

비선형 $k-\epsilon$ 난류모델에 의한 원추형 디퓨저 유동해석

Numerical Simulation of a Conical Diffuser Using the Nonlinear $k-\epsilon$ Turbulence Model

이 연 원

Y. W. Lee

Key Words : Conical Diffuser(원추형 디퓨저), Nonlinear $k-\epsilon$ Turbulence Model(비선형 $k-\epsilon$ 난류 모델)

Abstract : A diffuser, an important equipment to change kinetic energy into pressure energy, has been studied for a long time. Though experimental and theoretical researches have been done, the understanding of energy transfer and detailed mechanism of energy dissipation is unclear. As far as numerical prediction of diffuser flows are concerned, various numerical studies have also been done. On the contrary, many turbulence models have constraint to the applicability of diffuser-like complex flows, because of anisotropy of turbulence near the wall and of local nonequilibrium induced by an adverse pressure gradient. The existing $k-\epsilon$ turbulence models have some problems in the case of being applied to complex turbulent flows. The purpose of this paper is to test the applicability of the nonlinear $k-\epsilon$ model concerning diffuser-like flows with expansion and streamline curvature. The results show that the nonlinear $k-\epsilon$ turbulence model predicted well the coefficient of pressure, velocity profiles and turbulent kinetic energy distributions, however the shear stress prediction was failed.

1. 서 론

디퓨저는 운동에너지를 압력에너지로 변환하는 장치이다. 디퓨저의 중요성은 유체기계에서 잘 알 수 있는데, 오래전부터 실험적, 이론적 연구가 행해져왔다. 그러나 많은 실험적, 이론적인 연구에도 불구하고 디퓨저내부의 에너지전달과 散逸의 상세한 機構에 대한 이해는 아직 불완전한 상태이다. 한편, 수치계산적인 연구로는 최초에는 적분방정식과 모델화한 미분방정식을 이용하였는데, 그러한 해석은 하류의 흐름이 상류에 미치는 영향을 무시하고 있기 때문에 디퓨저흐름과 대해서 복잡한 압력구배의 영향을 적절히 설명하지 못하였다.

최근, 저Reynolds수 $k-\epsilon$ 에 의한 Lai 등¹⁾의 계산이 있으며, 벽근방에 대한 난류장의 비등방성과 역압력구배의 존재에 따른 국소평형의 붕괴 등의 원인으로 근본적인 개선은 보여주지 못하였다.

Bradshaw의 연구에 따르면, 복잡난류는 이차변형율(extra strain rate)가 존재해서 난류장에 중요한 영향을 미치기 때문에 많은 난류모델의 적용성을 無力化한다²⁾. 따라서, 디퓨저흐름은 난류의 수치계산에 있어서 중요한 연구대상의 하나이다.

본 논문의 연구목적은 Cartesian속도성분을 사용한 비엇갈림격자계에 기초한 3차원범용유동해석코드, soffia 프로그램³⁾을 사용하여 표준 $k-\epsilon$ 모델에 의한 디퓨저계산의 적용성을 검토하고, 그 문제점을 비선형 $k-\epsilon$ 모델로 해결할 수 있는지 검토하는 것이다. 이러한 이유로 입구에서 충분히 발달된 유동장을 가지는 면적비 4:1, 확대각도 8°의 원추형디퓨저에 관한 Azad 등⁴⁾의 실험이 선택되었다. 이러한 유동장은 입구에서 강한 역압력구배와 유선곡률이 동반된 복잡난류유동이다.

2. 지배방정식과 난류모델

2.1 표준 $k-\epsilon$ 난류모델

정상비압축성유동의 지배방정식을 텐서형식으로

접수일 : 1998년 5월 23일

이연원 : 부경대학교 기계·자동차공학부

쓰면, 다음과 같이 된다.

연속방정식

$$\frac{\partial \rho U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

운동방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

난류에너지 방정식

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \epsilon \quad (3)$$

난류에너지 소산율 방정식

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\epsilon}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \\ & + \frac{\epsilon^2}{k} \left[C_{\epsilon 1} \frac{P_{ks}}{\epsilon} + C_{\epsilon 1} \frac{P_{km}}{\epsilon} - C_{\epsilon 2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,

$$P_k = P_{ks} + P_{km} = -\overline{\rho u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (5)$$

$$\overline{\rho u_i u_j} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

단, $\sigma_k=1.0$, $\sigma_\epsilon=1.3$, $C_{\epsilon 1}=1.44$, $C_{\epsilon 2}=1.92$, $C_\mu=0.09$, U_i 는 평균속도, $\overline{u_i}$ 는 변동속도, P 는 압력, μ 는 점성계수, ρ 는 밀도, P_k 는 k 의 생성률이다.

