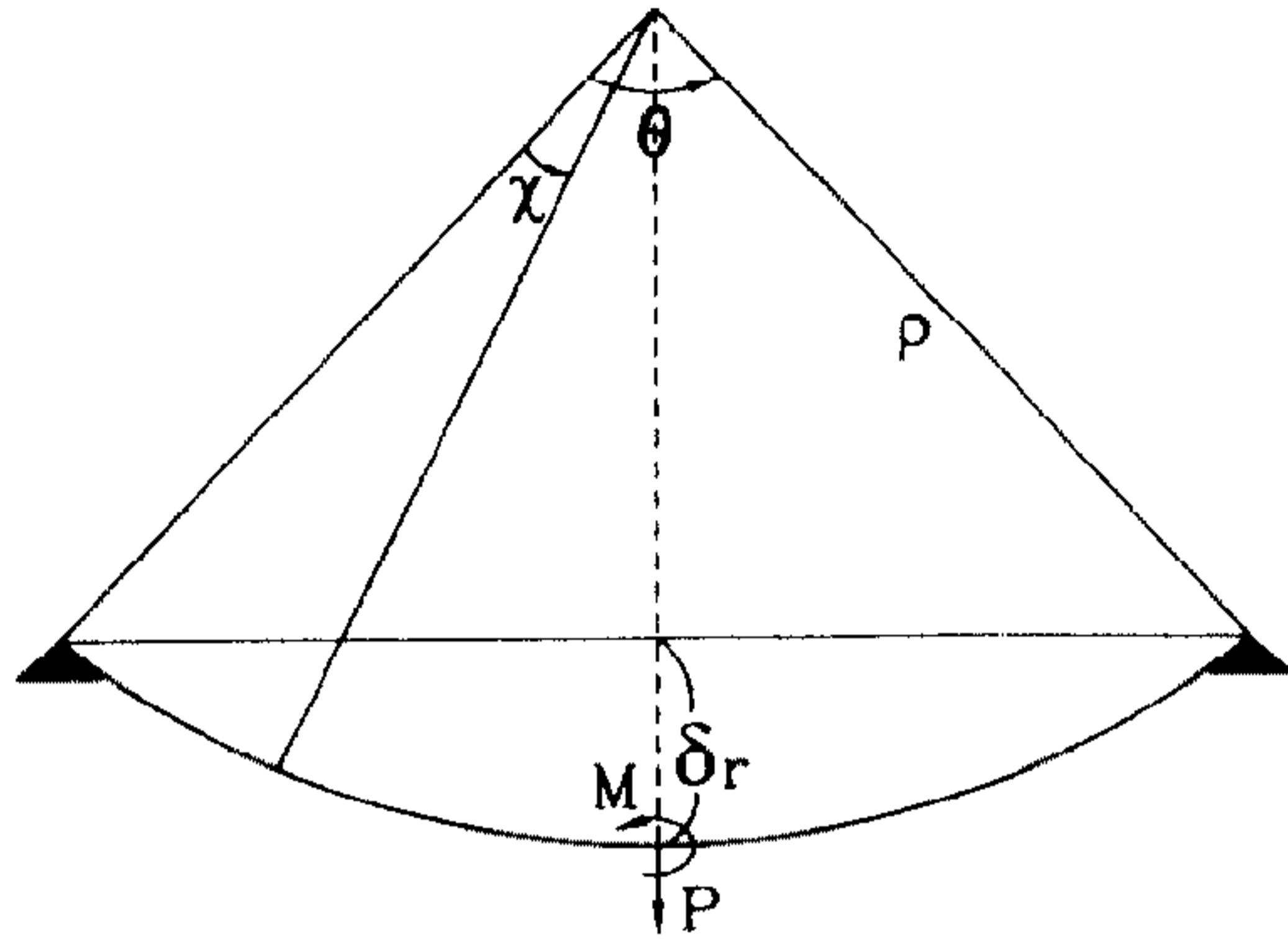


Fig.2 보의 초기변형 형태

초기변형이 없는 경우는 영향계수를 쉽게 구할 수 있으나 초기변형이 있는 경우는 근사적으로 영향계수를 구해야 한다. 본 논문에서는 영향계수를 근사적으로 구하기 위하여 Fig.2와 같이 축의 변형형태가 곡률반경이 ρ 인 원호로 가정하고 단위 하중과 단위모멘트에 대한 내력을 구한 후 Castigliano 이론을 적용하여 변위 δ 와 기울기 φ 를 다음과 같이 구하였다.

$$\begin{aligned}
 \delta &= \int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{N_1}{EA} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial P} \rho dx + \int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{N_2}{EA} \\
 &\quad \cdot \frac{\partial N_2}{\partial P} \rho dx + \int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{M_1}{EI} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial P} \rho dx \\
 &\quad + \int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{M_2}{EI} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial P} \rho dx \\
 \varphi &= \int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{N_1}{EA} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial M} \rho dx + \int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{N_2}{EA} \\
 &\quad \cdot \frac{\partial N_2}{\partial M} \rho dx + \int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{M_1}{EI} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial M} \rho dx \\
 &\quad + \int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{M_2}{EI} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial M} \rho dx \quad (2)
 \end{aligned}$$

여기서, N_1, N_2 는 축방향 내력을 M_1, M_2 는 내력 모멘트를 각각 나타낸다. 위의 결과로부터 단위 하중에 대한 영향계수는 3차와 5차 근사화를 수행하였으며, 단위모멘트에 대한 영향계수는 1차와 3차 근사화를 수행하였다. 결과값에 대한 검증작업

