한국초등수학교육학회지 2, 1-14. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 2, 1-14.

구성주의에 따른 Skemp의 수 개념 기초 활동

강 신 포[1] · 김 판 수[2]

요즘 지식과 앎(knowing)에 대한 새로운 인식론적 패러다임으로 떠오르고 있는 구성주의(constructivism)에 접하여 여러 가지 학습 방법들이 제시되고 있으나 체계적이고 획기적인 대안이 나오는 것은 아니다. 구성주의를 주창하는 사람들이 제안하는 교수· 학습 방법은 이미 관심 있는 교사들이 실천하고 있는 학습 방법이다. 이런 맥락에서 교실 현장에 밀접한 연구 결과와 많은 학습 방법을 제시한 Richard Skemp의 이론을 구성주의에 비추어 해석하고 그의 수 개념 기초를 위한 여러 놀이 활동을 소개하고자 한다.

Ⅰ. 서 론

스켐프(R. Skemp; 1919-1995)는 영국 Oxford대학에서 순수 수학을 공부한 후 초·중등학교에서 수학 및 물리를 가르쳤다. 현장 경험을 통해 교수-학습의 문제는 바로 심리학적 문제로 규정짓고 다시 대학으로 돌아가 심리학, 동기유발, 인간 감정, 인공두뇌학, 진화 및 인간 지능을 두루 공부하게 되었다. 그는 Manchester대학과 Warwick대학에서 교수로 있으면서 학습과 심리학 특히 수학학습 심리학에 관심을 갖게 되었다. 스켐프의 현장 경험과 교수-학습 연구가 융합되고 총괄된 그의 마지막 저서인 '초등수학교육론'(Skemp, 1989a)과 '초등수학을 위한 구조화된 활동'(Skemp, 1989b)은 초등학교의 교실에서 직접적으로 활용될 수 있는 이론과 실제를 겸하고 있다.

그의 학습이론은 최근 국내 연구자들에 의해서도 알려진 바 있다. 가장 특징적인 것은 도식적(Schematic) 학습과 범례 제시 학습이다(박성택 1995; 강완·백석윤 1998). 이들 두 학습에 대해 강완·백석윤(1998)은 알기 쉽게 정리하고 있다.

> 수학 학습에서 개념을 위한 최선의 방법은, 정의를 통한 주어진 개념의 학습보다는 그 개념과 관련된 적절한 범례를 제시하고, 이들 범례가 가지고 있는 공통적 요소를 추출해서 그 요소들로부터 목적하는 개념을 구성하는 귀납적인 추론을 통한 개념 학습의 방법이다.
>
> 스켐프는 스키마를 한마디로 '개념적 구조'라 일컫는다. 각각의 개념은 개념 그 자체로 존재할 수 있지만 다른 개념의 구조에 속할 수도 있고, 다른 개념으로부터 이끌어 내어지기도 하고, 다른 새로운 개념 형성을 도울 수도 있다. 이와 같이 개념들은 상호간의 위계를 형성하는 데 있어서 고정된 위계가 존재하는 것이 아니라, 매순간 마다 선택적인 분류가 가능하여 또 다른 위계를 이끌어내게 된다. 또, 여러 개념을 적절히 연결하여 결합한 결과는, 각각의 개념과는 다른 의미를 지니게 되는데 이러한 개념적 구조를 스키마라고 하는 것이다.

1) 부산 교육 대학교 ([611-736] 부산 연제구 거제1동 263)
2) 부산 교육 대학교 ([611-736] 부산 연제구 거제1동 263)

위 저자가(1998, p.163) 언급한 것처럼 '수학적 개념과 스키마를 구성하는 과정에서 조작적 활동과 반성적 사고를 중시하고 있음을 감안할 때, 그의 학습 이론은 구성주의적 특성을 포함한다'고 말하고 있다. 여기서 주목해야 할 것은 스켐프의 구성주의적 견해는 급진적 또는 사회적 구성주의와 일치하는 것이 아니라 최소한 가장 중요한 요소를 공유하고 있다는 점이다. 그의 견해는 심리학에서 넓은 의미의 구성주의, 즉 '지식은 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 인식하는 주체에 의해 능동적으로 형성된다'라는 원리에 기초한 것이다. von Glasersfeld는 이를 자명한(trivial) 구성주의라 명명했다(P. Ernest 1991, p. 102). 그러나 급진적 사회적 구성주의자들이 제시하는 학습방법은 결코 스켐프가 제시한 것 이상이 아니다. 우리는 스켐프의 구성주의적 요소들을 추출하여 보고 그가 고안한 실천 방안들을 살펴보고자 한다. 먼저 수학과에 관련된 두 가지 주요 구성주의의 흐름을 살펴본다.

II. 급진적 · 사회적 구성주의 원리

1. 급진적 구성주의

구성주의의 두 주요 분류중 하나인 급진적 구성주의의 주창자인 von Glasersfeld(1990)는 그 원리를 이렇게 제시한다.

G1) 지식은 감각이나 의사소통에 의해 수동적으로 받아들여지는 것이 아니라 인식 주체에 의해 능동적으로 구성된다.

G2) 인식의 기능은 적응적이며, 존속 가능성(생장, 생장력;viability)을 지향한다. 인식은 주체가 경험세계를 조직하는데 도움을 주는 것이지 실재를 발견하는데 도움을 주려는 것이 아니다.