Cartesian좌표계의 방정식을 일반곡선좌표계로의 변환과정에서 강보존형의 방정식형으로 쓰기 위하여 다음과 같은 기본적인 metric identity를 사용한다.

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) \equiv 0 \quad (7)$$

여기서, J 는 Jacobian이다. $J = | \partial(\xi, \eta) / \partial(x, y) |$, J 는 원주좌표계의 Jacobian, $J_2 = | \partial(\xi, \eta) / \partial(x, r) |$ 로의 변화가 가능하고, 즉 $J = r J_2$ 로 된다. 위의 변환식과 편미분의 chain rule을 사용하여 일반식을 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} U_j \Phi \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\Gamma_{eff} J \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + J \cdot S \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, S 는 생성항, Γ_{eff} 는 유효점성계수이다. 상세한 것은 참고논문3)에 상세히 기술되어져 있다.

2.2 비선형 k-ε 난류모델

표준 k-ε 난류모델의 문제점을 해결하기 위하여 제안된 비선형 k-ε 난류모델은 일반적으로 수직 응력의 표현이 다음 수식과 같이 표현되는 이차의 비선형항이 추가적으로 주어져 유동장에 따라서는 밝은 전망을 제시하고 있다.

$$\begin{aligned} \overline{\rho u_i u_j} = & \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & + \frac{k}{\epsilon} \mu_t \sum_{m=1}^3 C_m \left(S_{mij} - \frac{1}{3} S_{m\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$S_{1ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} \quad (10)$$

$$S_{2ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + \frac{\partial U_m}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right) \quad (11)$$

$$S_{3ij} = \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \frac{\partial U_m}{\partial x_j} \quad (12)$$

축대칭 디퓨저흐름에서 비선형항의 효과를 평가하기 위하여, order of magnitude법에 의해 간략화면, Reynolds 응력은 다음과 같이 표현된다.(Fig. 1 참조)

$$\text{Assumption ; } \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial U}{\partial x} \ll \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\overline{uu} = -\nu_t \left(2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} k + \frac{k}{\varepsilon} \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{2}{3} C_1 - \frac{1}{3} C_3 \right) \right] \quad (13)$$

$$\overline{vv} = -\nu_t \left(2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{2}{3} k + \frac{k}{\varepsilon} \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \left(-\frac{1}{3} C_1 + \frac{2}{3} C_3 \right) \right] \quad (14)$$

$$\overline{ww} = -\nu_t \left(2 \frac{V}{r} \right) + \frac{2}{3} k + \frac{k}{\varepsilon} \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \left(-\frac{1}{3} C_1 - \frac{1}{3} C_3 \right) \right] \quad (15)$$

$$\overline{uv} = -\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (16)$$

위 방정식의 표현들로부터 수직운동력은 이차의 비선형항들이 나타나 응력분배機構가 개선됨을 알 수 있다. 그러나 전단운동력은 동일함을 주목할 필요가 있다.

3. 수치계산

3.1 일반좌표계 및 격자계

복잡한 유동장의 수치해석에 있어서는 비직교곡선좌표계의 유한체적법이 자주 사용되고 있다. 이것은 일반적으로 종속변수로서 Cartesian 성분 혹은 反變(contravariant)성분의 채택여부에 의해 구분할 수 있고, 또 종속변수의 정의점에 의해 엇갈림격자계 혹은 비엇갈림격자계로 구분된다. 反變성분을 종속변수로 해서 채용하면 Christoffel 기호의 부가적인 항이 나타나 방정식은 약보존형으로 된다. 본 soffia 코드에서는 보다 간단한 구조이고, 강보존형으로 되는 Cartesian 속도성분의 좌표계를 사용하였다.

격자에 대해서는 모든변수를 격자의 중심부에 정의한 비엇갈림격자계를 선택하였다. 진동적인 압력장을 피하기 위해, 격자면의 flux를 계산할 때, Peric³⁾의 운동량보간법이 사용되어졌다.

3.2 수치해법 및 경계조건

지배방정식의 이산화는 계산공간에서의 균일격자에 대해서 적분해서 구한다. 운동방정식의 대류·확산항은 hybrid scheme을 사용하였고, contravariant

metric tensor의 비직교항은 비직교격자에 대해서 양(正, +) 혹은 음(負, -)으로 되기 때문에 생성항으로 취급하였다. 선형화된 식은 SIMPLE algorithm을 채용한 TDMA의 線順法에 의해서 계산된다. 축대칭 디퓨저 유동장은 모두 네가지의 경계조건이 필요하다. 즉, 입구, 출구, 대칭축, 고체벽이다. 입구에서의 축방향 속도와 난류에너지 k에 있어서는 실험 data⁴⁾를 이용한다. V는 0를, ε은 평형가정으로 부터의 추정치 (ε = κ^{1.5}/CR_{in})를 적용한다. 여기서 C는 일정상수이다. 벽면에서 속도 U와 난류운동에너지 k에 관해서는 벽법칙을 적용하였고, ε은 국소평형 가정관계로 부터 유도된 식(ε = C_μ^{0.25}k^{1.5}/κy_p)을 적용하였다. 여기서, κ(=0.41)는 Karman 상수이고, y_p는 벽으로부터 최초의 격자점까지의 거리이다.