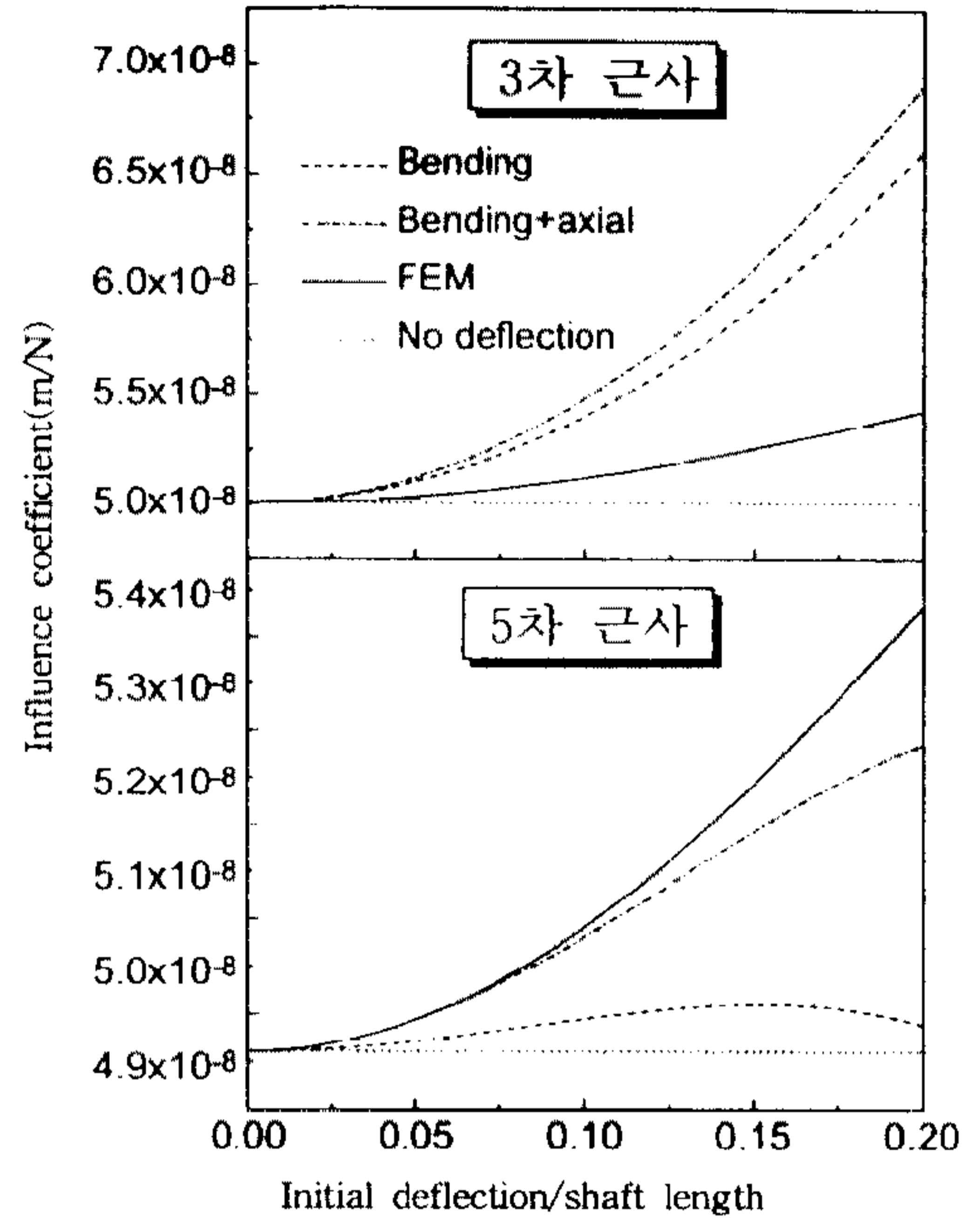


Fig.3 단위하중에 대한 영향계수

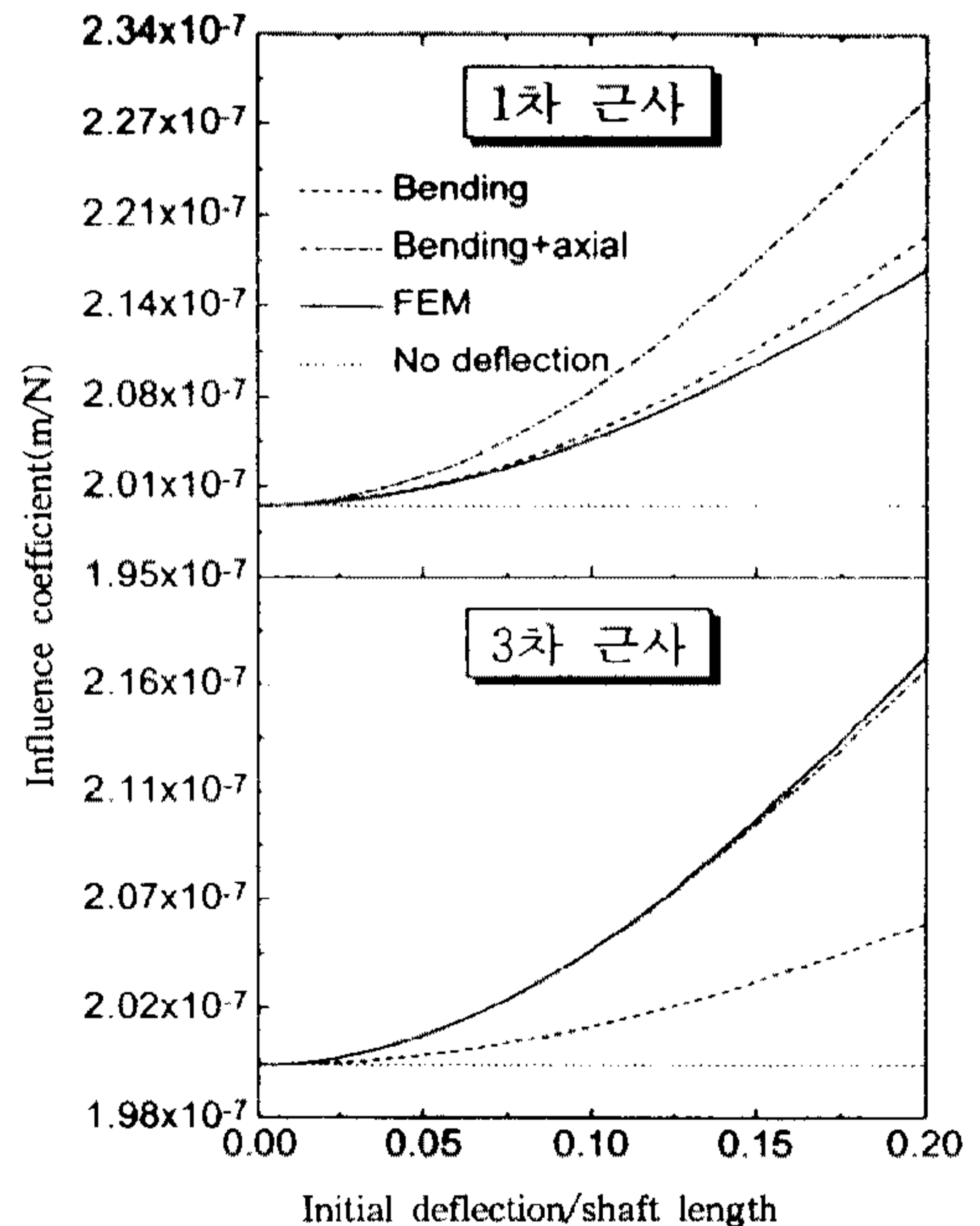


Fig.4 단위모멘트에 대한 영향계수

으로 상용유한요소 프로그램인 ANSYS 5.0을 이용하여 비교하였으며 이때 요소를 단위길이에 대하여 40개로 분할하였다. Fig.3과 4은 각각 단위

하중과 단위모멘트에 대한 영향계수를 나타내고 있다.

Fig.3과 4에서 볼 수 있듯이 각각 3차와 1차 근사값의 경우는 유한요소값과의 오차가 다소 큰 반면 5차와 3차 근사값 특히, 축방향 힘을 고려한 영향계수는 다른 영향계수에 비해 오차값이 매우 작음을 알 수 있다. 그러나 본 연구에서 적용한 초기변형은 매우 작은 양이므로 변형이 없는 경우의 영향계수를 사용하여도 큰 차이가 나지 않음을 수치실험을 통해 알 수 있었다. 만일 초기변형이 다소 큰 경우는 단위하중에 대한 영향계수는 5차 근사, 단위 모멘트에 대한 영향계수는 3차 근사식을 사용하여야 한다.

