

# ON-OFF형 비선형 제어기에 의한 서보 모터의 제어 Servo Motor Control by On-Off Type Nonlinear Controller

김 영 복  
Y. B. Kim

**Key Words** : Nonlinearity(비선형성), On-Off Type Nonlinear Controller(on-off형 비선형 제어기), Feedback Control(피드백 제어), Optimal Control(최적제어)

**Abstract** : In practice, the property of nonlinearity is contained in all physical systems. In other word, all physical systems are nonlinear to some degree. Therefore it is important that we acquires a facility for analyzing feedback control systems with varying degrees of nonlinearity.

To operate the system linearly over wide range of variation of signal amplitude and frequency, the system requires components of an extremely high quality. Such a system would probably be impractical in the view points of cost, space and weight. In this context of view, it is worth noting that the nonlinearities may be intentionally introduced into a system in order to compensate for the effects of other undesirable nonlinearities or to obtain better performance than what could be achieved using linear element only.

A simple example of an intentional nonlinearity is the use of a nonlinear damped system to optimize response in accordance with the magnitude of error. In this paper, an on-off type nonlinear controller is introduced and the applicability and validity of a simple on-off controller are presented by the experimental result.

### 기 호 설 명

$A, B, C$	: System matrix	$K_t$	: Torque constant
$B_f$	: Viscous friction coefficient	$L_a$	: Armature inductance
$e_a$	: Applied voltage to armature	$n$	: Reduction ratio
$e_g$	: Voltage induced in armature	$G_N(a)$	: Describing function
$f[\sigma(k)]$	: Control input with nonlinear component	$Q$	: Weighting matrix for state $x$
$i_a$	: Armature current	$R$	: Weighting matrix for input $u$
$J_a$	: Inertia moment	$R_a$	: Armature resistance
$J$	: Cost function	$T_e$	: Developed torque of motor
$K_a$	: Attenuator gain	$T_L$	: Load torque
$K_b$	: Back emf constant of motor	$a$	: Amplitude
$K_e$	: Error constant	$\tau_a$	: Armature time constant
		$\tau_m$	: Motor time constant
		$\omega$	: Angular speed
		$\theta_0$	: Angular position

접수일 : 1998년 9월 30일  
김영복 : 부경대학교 산학연센터

### 1. 서론

산업의 자동화의 도구로써 서보 모터는 빼 놓을 수 없이 중요한 위치를 확보하게 되었고 이러한 서보 모터의 제어에 관하여 많은 연구가 진행되고 있다. 그런데 서보 모터뿐만 아니라 일반적으로 제어계통에는 비선형요소를 포함하는 경우가 많으며 이러한 비선형요소는 제어계통에 바람직하지 못한 영향을 끼치는 경우가 많다. 그래서 이 비선형요소의 해석은 동작점 부근에서 선형화 하여 해석하는 것이 통상적인 방법이다<sup>1,2)</sup>.

그러나 이러한 비선형요소를 선형화 하여 해석하는 방법과는 달리 비선형요소를 제어에 적극 이용하는 방법들이 있다. 그 중의 대표적인 것이 릴레이이며, 여자(exit)의 특성상 인위적으로 불감대(dead zone)를 갖도록 한다<sup>3-5)</sup>. 본 논문에서는 이러한 비선형 특성을 갖는 릴레이를 제어기로서 적극 이용한다는 의미에서 온-오프 제어기라 부르기로 하며, 이 요소의 불감대 영역을 적당히 선정함으로써 외란 및 잡음에 대해 강인한 제어계를 구성할 수 있다.

또한 일반적으로 제어대상의 제어입력은 그 크기에 제한을 갖는 경우가 대부분이며 이러한 경우에는 온-오프 제어기를 이용하는 것이 더욱 유리하다.

따라서, 본 연구에서는 최적제어이론에 입각한 피드백 제어칙에 의하여 제어입력을 구하고, 이 제어입력을 온-오프 제어기를 통과시키는 방법으로 제어계를 구성하여 퍼스널 컴퓨터로 서보 모터의 실시간 제어를 행하고 그 결과를 검토한다.