한편, 비선형모델에 의한 계산의 경우에는 벽법칙 대신에 벽에서의 점근적인 특성을 최대한 살리면서 저 Reynolds 모델보다 경제적인 Chen and Patel⁶⁾의 two layer model을 사용하였다. 적용된 완화계수는 0.3~0.6이고, 격자수는 120×30이다. Fig. 1은 계산대상이며 다섯단면에서의 data로서 결과를 주로 사용하게 된다. 직경(D)와 평균속도(U_m)을 기본으로 한 Reynolds 수는 1.15×10⁵으로 된다.

4. 결과 및 고찰

4.1 k-ε model의 interlinkage and feedback

복잡난류에 관한 Stanford회의⁷⁾의 결론의 하나는 진단난류에 관계하는 역압력구배의 효과는 Reynolds stress model을 포함하는 대부분의 난류모델에 의해서 잘 예측할 수 없다는 것이다. 그 이유는 ε 방정식에서 ε의 값이 작게 계산되고, 전단운동력 - \overline{uv} 가 실험보다도 크게 계산되기 때문이다. 이것은 Bradshaw⁴⁾의 결론과도 일치한다. ε에 관해 개선을 도모하기 위해서, k-ε 모델의 interlinkage and feedback의 구조에 관해서 고찰해본다.

Fig. 2에 나타난 것과 같이 ε의 증가는 (5)식에 의해서 직접적으로 - \overline{uv} 와 length scale L(=k^{1.5}/ε)를 감소시킨다.

또, k를 감소시켜 - \overline{uv} 와 length scale(L)을 작게 한다. 나아가서 생성항, P_k를 감소시켜 k를 감소시키며 최종적으로 - \overline{uv} 를 감소시킨다. 이러한 강한 interlinkage and feedback system 때문에 ε의 생성이 상대적으로 조금만 높아지더라도 예측에는 큰 영향을 미칠 수 있을 것으로 판단된다.

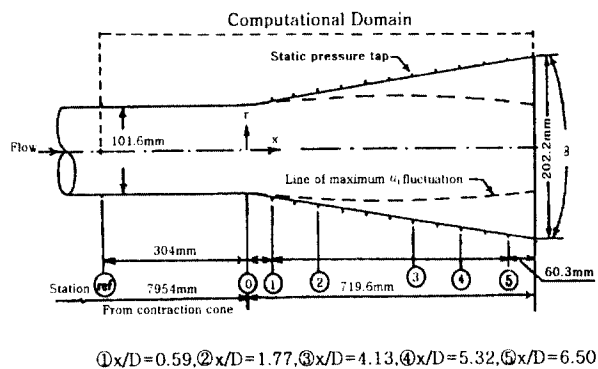


Fig. 1 Diffuser geometry (D = 2R = 101.6[mm])

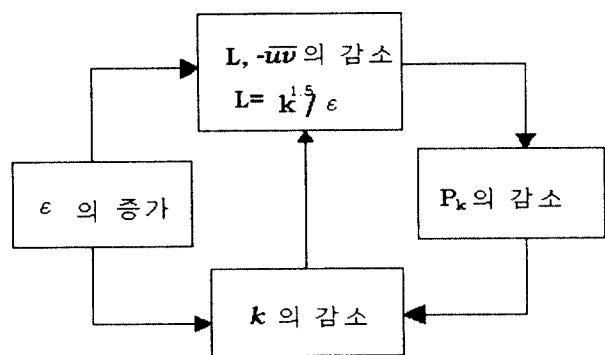


Fig. 2 Intelinkage and Feedback of k-ε model

4.2 ε의 입구 경계조건에 대한 영향

입구의 경계조건으로서 속도 및 난류에너지는 실험치를 대입하기 때문에 ε의 내용이 문제로 된다. 앞에서 기술한 고찰을 상기하면 입구에 대한 ε의 분포는 하류의 평균속도장 및 난류량의 정확한 예측에 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있다. 최적의 결과를 얻기 위해서는 물리적으로 타당한 ε의 분포를 대입할 필요성이 대두된다. Fig. 3은 입구의 length scale 변화에 의한 축방향 속도 U와 난류에너지 k의 수치계산 결과이다. (b)의 결과가 가장 실험결과와 일치하여 입구조건 값으로 선택했다.