2.1 운동방정식

시스템의 운동방정식은 D'Alembert 원리와 오일러 방정식을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + c\dot{x} + k_{xx}x + k_{x\phi}\phi &= [k_{xx} + k_{x\phi}R]\delta_r \\
 &\cos(\Omega t - \phi_r) + me_u\Omega^2 \cos \Omega t \\
 m\ddot{y} + c\dot{y} + k_{yy}y + k_{y\psi}\psi &= [k_{yy} + k_{y\psi}R]\delta_r \\
 &\sin(\Omega t - \phi_r) + me_u\Omega^2 \sin \Omega t \\
 I_d\ddot{\phi} + I_p\Omega\dot{\phi} + k_{\phi x}x + k_{\phi\phi}\phi &= [k_{\phi x} + k_{\phi\phi}R]\delta_r \\
 &\cos(\Omega t - \phi_r) + (I_p - I_d)\tau\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \\
 I_d\ddot{\psi} - I_p\Omega\dot{\psi} + k_{\psi y}y + k_{\psi\psi}\psi &= [k_{\psi y} + k_{\psi\psi}R]\delta_r \\
 &\sin(\Omega t - \phi_r) + (I_p - I_d)\tau\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \quad (3)
 \end{aligned}$$

여기서, k_{ij} 는 영향계수에서 구한 강성계수이고, R 은 초기변형에 의하여 생기는 θ_r 과 δ_r 의 관계 즉, $\theta_r = R\delta_r$ 이며 다음과 같다.

$$R = \frac{(L-2a)(L-a)}{aL^2} \quad (4)$$

위의 운동방정식에 복소좌표계를 도입하면 물리적 해석이 용이함과 동시에 운동방정식을 단순화시킬 수 있다.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{u} + c\dot{u} + k_1u + \Delta k_1\bar{u} + k_2\theta + \Delta k_2\bar{\theta} \\
 = k_3\delta_r e^{j(\Omega t - \phi_r)} + \Delta k_3\delta_r e^{-j(\Omega t - \phi_r)} \\
 + me_u\Omega^2 e^{j\Omega t} \\
 I_d\ddot{\theta} - jI_p\Omega\dot{\theta} + k_4u + \Delta k_4\bar{u} + k_5\theta + \Delta k_5\bar{\theta} \\
 = k_6\delta_r e^{j(\Omega t - \phi_r)} + \Delta k_6\delta_r e^{-j(\Omega t - \phi_r)} \\
 + (I_p - I_d)\tau\Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta)} \quad (5)
 \end{aligned}$$

여기서, $u = x + jy$, $\theta = \phi + j\psi$, $\bar{u} = x - jy$, $\bar{\theta} = \phi - j\psi$ 이고 강성계수 k_1 , Δk_1 등에 대한 양은 부록 1에 나타내었다. 무차원 변수를 도입하면 무차원화된 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있으며 각각의 무차원 변수들에 대한 정보는 부록 2에 나타내었다.

$$\begin{aligned}
 U'' + CU' + \hat{k}_1U + \Delta\hat{k}_1\bar{U} + \hat{k}_2\Theta + \Delta\hat{k}_2\bar{\Theta} \\
 = \hat{k}_3\hat{\delta}_r e^{j(\Omega\tau - \phi_r)} + \Delta\hat{k}_3\hat{\delta}_r e^{-j(\Omega\tau - \phi_r)} \\
 + \hat{e}_u\hat{\Omega}^2 e^{j\Omega\tau} \\
 \hat{I}_d\Theta'' - j\hat{I}_p\hat{\Omega}\Theta' + \hat{k}_4U + \Delta\hat{k}_4\bar{U} + \hat{k}_5\Theta + \Delta\hat{k}_5\bar{\Theta} \\
 = \hat{k}_6\hat{\delta}_r e^{j(\Omega\tau - \phi_r)} + \Delta\hat{k}_6\hat{\delta}_r e^{-j(\Omega\tau - \phi_r)} \\
 + (\hat{I}_p - \hat{I}_d)\tau\hat{\Omega}^2 e^{j(\Omega\tau + \beta)} \quad (6)
 \end{aligned}$$

2.2 고유진동수 해석

얇은 원판($I_p > I_d$)의 경우는 한 개의 고유진동수만 존재하고 두꺼운 원판($I_p < I_d$)의 경우는 두 개의 고유진동수가 존재한다는 것은 이미 잘 알려져 있다.⁴⁾ Fig.5와 6는 무차원화된 \hat{I}_p 와 \hat{I}_d 의 비에 따른 고유진동수 변화양상을 나타내고 있다. Fig.5에서처럼 원판이 축의 중앙에 놓여있을 때 \hat{I}_d/\hat{I}_p 가 클수록 두 개의 고유진동수가 서로 인접해지고 \hat{I}_d/\hat{I}_p 가 작을수록 서로 멀어지기 때문에 얇은 원판의 경우에는 $\hat{\Omega}_{n2}$ 에 대한 영향이 없음을 알 수 있다. Fig.5에서는 $\hat{\Omega}_{n1}$ 이 \hat{I}_d/\hat{I}_p 의 값과는 상관없이 일정하지만 Fig.6에서는 원판의 자이로스코픽 효과때문에 $\hat{\Omega}_{n1}$ 의 값이 \hat{I}_d/\hat{I}_p 에 따라 변화함을 알 수 있다.