### 2. 제어대상의 모델링

직류전동기의 제어에는 전기자제어와 계자제어의 두 가지 방법이 있는데, 본 연구에서는 제어특성이 우수한 전기자제어방식을 채택한다. 직류전동기의 단자전압  $e_a$ 와 각속도  $\omega$ 에 대한 관계를 미분방정식으로 표시하면 다음과 같다.

$$e_a(t) = e_g(t) + i_a(t)R_a + L_a \frac{di_a(t)}{dt} \quad (1)$$

$$e_g(t) = K_b \omega(t) \quad (2)$$

$$T_e(t) = T_L(t) + B_f \omega(t) + J_a \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (3)$$

$$T_L(t) = K_i i_a(t) \quad (4)$$

이것으로부터 인가전압  $E_a$ 에 대한 각속도  $\omega$ 의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\omega(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{R_a B_f (1 + \tau_a s)(1 + \tau_m s) + K_i K_b} \quad (5)$$

식(5)로부터  $\theta_0$ 와  $E_a$ 에 대한 전달함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\theta_0(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i/n}{[R_a B_f (1 + \tau_a s)(1 + \tau_m s) + K_i K_b]s} \quad (6)$$

단,  $\tau_a = L_a/R_a$ ,  $\tau_m = J_a/B_f$ 이다. 이때  $\tau_a \ll \tau_m$ 임을 고려하면 식(6)은 다음의 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\theta_0(s)}{E_a(s)} = \frac{K_f}{s(\tau s + 1)} \quad (7)$$

여기서  $K_f = 1/K_b n$ ,  $\tau = J_a R_a / K_i K_b$ 이다.

위의 전달함수로부터 제어대상을 상태방정식으로 표현하면 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $x = [x_1, x_2]^T = [\theta_0, \omega]^T$ ,  $u = E_a$ 이고 각 계수행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_f}{\tau} \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0] \end{aligned} \quad (9)$$

### 3. On-Off 형 비선형 제어기를 갖는 제어계의 설계

#### 3.1 선형 레귤레이터

식(8)로 나타낸 시스템에 다음과 같이 상태 피드백 제어칙을 도입한다.

$$u = -Kx \quad (10)$$

이때 제어입력  $u$ 는 평가함수

$$J = \int (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (11)$$

를 최소로 하는 값이다. 여기서  $Q$ 는 반정행렬이고,  $R$ 은 정행렬이다. 이때 피드백 계인은

$$K = R^{-1}B^T P = [K_1 \ K_2] \quad (12)$$

와 같이 주어지며, 여기서  $P$ 는 다음의 리카치 방정식의 정해이다.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (13)$$

### 3.2 비선형 제어기

본 논문에서는 비선형제어기로서 on-off 제어를 도입한다. on-off 제어기는 오차 신호가 어떤 크기를 초과하는 순간, 적정한 부호를 가진 전교정 토오크로 동작하였다가 오차가 어떠한 크기 이하로 감소하였을 때에는 모든 교정 토오크는 제거된다. 이와 같이 간단하고 저가인 장치는 온도조절기, 자동차의 전압조정기, 크기와 무게가 매우 중요한 요소가 되는 항공기나 우주선 제어 등에 실제로 많이 사용되고 있으며 고도의 제어정도를 요하는 제어대상에 대해서는 마이크로 프로세서의 도입으로 그 제어 알고리즘의 실현이 더욱 용이하게 되었다. on-off 제어기는 비선형 요소를 포함하고 있으므로 이러한 비선형 요소를 포함한 제어계를 해석하기 위해 본 논문에서는 기술함수(describing function)법을 이용한다.

### 3.3 기술함수법에 의한 자여진동(limit cycle)의 해석<sup>1,2)</sup>

비선형 시스템에 발생하는 주기진동을 대별하면 자여진동과 강제진동이 있다. 본 논문에서는 입력으로서 정현파 입력은 고려하고 있지 않으므로 자여진동에 대해서만 고찰한다.

원래 기술함수법은 비선형 시스템을 대상으로 하여 개발된 방법이다. Fig. 1에 나타낸 제어계를 대상으로 하여, 제어계의 안정성 해석을 위해 기

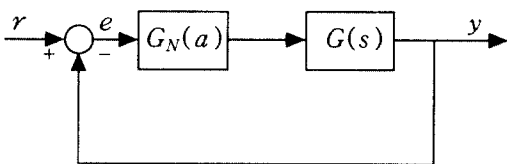


Fig. 1 A Control system with nonlinearity

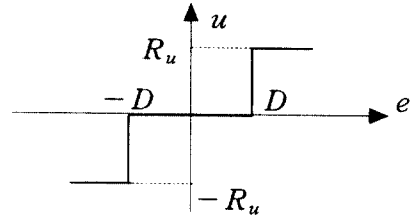


Fig. 2 Relay with dead zone

술함수법을 적용한다. Fig. 1에서  $G_N(a)$ 는 비선형 요소의 기술함수이고  $G(s)$ 는 선형요소의 전달함수이다. 본 논문에서 고려하는 비선형요소는 Fig. 2에 나타낸 불감대(dead zone)를 갖는 릴레이이다. 따라서 이와 같은 비선형요소에 대한 기술함수는 다음 식과 같이 주어진다.