4.3 표준 k-ε 모델에 의한 계산결과

Fig. 4는 전단변형률(∂U/∂r)을 나타내고 있다. 입구에서는 충분히 발달한 원관흐름과 같은 경향을 보이지만, 후류로 갈수록 역압력구배의 영향으로, 다른곡률을 가진다. 즉, 중심에서 최대값까지 증가한 후 서서히 작아지고 벽근방에서 다시 증가한다. 이러한 경향은 역압력구배가 있는 평판의 평균속도장에서도 같은 경향이 보여진다. 전단변형률(∂U/∂r)은 운동에너지의 생성을 통해서 평균장과 난류장의 주된 연결고리이기 때문에 난류에너지 k의 분포도 충분히 발달한 원관난류와 달라져 있다.

또, 이 값은 입구의 벽근방에 있어서 실험보다 작게 예측되고 있으나, 최대값에 대한 변화의 전체적인 경향은 전 디퓨저구간에서 잘 예측되고 있다.

Fig. 5는 압력계수의 분포이다. 실험결과와 계산 결과는 디퓨저 후반부에 감에 따라 차이가 서서히 크게되고 있다. 디퓨저 입구에서는 압력구배가 급하게 변한다. 이러한 급격한 압력구배의 변화가 복잡한 유동장을 생성한다. Fig. 6은 축대칭의 유일한 전단응력 $-\overline{uv}$ 의 분포를 보여주고 있다. 하류로 감에 따라 실험보다 최대 25%정도 크게 예측되어져 있다. 이와같은 경향은 역압력구배가 있는 평판 경계층에 있어서도 존재하는 것이 Rodi 등⁸⁾에 의해서 지적되어져 있다. 2차원 축대칭의 생성항은 다음과 같이 쓰여진다.

$$P_k = -\overline{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - (\overline{uu} - \overline{vv}) \frac{\partial U}{\partial x} - (\overline{ww} - \overline{vv}) \frac{V}{r} \quad (17)$$

여기서 제일 중요한 항은 일반적으로 전단응력에 의한 생성이지만, 디퓨저의 경우, ∂U/∂x에 관한 수치계산의 결과를 보여준 Fig. 7과 Singh등⁹⁾을 참고하면, $\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial x}$ 는 무시할 수 없는 항이며, 특히 입구영역에서는 $\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial x}$ 가 무엇보다도 중요하다고 생각된다. 그러나, 大町¹¹⁾의 후향계단흐름의 계산에서도 지적된 것과 같이 등방 k-ε의 경우는 $\overline{uu} \approx \overline{vv} \approx \overline{ww}$ 로 되고, 수직응력에 따른 생성은 대부분효과가 없다. 이것은 등방 k-ε 문제점의 하나이다. Rodi 등은 난류에너지散逸率ε의 생성물을 증가시키기 위해서 Hanjalic 등¹⁰⁾의 개념을 이용했다. 이 개념은 난류에너지생성항 P_k에 대한 irrotational contribution(수직응력에 의한 생성)에 착안해서, ε 방정식에 있어서 이러한 부분에 대해서는 irrotational part 곱해지는 C_{ε1}(=1.44)의 대신으로 C_{ε3}(=4.44)을 이용하고 있다. 또, $(\overline{uu} - \overline{vv}) = 0.33k$ 의 실험적 지식을 이용한다.

그러나, C_{ε3}의 상대적인 크기 때문에 표준 k-ε 모델보다 감속유동장에 민감하지만, 좌표의 회전에 대한 불변성을 가지고 있지않다는 사실에 주의하지 않으면 안된다. Fig. 7은 ∂U/∂x에 관한 수치계산의 결과를 보여주고 있다. 압력구배가 급격히 변화하는 입구에서 크고, 하류로 감에 따라 서서히 작아진다. 여기서 주의해야 할 것은 벽근방에서 양(+)의 값이 되는 것은 디퓨저의 벽을 따른 구배가 아니고 디퓨저 축에 따른 구배이기 때문이다.