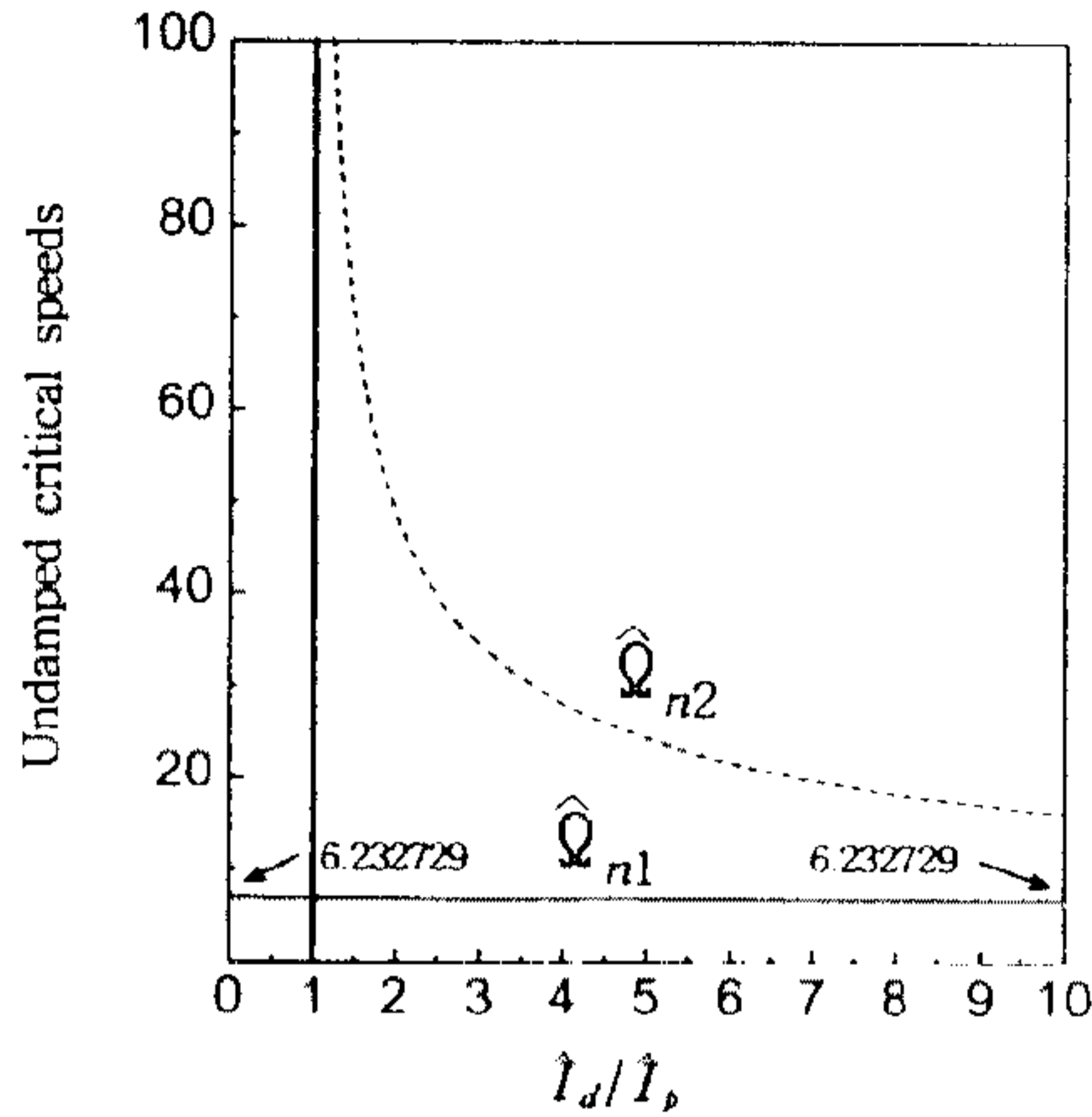


Fig.5 $a = L/2$ 인 경우

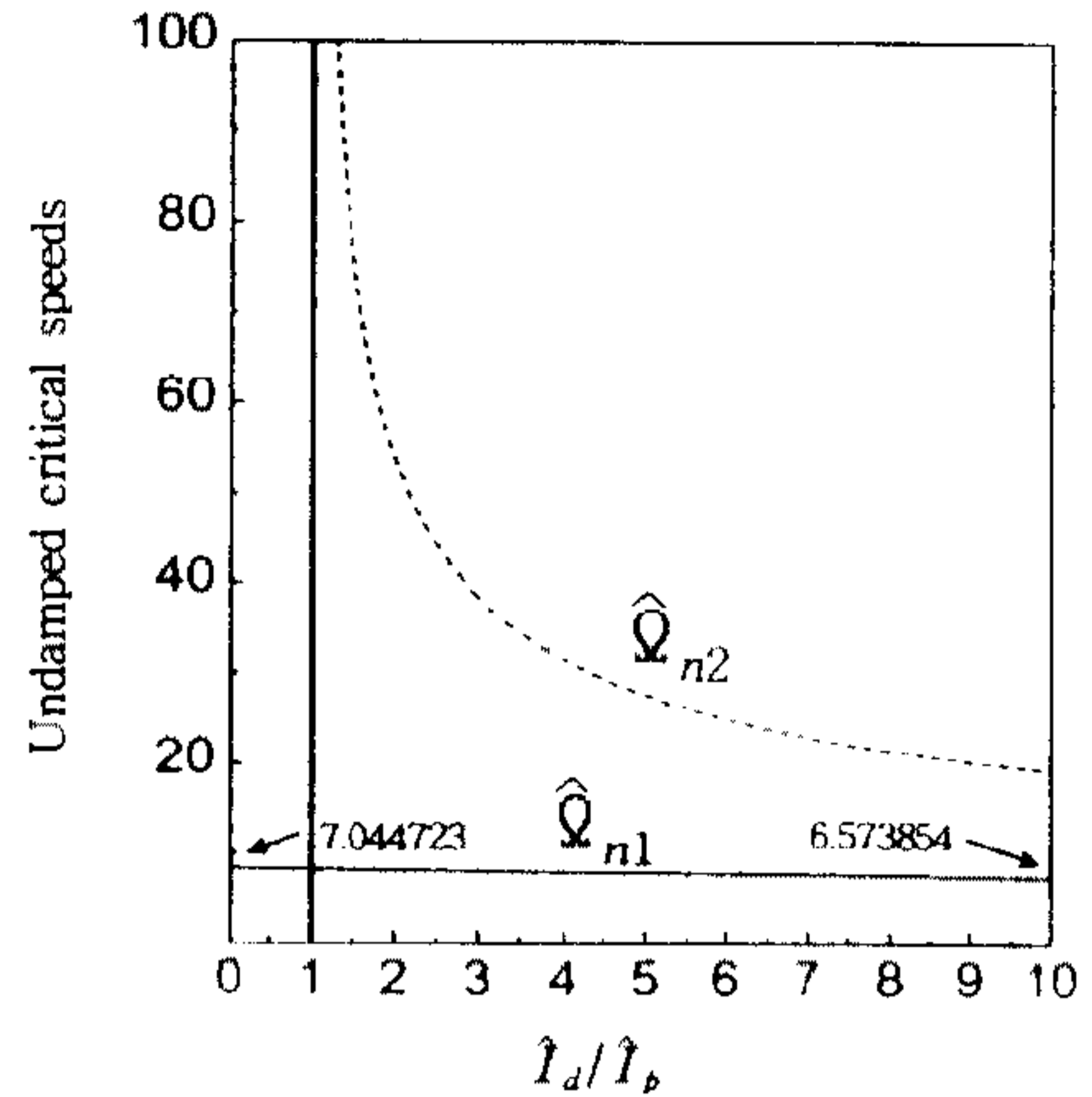


Fig.6 $a = L/3$ 인 경우

2.3 정상상태 응답

정상상태 해를 식(7)과 같이 가정하여 운동방정식에 대입하면 식(8)과 같은 대수방정식을 얻을 수 있다. 식(8)에서 좌변행렬의 역행렬을 우변에 곱함으로써 정상상태 응답진폭을 구할 수 있다.

$$U = U_f e^{j\Omega\tau} + U_b e^{-j\Omega\tau}, \quad \Theta = \Theta_f e^{j\Omega\tau} + \Theta_b e^{-j\Omega\tau}, \quad \bar{U} = \bar{U}_f e^{-j\Omega\tau} + \bar{U}_b e^{j\Omega\tau},$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_f e^{-j\Omega\tau} + \bar{\Theta}_b e^{j\Omega\tau} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2 + jC\Omega + \hat{k}_1 & \Delta\hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \Delta\hat{k}_2 \\ \Delta\hat{k}_1 & -\Omega^2 + jC\Omega + \hat{k}_1 & \Delta\hat{k}_2 & \hat{k}_2 \\ \hat{k}_4 & \Delta\hat{k}_4 & (\hat{I}_b - \hat{I}_d)\Omega^2 + \hat{k}_5 & \Delta\hat{k}_5 \\ \Delta\hat{k}_4 & \hat{k}_4 & \Delta\hat{k}_5 & -(\hat{I}_b + \hat{I}_d)\Omega^2 + \hat{k}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_f \\ U_b \\ \Theta_f \\ \Theta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{k}_3 \delta_r e^{-j\phi} + \hat{e}_u \Omega^2 \\ \Delta\hat{k}_3 \delta_r e^{-j\phi} \\ \hat{k}_6 \delta_r e^{-j\phi} + (\hat{I}_b - \hat{I}_d)\tau \Omega^2 e^{j\phi} \\ \Delta\hat{k}_6 \delta_r e^{-j\phi} \end{bmatrix} \quad (8)$$