$$G_N(a) = \frac{4R_u}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{D}{a}\right)^2}, \quad a > D \quad (14)$$

여기서  $a$ 는 입력신호의 진폭을 나타낸다. 이러한 비선형 요소에 대한 입력과 출력과의 관계를 이산형으로 나타내면 다음 식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u(k) &= f[\sigma(k)] \\ \sigma(k) &= K_1[x_1(k) - Ref] + K_2 x_2(k) \end{aligned} \quad (15)$$

$$f[\sigma(k)] : \begin{cases} R_u, & \text{if } \sigma(k) > D = P_1 \\ -R_u, & \text{if } \sigma(k) < -D = P_2 \\ 0, & \text{if } -D = P_2 < \sigma(k) < D = P_1 \end{cases}$$

식(15)에서  $Ref$ 는 비선형요소의 입력을 나타낸다. Fig. 1에 나타낸 제어계의 특성방정식은  $1 + G_N(a)G(s) = 0$ 로 표현되고,  $s = j\omega$ 라 두면

$$G(j\omega) = -\frac{1}{G_N(a)} \quad (16)$$

로 된다. 이때,  $G(s)$ 의 nyquist 궤적과  $-1/G_N(a)$ 의 궤적의 상대적 위치로부터 안정성 판별이 가능하게 된다<sup>1,2)</sup>. 즉,  $G(s)$ 의 궤적이 복소평면에서 모든  $a$ 에 대해  $-1/G_N(a)$ 의 우측에 그려질 때 제어계는 점근안정하며 자여진동은 발생하지 않게 된다. Fig. 3은 본 논문에서 고려하고 있는 제어계의 선형요소와 비선형요소의 궤적을 나타내고 있다. 진폭의 크기를 나타내는 모든  $a$ 에 대해, 비선형요소에 대한 기술함수의 궤적이 선형요소의 nyquist 궤적의 좌반면에 있으므로 제

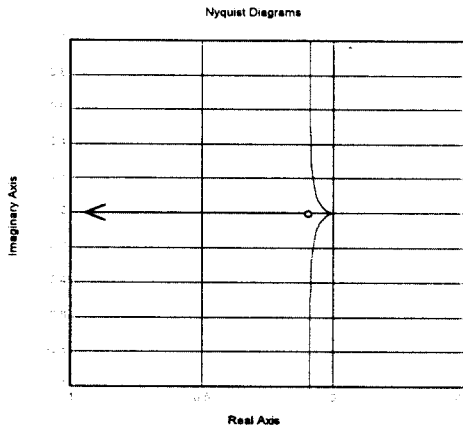


Fig. 3 Curves of  $G(s)$  and  $-1/G_N(a)$

어제는 안정하며 자여진동은 발생하지 않음을 알 수 있다. 이때 불감대  $D=0.1$ 로 하였다.

4. 제어계의 구성

본 연구에서는 선형레귤레이터만을 갖는 경우와 on-off형의 비선형 제어기를 갖는 경우에 있어서의 제어성을 평가하기 위하여 Fig. 4와 같이 제어계를 구성한다. 그리고 직접적으로 관측되지 않는 제어대상의 상태를 추정하기 위하여 식(17)으로 나타내어지는 동일차원 관측기를 도입한다.

$$\hat{\dot{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\{y(t) - C\hat{x}(t)\} \tag{17}$$

이때,  $\hat{x}(t)$ 는 관측기의 상태로 제어대상의 상태  $x(t)$ 의 추정치이며,  $L$ 은  $A+LC$ 가 안정하도록 하는 계인이다.