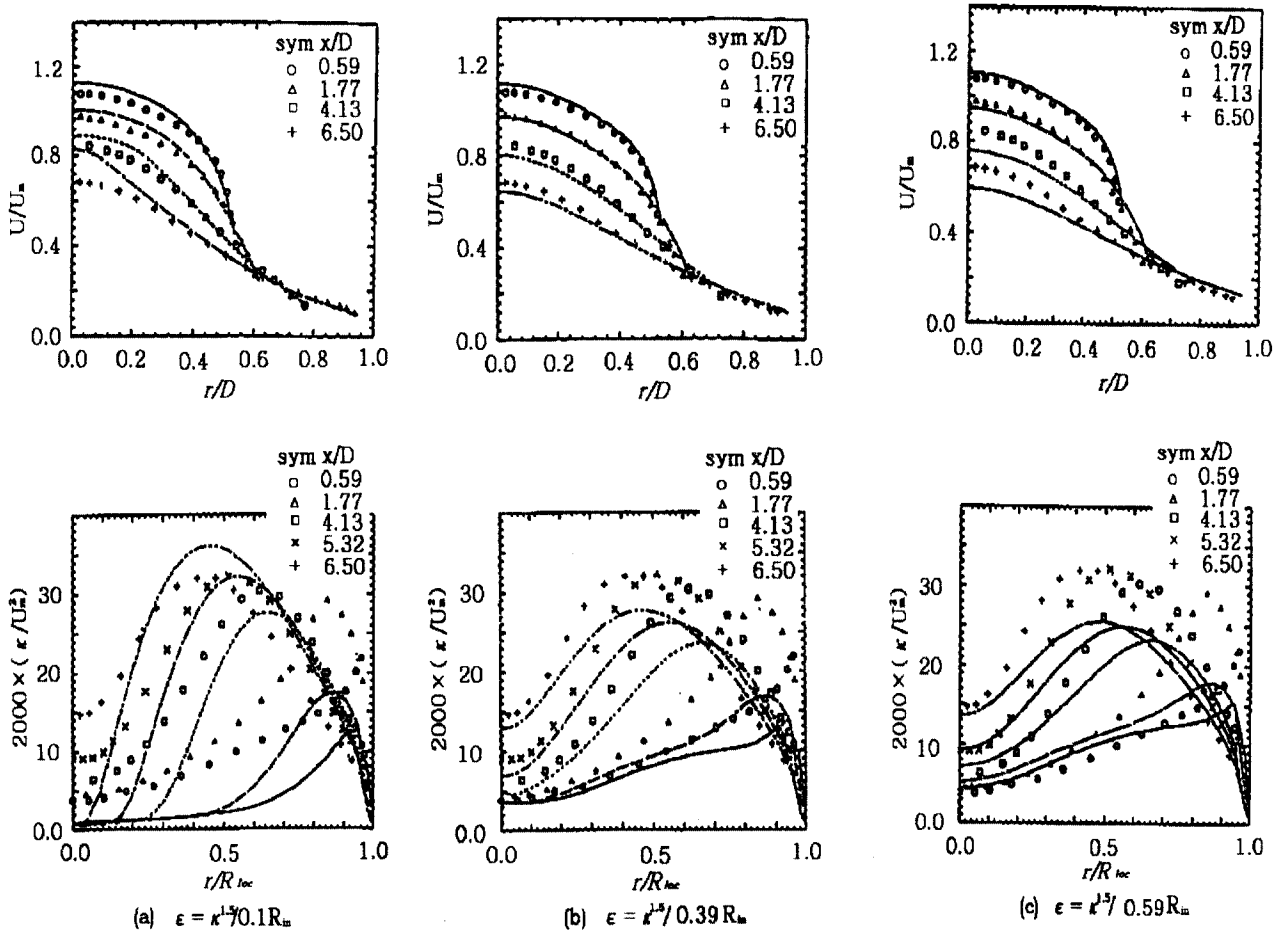


Fig. 3 Radial distribution of axial velocity and turbulent kinetic energy
(lines = simulation, symbols = experiment)

한편, 불변성을 가지는 비선형(비등방) $k-\epsilon$ 모델은 수직응력의 이방성의 예측성이 표준(등방 혹은 선형) $k-\epsilon$ 모델보다 우수하므로 위식의 수직응력

에 의한 생성항의 효과가 작동하게 됨에 따라 상당히 개선될 가능성이 있다. 그러나, 보다 중요한 것은 상대적인 ϵ 증가임을 명심하여야 한다.