3. 해석결과

3.1 초기변형의 영향

Fig.7은 초기변형에 대한 기본적인 효과를 알아보기 위하여 초기변형이 있는 경우와 초기변형은 없고 불평형 질량만 존재하는 경우에 대하여 서로 비교하였다. 이때 베어링은 강체베어링으로 가정하였다. $\bar{\delta}_r$ ($\hat{\delta}_r/\hat{e}_u$)의 값이 1보다 작은 경우는 고유진동수 앞쪽에서 진폭이 0이 되는 self-balancing-speed가 나타남을 알 수 있고, 1인 경우는 고유진동수에서, 1보다 큰 경우는 고유진동수 뒤쪽에서 나타남을 알 수 있었다.¹⁾ 위상의 변화도 초기변형이 없는 경우와 상당히 차이가 있음을 보이고 있다. 특히 self-balancing이 일어나는

곳에서는 180°의 급격한 위상변화가 일어남을 볼 수 있다. Fig.8은 ϕ_r 을 변화시키면서 응답을 조사하였는데 초기변형과 불평형질량이 같은 위상에서는 불평형력과 초기변형이 더해져서 진폭이 더 키짐을 알 수 있고, 반대위상에서만 self-balancing-speed가 나타남을 알 수 있다.¹⁾

3.2 유연한 베어링의 영향

비록 유연한 베어링이라 할지라도 x, y방향의 베어링 강성이 같은 경우에는 Fig.7과 8(강체 베어링)과 같은 경향을 보이고 있다. 그러나 베어링의 강성이 다른 경우는 Fig.9에서와 같이 강체 베어링으로 지지된 경우와는 상이한 응답을 보이고 있다. x, y방향의 강성차이로 인하여 두 개의