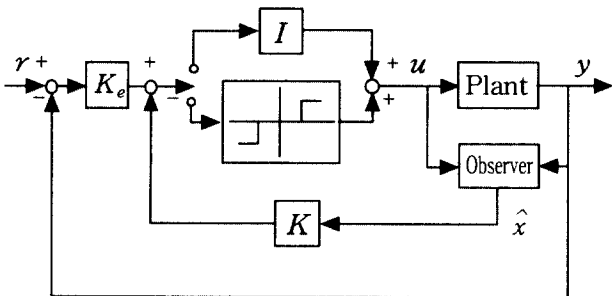


Fig. 4 Block diagram of control system

5. 응답실험 결과 및 고찰

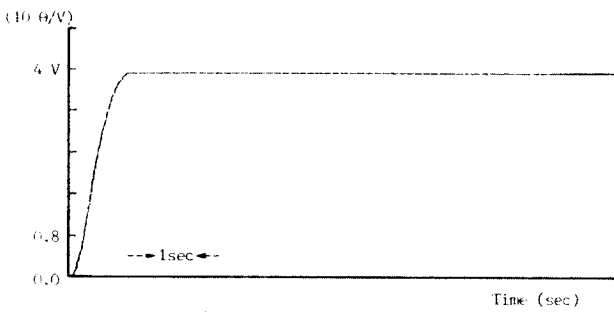
본 논문에서 제어대상으로 하는 서보 모터의

Table Parameter values of controlled system

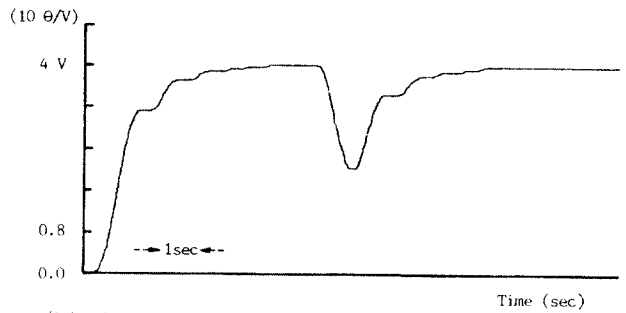
Parameter	Symbol	Value	Unit
Armature Resistance	$R_a$	3.20	[ $\Omega$ ]
Armature Inductance	$L_a$	$8.6 \times 10^{-3}$	[H]
Inertia Moment	$J_o$	$9.9 \times 10^{-6}$	[kgm <sup>2</sup> ]
Damping Coefficient	$B$	0.00	[Nm/(rad/s)]
Emf. Constant	$K_b$	$60 \times 10^{-3}$	[V/(rad/s)]
Torque Constant	$K_t$	$3.3 \times 10^{-3}$	[Nm/A]
Proportional Gain	$K_p$	1.00	
Pre-Amp. Gain	$K_p$	29.50	
Attenuator Gain	$K_a$	0.06	
Gear Ratio	$n$	30.00	
Error Constant	$K_e$	5.70	[V/rad]

각 파라미터 값들은 위의 Table과 같다. 이때, 피드백 계인  $K=[K_1, K_2]$ 는 식(11)의 평가함수를 최소로 하는 값으로  $Q=C^T C$ ,  $R=5.0$ 으로 두고 식(13)의 리카치 방정식의 해를 구해 이것으로부터  $K_1=1.55$ ,  $K_2=0.23$ 을 구하였다.

또한 관측기의 계인  $L$ 은  $A-LC$ 가 안정하도록  $L=[1.25, 0]^T$ 로 하였다. 이러한 값들을 이용하여 선형 및 비선형 레귤레이터로 제어계를 구성하고 계단상의 입력과 외란 입력에 대한 응답 실험결과를 Fig. 5 ~ Fig. 6에 나타낸다. 여기서 Fig. 5는 선형 레귤레이터만을 갖는 경우의 제어 출력과 제어입력을 나타낸다. 그리고 Fig. 6은 on-off 형의 비선형 제어기를 갖는 경우의 응답특성을 나타낸다. 위의 두 가지 경우를 비교해 볼 때 과도상태에서의 출력특성은 선형레귤레이터로 제어를 행한 경우가 보다 양호한 제어성을 얻을 수 있음을 알 수 있으나, 후자의 경우는 제어 입력의 크기에 제한(  $[\pm 2.5V]$  )이 주어져 있다는 것에 주목해야 한다. 따라서 이와 같이 제어 입력의 크기에 제한이 주어질 경우에는 후자의 경우가 바람직하다고 할 수 있을 것이다. Fig. 7은 제어계에 계단상의 외란입력이 존재할 경우에 있어서의 출력특성을 나타내고 있다. 선형 레귤레이터(a)의 경우는 적분보상기가 없으므로 당연히 정상상태에서 오차가 존재한다. 그러나 비선형 레귤레이터(b)의 경우에는 적분보상기가 없더라도 정상상태에서 편차없이 외란입력에 대해 강인한 제어성을 달성할 수 있음을 알 수 있다.