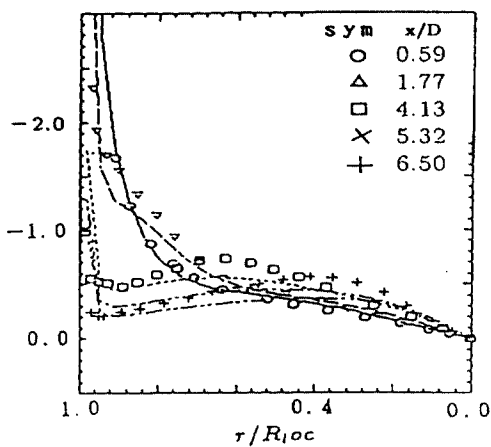


Fig. 4 Shear strain rate

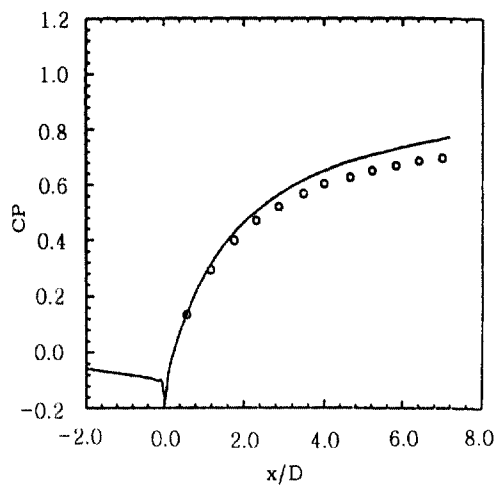


Fig. 5 Coefficient of pressure

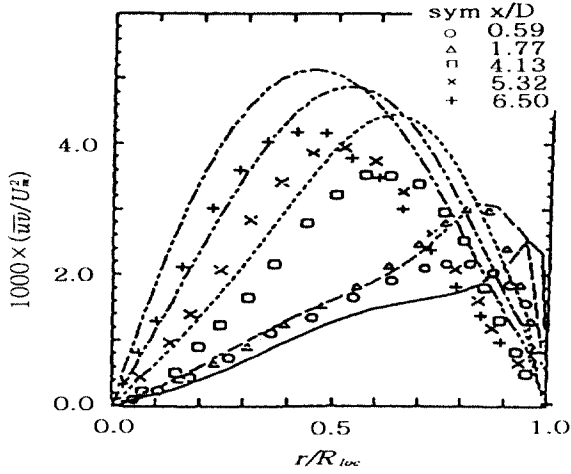


Fig. 6 Shear stress

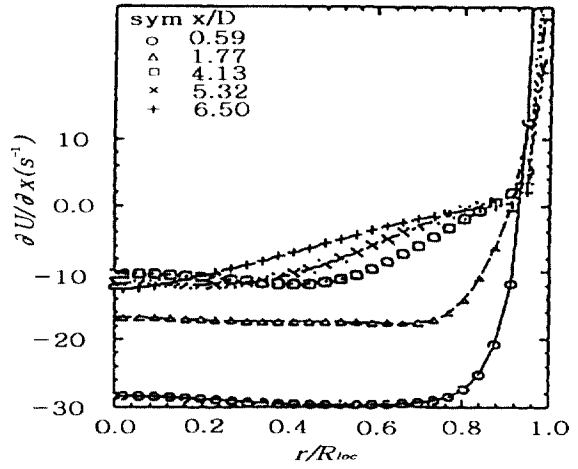
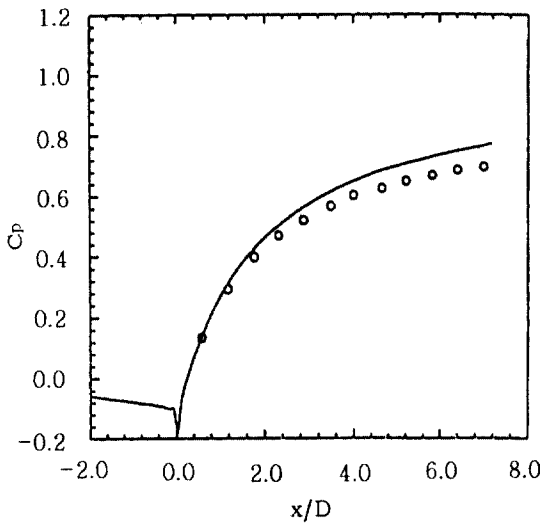
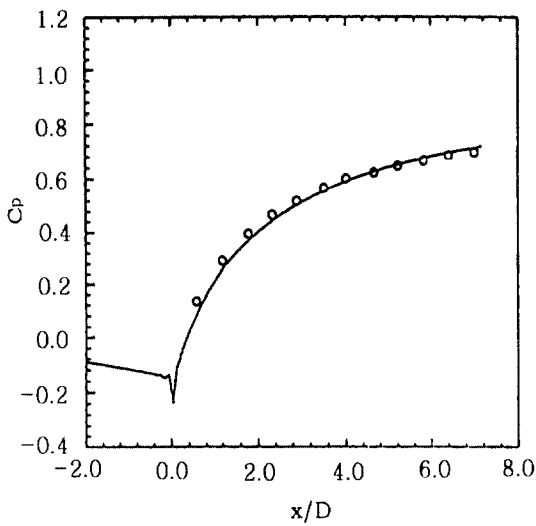