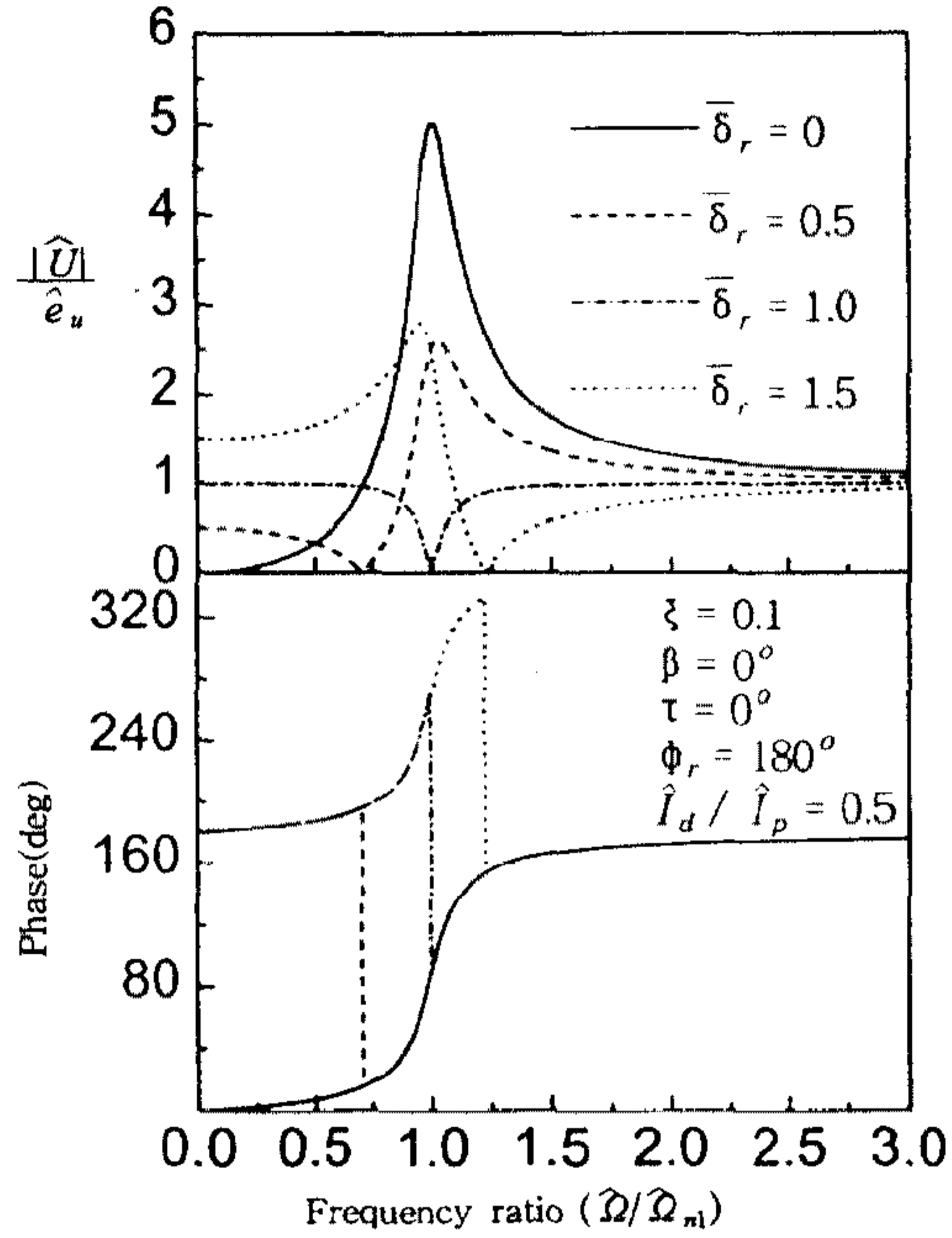


Fig.7 $\bar{\delta}_r$ 값에 따른 응답변화

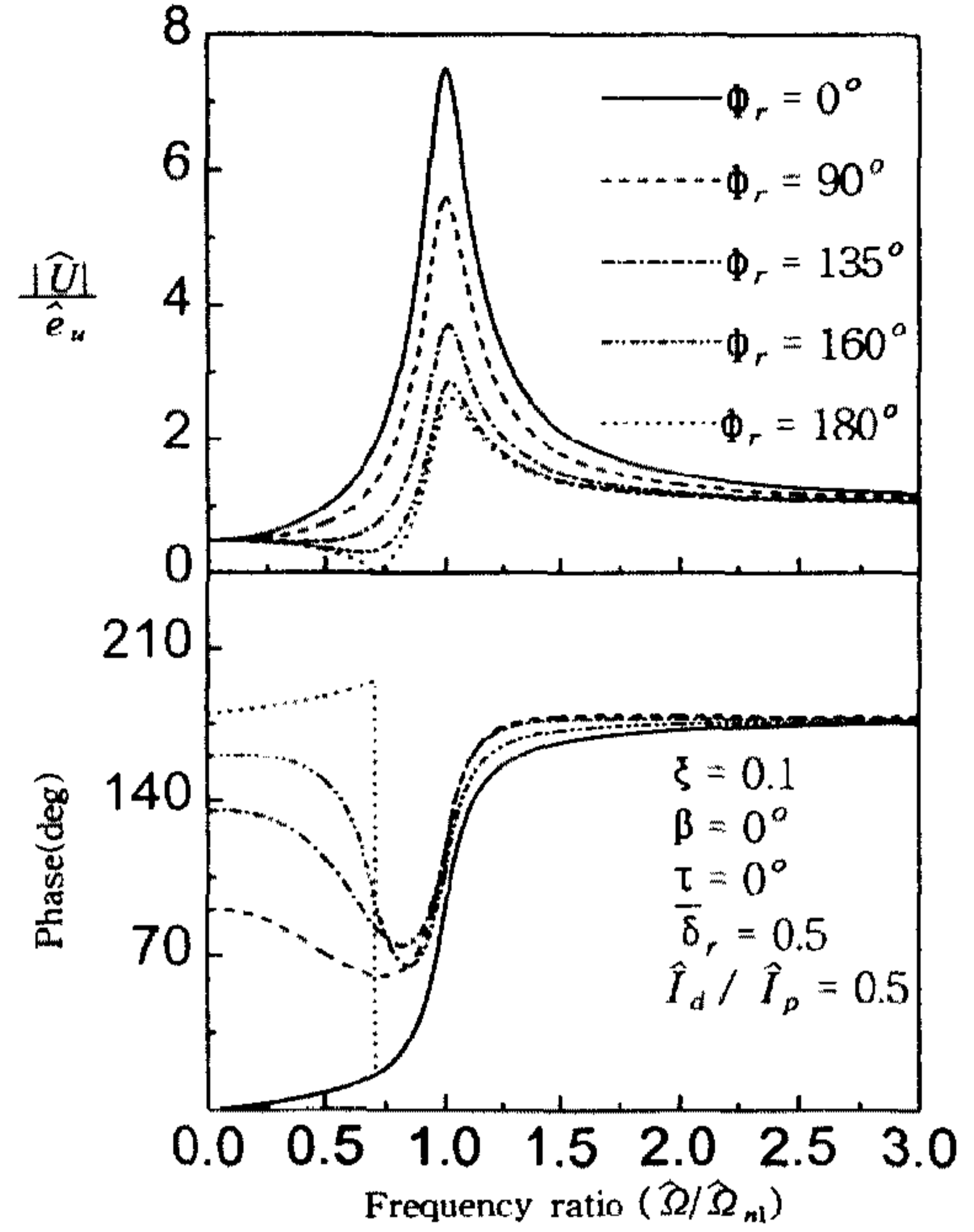


Fig.8 ϕ_r 값에 따른 응답변화

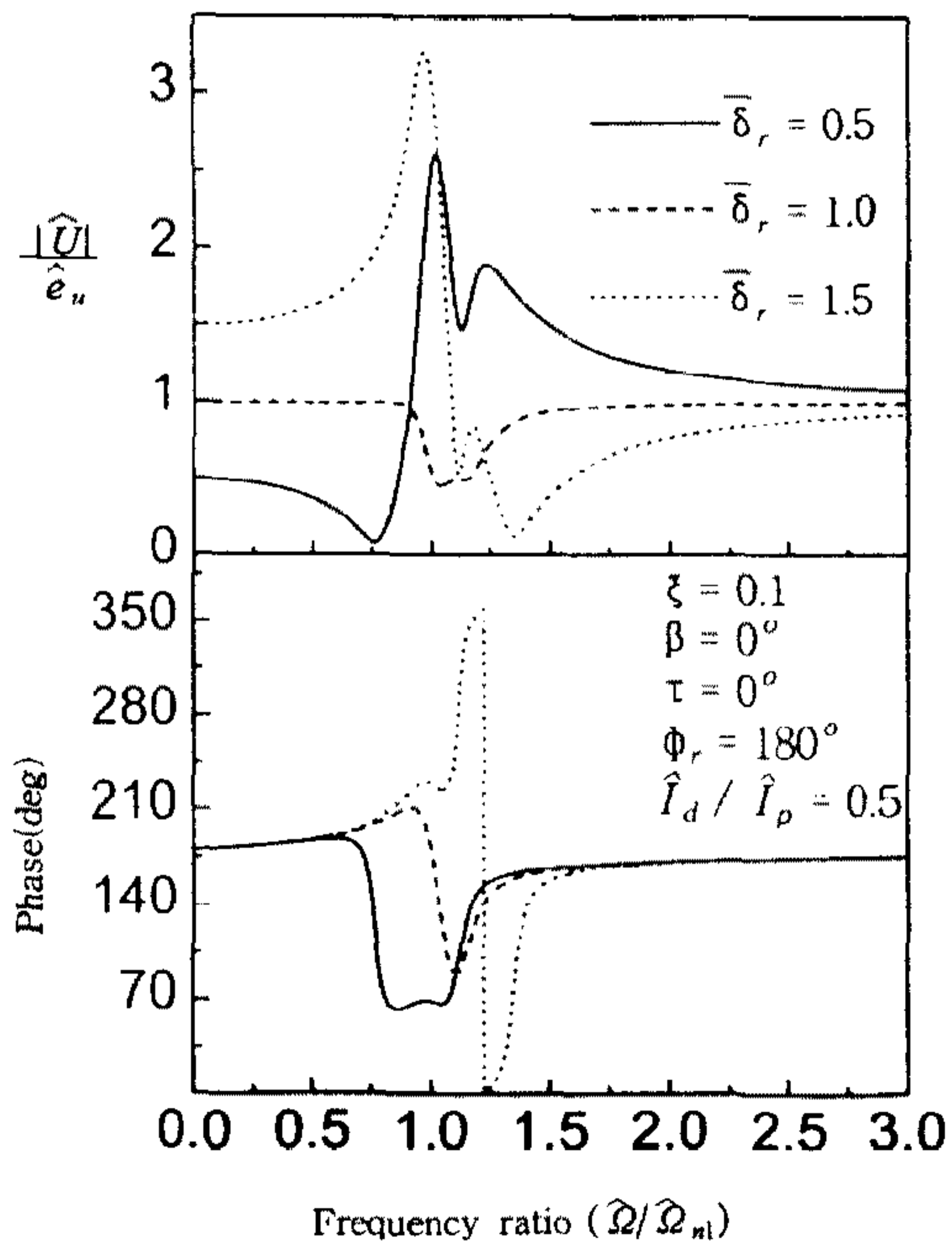


Fig.9 베어링 강성이 다른 경우

고유진동수가 생기며 ϕ_r 이 반대위상(180°)이라 할지라도 진폭이 0이 되는 속도(self-balancing-speed)가 존재하지 않음을 알 수 있다. 이것은 강성차이로 인하여 한 평면에서 진폭이 0이 될 때 다른 평면에서는 진폭이 0이 되지 않기 때문이다.

3.3 기울어진 원판의 영향

Fig.10는 두꺼운 원판인 경우 τ 값의 변화에 따른 응답을 보여주고 있다. τ 값이 커질수록 두 번째 임계속도 근방에서의 응답이 매우 커지며 self-balancing-speed가 앞쪽으로 이동하지만 첫 번째 임계속도 근방에서는 τ 에 의한 영향이 거의 없음을 보이고 있다. 즉, τ 의 변화에 대하여 첫 번째 임계속도보다는 두 번째 임계속도에서 응답이 민감하게 변하며 원판의 기울어짐으로 인해서 생기는 자이로스코픽 모멘트는 두 번째 임계속도에서의 응답에 많은 영향을 미침을 알 수 있다. Fig.11은 β 값의 변화에 따른 응답을 보여주고 있는데 self-balancing-speed는 β 값이 0° 이거나 180° 인 경우에만 존재하며, 이때 발생하는 self-balancing-speed는 β 값이 0° 일 때와 180° 일 때 서로 다르다는 것을 볼 수 있다.