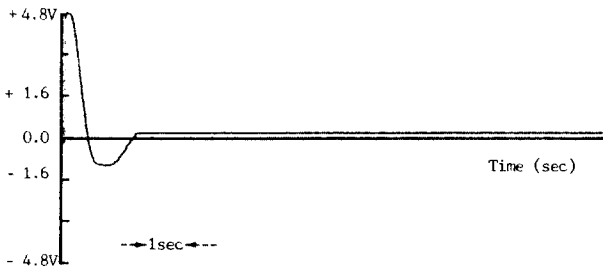


(a) Controlled output



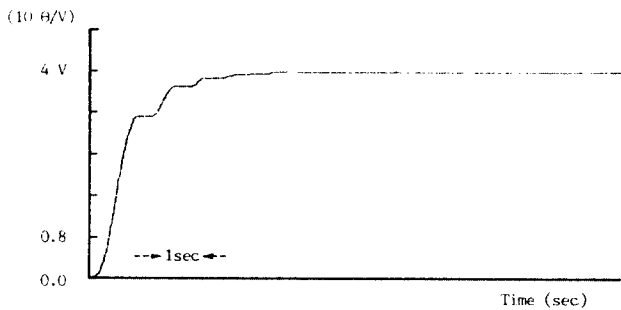
(b) Controlled output (Nonlinear Regulator)

Fig. 7 Step responses with disturbance

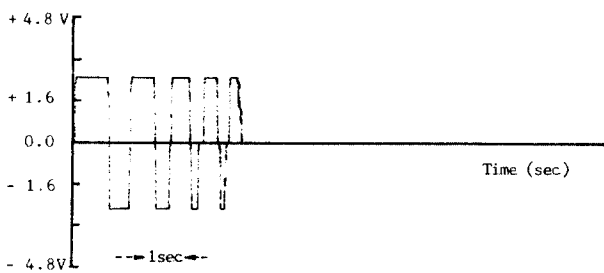


(b) Control input

Fig. 5 Step response (Linear Regulator)

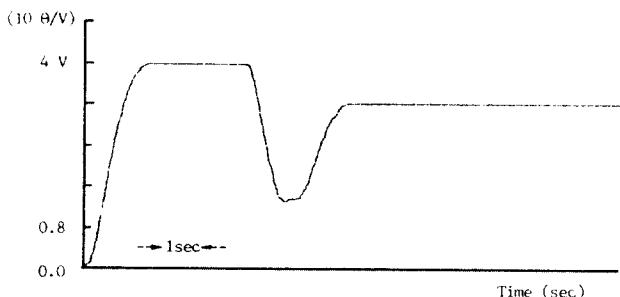


(a) Controlled output



(b) Control input

Fig. 6 Step response (Nonlinear Regulator)



(a) Controlled output (Linear Regulator)

## 6. 결 론

일반적으로 제어대상에는 비선형적인 요소가 존재하며 실제 제어를 행하는데 있어서도 제어입력의 크기에 제한이 주어지는 것이 대부분이다.

본 논문에서는 물리시스템에 일반적으로 존재하는 비선형적 요소를 제어에 적극적으로 이용하고 제어입력에 주어지는 제약조건등을 고려해야 한다는 관점에서 비교적 단순한 형태의 on-off 형의 제어기를 도입하여 서보 모터의 제어에 응용하였다. 실험을 통한 결과로부터 on-off 형의 비선형 제어기를 갖는 제어계의 경우에 있어서 외란입력에 대해 강인한 제어성능이 달성될 수 있음을 확인하였다. 이러한 결과는 서보 모터뿐 만 아니라 on-off 형의 비선형 솔레노이드 밸브등의 제어에도 적극적으로 응용할 수 있다.

## 참고문헌

1. S. M. Shinner, "Modern Control System Theory and Application", Addison Wesley, pp. 369~453, 1978
2. 平井, 池田, "非線型制御システムの解析", 오ーム社, 1986
3. K. Ogata, "State Space Analysis of Control System", Prentice-Hall, pp. 336~369, 1967
4. Ernest O. Doebelin, "Control System Principles and Design", John Wiley & Sons, pp. 221~257, 1985
5. D. M. Auslander et. al., "Direct Digital Process Control", Proc. IEEE, Vol. 66, pp. 199~208, 1978