Fig. 7 Normal strain rate by simulation

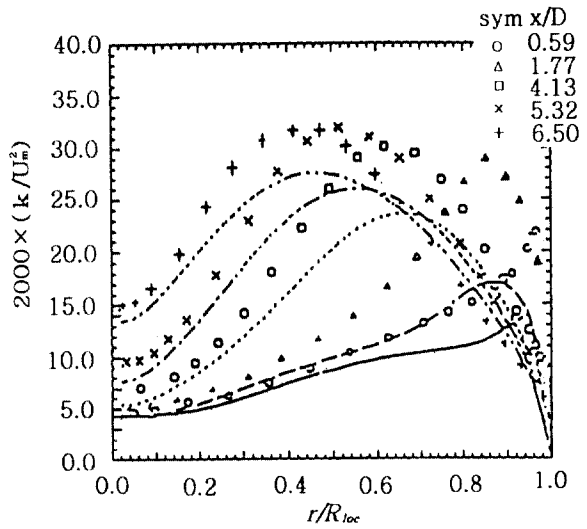


(a)isotropic model

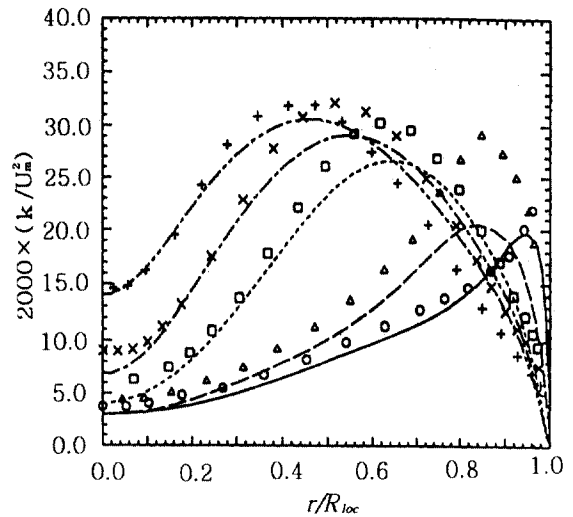


(b)anisotropic model

Fig. 8 Coefficient of pressure

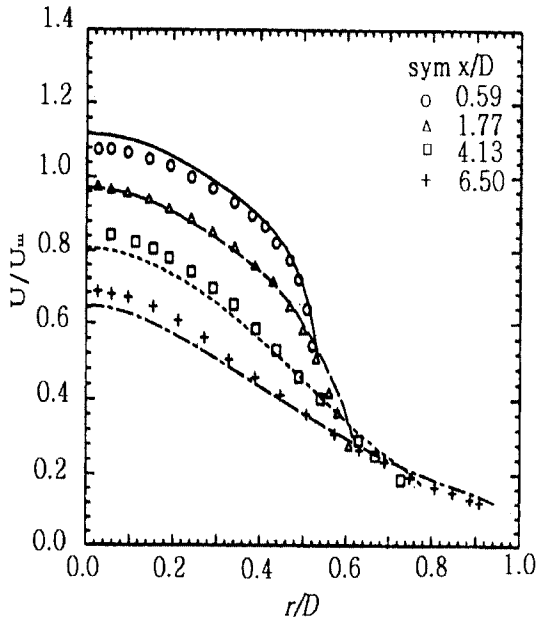


(a)isotropic model

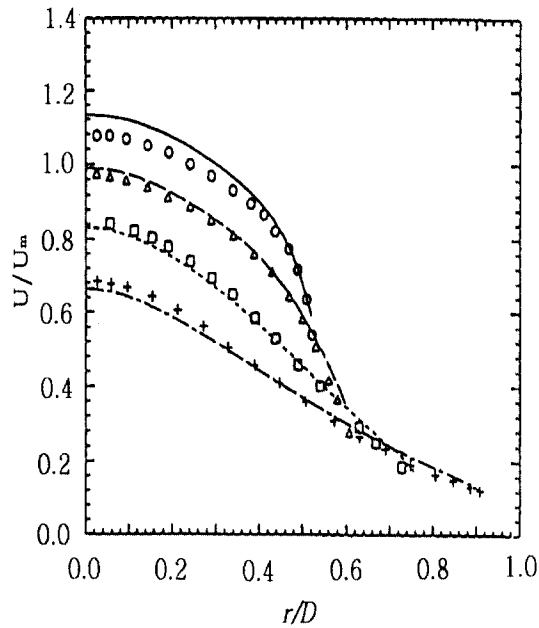


(b)anisotropic model

Fig. 9 Radial distribution of turbulent kinetic energy



(a)isotropic model

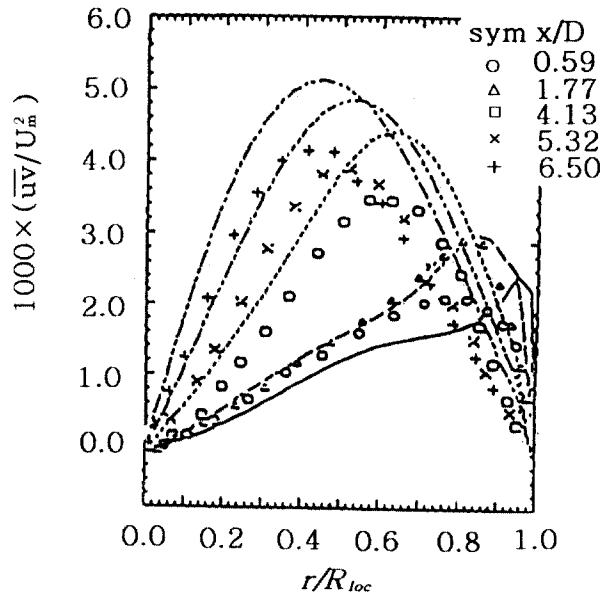


(b)anisotropic model

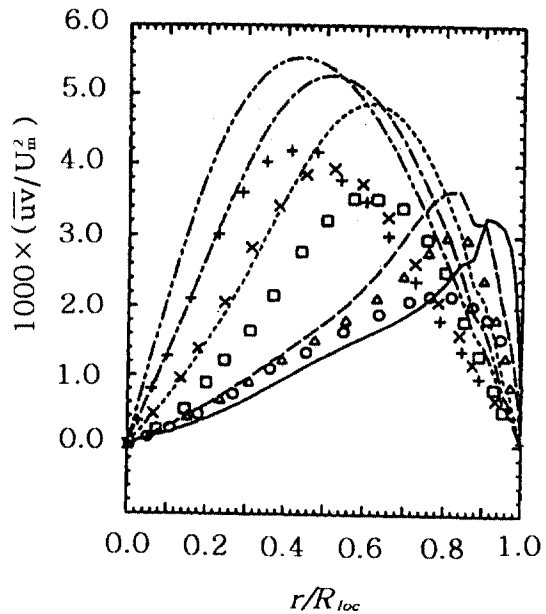
Fig. 10 Radial distribution of axial velocity

4.4 비선형 k-ε 모델에 의한 계산결과

2.2절에서 논의된 비선형모델은 이차의 비선형항에 의한 분배기구에 의한 수직응력을 개선을 가져온다는 것이 이미 확인되어져 있다. 이러한 사실은 직접적으로 압력계수와 난류에너지에 분포가 상당부분 개선되었다. 또한 Fig. 9, 10이 보여 주듯이 난류에너지 분포 및 속도분포도 상당히 개선되었다.



(a)isotropic model



(b)anisotropic model

Fig. 11 Shear stress

다. 그러나, order of magnitude 해석에서 예견하였듯이 전단응력은 전혀 개선되지 않았음을 Fig. 11이 보여주고 있다.

5. 結 論

표준 k-ε 모델에 의한 원추형 디퓨저계산에서

생기는 문제점을 해결하기 위한 방편으로 비선형 $k-\epsilon$ 모델에 의한 수치예측을 행하였다. 이차의 비선형항의 존재에 의한 수직응력분배기구의 개선을 통해 인위적으로 수정하지 않아도 압력계수, 난류 에너지 및 속도분포가 개선됨을 확인할 수 있었다. 그러나 전단응력은 내재적인 물리적 分配機構 허약성으로 인하여 좋은 예측결과를 줄 수 없음을 확인하였다. 이러한 결과들은 어떻게 개선할까 하는 문제에 대해 개선방향을 새롭게 제시하고 있다.

参考文献

1. Lai Y. G., So R. M. C. and Hwang B. C., "Calculation of Planar and Conical Diffuser Flows", AIAA J., Vol. 27, pp. 542~548, 1989