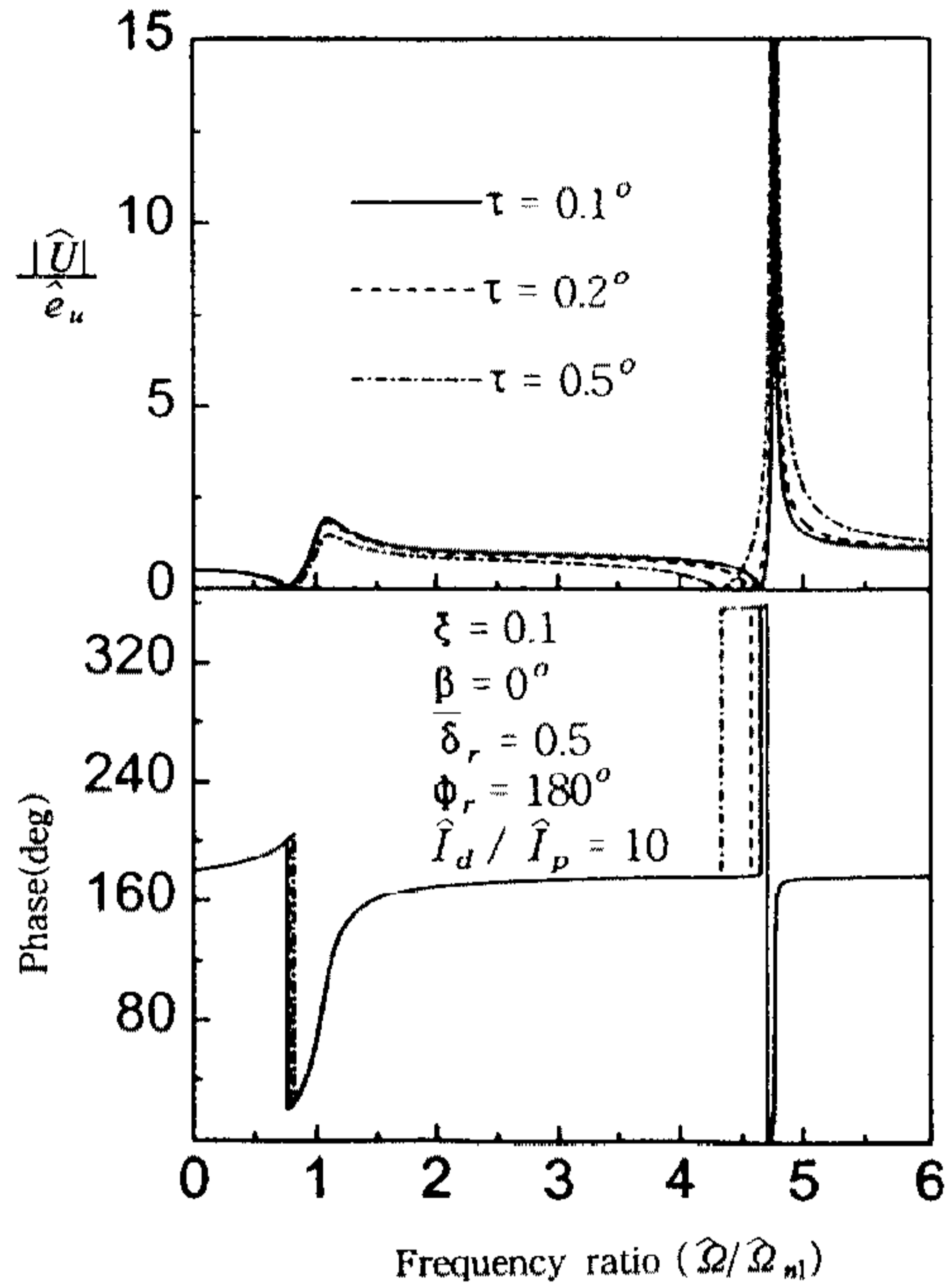


Fig.10 τ 값에 따른 응답변화

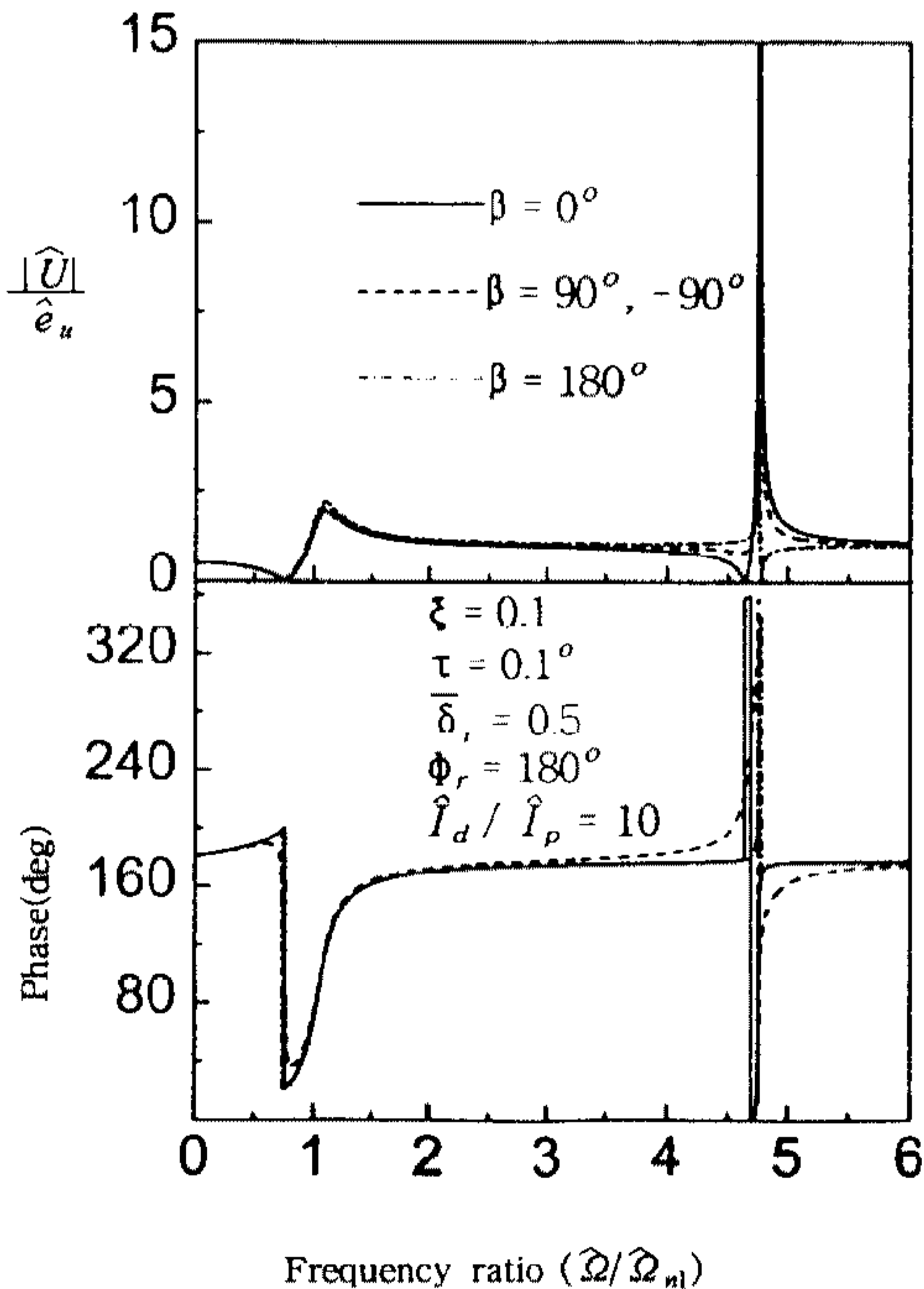


Fig.11 β 값에 따른 응답변화

4. 결 론

본 연구에서는 초기변형을 고려한 회전체 시스템의 동특성을 파악하여 보았다. 여러 가지 수치 실험을 통하여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

- 1) 정적처짐을 이용하여 초기변형이 있는 회전축의 강성계수를 구할 때는 초기변형도(δ_r)가 클수록 변형이 없는 경우의 강성계수와 상당한 오차가 생김을 알 수 있었다. 그래서 본 연구에서는 회전축에 단위하중과 단위모멘트를 가하여 내력모멘트와 축방향 내력까지 고려한 강성계수를 유도하였으며, FEM의 해석 결과와 비교·검토한 결과 만족할 만한 결과를 얻었다. 그러나 초기변형도가 전체 축길이에 2.5% 이내라면 직선 회전축의 강성계수와 본 논문에서 구한 근사화된 강성계수의 차이가 거의 없음을 알 수 있었다.
- 2) 기존의 문헌 [4], [5]에서는 \hat{I}_b 와 \hat{I}_d 의 차이에 따른 고유진동수 변화양상을 설명하고 있으나 원판의 관성이 작은 경우에는 두 양의 차이가 아주 적기 때문에 적용범위의 폭이 좁아진다. 따라서 본 연구에서는 \hat{I}_d/\hat{I}_b 에 따른 고유진동수 변화양상을 설명함으로써 단점을 보완하였다.
- 3) 기존의 해석은 강체 베어링으로 모델링하여 해석하였으나 본 연구에서는 베어링 강성이 유연할 경우에 대한 수학적 모델을 수립하였다. 그 결과 양방향 베어링 강성이 같은 경우에는 베어링 강성이 무한한 경우와 같은 결과를 나타내지만 강성이 다를 경우에는 두 평면의 진폭이 서로 다르기 때문에 진폭이 0이 되는 속도(self-balancing speed)가 없음을 알 수 있었다.
- 4) 두꺼운 원판인 경우 τ 에 의한 영향이 두 번째 임계속도에서 지배적임을 알 수 있었다. 즉, 두 번째 임계속도 근방에서 τ 가 커질수록 응답이 증가하고 self-balancing-speed가 앞쪽으로 이동하였다. 그리고 β 값이 0° 이거나 180° 인 경우에만 self-balancing-speed가 존재하며, 이때 발생하는 self-balancing-speed는 β 값이 0° 일 때와 180° 일 때 서로 다르다는 것을 알 수 있었다.

이 논문은 1996학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

참 고 문 헌

1. J.C. Nicholas, E.J. Gunter, P.E. Allaire, "Effect of Residual Shaft Bow on Unbalance Response and Balancing of a Single Mass Flexible Rotor - Part I: Unbalance Response", ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 98, No 2, pp. 171~181, April 1976.
2. J.C. Nicholas, E.J. Gunter, P.E. Allaire, "Effect of Residual Shaft Bow on Unbalance Response and Balancing of a Single Mass Flexible Rotor - Part II: Balancing", ASME Journal of Engineering for Power, Vol. 98, No 2, pp. 182~189, April 1976.
3. R. C. Benson, "The Steady-State Response of a Cantilevered Rotor With Skew and Mass Unbalances.", Transactions of the ASME, Vol. 105, pp. 456~460, October 1983.
4. Ting Nung Shiau, "The Residual Shaft Bow Effect on Dynamic Response of a Simply Supported Rotor With Disk Skew and Mass Unbalances", Transactions of the ASME, Vol. 111, pp. 170~178, April 1989.
5. R. D. Flack, J. H. Rooke, J. R. Bielk, E. J. Gunter, "Comparision of the Unbalance Response of Jeffcott Rotors With Shaft Bow and Shaft Runout", Transactions of the ASME, Vol. 104, pp. 318~328, April 1982.
6. Erwin KraMER, "Dynamics of Rotors and Foundations", Springer-Verlag, pp. 37~76, 1993.

1. 운동방정식에 복소좌표계를 도입한 후 생성된 강성계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (k_{xx} + k_{yy})/2 & k_2 &= (k_{x\phi} + k_{y\psi})/2 \\
 k_3 &= k_1 + k_2 R & \Delta k_1 &= (k_{xx} - k_{yy})/2 \\
 \Delta k_2 &= (k_{x\phi} - k_{y\psi})/2 & \Delta k_3 &= \Delta k_1 + \Delta k_2 R \\
 k_4 &= (k_{\phi x} + k_{\psi y})/2 & k_5 &= (k_{\phi\phi} + k_{\psi\psi})/2 \\
 k_6 &= k_4 + k_5 R & \Delta k_4 &= (k_{\phi x} - k_{\psi y})/2 \\
 \Delta k_5 &= (k_{\phi\phi} - k_{\psi\psi})/2 & \Delta k_6 &= \Delta k_4 + \Delta k_5 R
 \end{aligned}$$

2. 운동방정식에 도입된 무차원 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{u}{L} & \Theta &= \theta & \widehat{\delta}_r &= \frac{\delta_r}{L} & \widehat{e}_u &= \frac{e_u}{L} \\
 \widehat{t} &= t \left(\frac{EI}{mL^3} \right)^{\frac{1}{2}} & \widehat{\Omega} &= \Omega \left(\frac{mL^3}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \widehat{I}_p &= \frac{I_p}{mL^2} & \widehat{I}_d &= \frac{I_d}{mL^2} \\
 C &= c \left(\frac{L^3}{EI m} \right)^{\frac{1}{2}} & \widehat{k}_1 &= \frac{k_1 L^3}{EI} \\
 \widehat{\Delta k}_1 &= \frac{\Delta k_1 L^3}{EI} & \widehat{k}_2 &= \frac{k_2 L^2}{EI} \\
 \widehat{\Delta k}_2 &= \frac{\Delta k_2 L^2}{EI} & \widehat{k}_3 &= \frac{k_3 L^3}{EI} \\
 \widehat{\Delta k}_3 &= \frac{\Delta k_3 L^3}{EI} & \widehat{k}_4 &= \frac{k_4 L^2}{EI} \\
 \widehat{\Delta k}_4 &= \frac{\Delta k_4 L^2}{EI} & \widehat{k}_5 &= \frac{k_5 L}{EI} \\
 \widehat{\Delta k}_5 &= \frac{\Delta k_5 L}{EI} & \widehat{k}_6 &= \frac{k_6 L^2}{EI} \\
 \widehat{\Delta k}_6 &= \frac{\Delta k_6 L^2}{EI}
 \end{aligned}$$