2. Bradshaw P., "REVIEW-Complex Turbulent Flows", J. Fluids Engng, pp. 146~154, 1975
3. 이연원, 조용수, 정부섭, "유동정보해석 시뮬레이터(SOFFIA) 개발", 부산공업대학교 열유체공학연구소 연구논문집 제1집, pp. 37~52, 1994
4. Azad R. S. and Kassab S. Z. "Turbulent Flow in a Conical Diffuser : Overview and Implications", Phys. Fluids A 1(3), pp. 564~573, 1989
5. Peric M., "A Finite Volume Method for the Prediction of Three-Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts", Ph.D. Thesis, Imperial College, Univ. of London, 1985
6. Chen H. C. and Patel V. C., "Near-Wall Turbulence Models for Complex Flows Including Separation", AIAA Journal, Vol. 26, pp. 641~648
7. Kline S. J. et al. Proc. 1980 81 AFORS-HTTM Stanford Conf. (1982)
8. Rodi W. and Scheuerer G., "Scrutinizing the $k-\epsilon$ Turbulence Model under Adverse Pressure Gradient Conditions", J. of Fluids Engng, Vol. 108, pp. 174~179, 1986
9. Singh D. and Azad R. S., "Turbulent Kinetic Energy Balance in a Conical Diffuser", Proc. of the 7th Biennial Symposium on Turbulence, pp. 21~33, 1981
10. Hanjalic K., "Sensitizing the dissipation equation to irrotational strains", J. of Fluids Engng, Vol. 102, pp. 34~40, 1980
11. Oomachi M., "Numerical Analysis of Backward Facing Step Flow Using the Anisotropic $k-\epsilon$ Turbulence Model", Master Thesis, The University of Tokyo, 1990 (in japanese)