다시 말해, 지식은 외부에 있는 객관적 실재가 아니라 사람의 머릿속에 있고 그 속에서 능동적으로 구성되어져야만 생장력을 갖게 된다. 그리고 어떤 모양으로 구성되는가는 온전히 주체의 경험에 의존한다는 것이다.

von Glasersfeld는 한 '개인'의 머릿속에서 진행되는 인식의 문제를 강조하여 객관적 실재의 존재를 인정하지 않은 것처럼 보여졌다. 지식과 '실재(real)' 외부 세계와의 관계를 다르게 전제하고 있기 때문에 전통적인 인식론의 개념적 패턴과 일치하지 않지만 구성주의에서는 객관적인 실재를 부정하지 않는다(von Glasersfeld, 1993)[3]. 그는 최근 자신이 주장해 왔던 급진적 구성주의의 원리를 교수-학습의 관점에서 번역하고 교사와 수업 철학을 언급하고 있다. von Glasersfeld는 모든 대상은 한 개인의 구성물로 보아야 한다는 관점이다. 사회도 그 중의 하나로 본다. 그는 아동이 지식을 구성하는데 관여하는 '타자'도 경험 속에서 구성되는 비교적 '영속적인' 대상물로 보고 있다.

2. Paul Ernest의 수리철학과 시사점

비유클리드 기하의 탄생으로 수학의 결과물은 불변의 진리가 아니며 단지 주어진 (공준을 포함한)공리와 가정 하에서 연역적 방법에 의해 얻어진 산물임을 인식하게 되었다. 이는 수학은 절대적 진리라고 생각하는 정초주의에 심각한 타격을 주었다. 한편 집합론에서 알려진 '러셀의 역설'과 같은 모순을 피하기 위해 수리철학의 3대 학파인 논리주의, 형식주의, 직관주의자들의 노력에도 불구하고, 여전히 공리와 논

3) 이에 대해 유현주, 임재훈(1997)의 논문 서론에서 급진적 구성주의가 '객관적 지식의 존재를 부정한다'는 말을 인용하고 있다.

리적 연역으로 얻어진 수학의 결과물이 그 체계 내에서 완전하게 무모순임을 밝힐 수 없다. 괴델의 불완전성 정리가 그것이다.

괴델의 둘째 정리: 자연수 체계를 포함하는 모든 무모순인 형식적인 체계L에 대하여, L의 무모순성을 L안에서는 증명할 수 없다.

그래서 Ernest는 수학의 핵심적인 도구이며 수학의 모든 부분에서 wild card로 이용되고 있는 논리적 추론의 정당성까지도 의심하고 있다. 왜냐하면 논리 그 자체는 어떤 기초를 갖지 못하기 때문이다("But logic itself lacks certain foundations." Ernest 1991, p. 16). 수학적 지식의 절대주의적 관점에 반대하면서 수학을 2가지 측면에서 바라본다. 오류가능성과 수정가능성이다.

F1) 수학적 지식은 절대적인 眞이 아니며, 절대적 타당성을 갖지 못한다.

F2) 수학적 지식은 수정가능하며, 영원히 개정(revision)할 수 있도록 열려있다.

그는 수리철학을 재개념화해야 한다고 주장한다. 이는 수학의 확실성을 거부하기 위한 것이 아니다. 우리가 알 수 있는 것의 한계를 인식함으로서 지식의 성장을 도모할 수 있다고 생각하기 때문이다. 예를 들면 비유클리드 기하 이론은 아인슈타인의 상대성 이론의 기초가 되었다(K. Travers et al., p. 7 재인용).

3. 사회적 구성주의

반면 급진적 구성주의의 이론으로는 지식의 사회적 역할을 충분히 설명하지 못한다고 보고 있기 때문에 이를 보완하기 위해 사회적 구성주의가 출현되었다. 이는 지식의 개인주의에 반대하며 공동체적 가치를 선호한다(Gergen 1995). Paul Ernest는 수리철학에 대한 새로운 조명을 통해 수학교육에서 사회적 구성주의에 접근하고 있다. 그는 수학의 절대적 진리를 비판한다. 수학은 절대적으로 확실하며 의심할 여지없는 객관적 지식이라는 사고에 반대한다. P. Ernest(1991, 1998)가 수학이 사회적 구성물로 보고 있는 3가지 근거는 이렇다.

E1) 수학적 지식의 기초는 언어적 지식이며 관습과 규칙이다, 그리고 언어는 사회적 구성물이다.

E2) 개인의 주관적인 사회적 지식이, 공포된 후에는, 객관적인 사회적 지식으로 인정받게 되는데 이때 대인간의 사회적 과정이 요구된다.

E3) 객관성 그 자체는 사회적인 것으로 이해되어진다.

III. 구성주의에 따른 교수·학습에 대한 시사점

박영배(1996)는 구성주의에 따른 교수-학습의 원리를 4가지로 요약하고 있다. 첫째가 공통주관적인 의미에서의 객관적 지식은 주체에 의해 자주적으로 구성되어야한다는 '학생 중심적 개별화의 원리', 둘째는 교사와 학생, 학생과 학생을 추측과 논박의 담론의 장으로 이끌어 내어 수학적 지식을 구성하도록 한다는 '발문중심적 상호작용의 원리'로 불렀다. 셋째는 현재 진행중인 수학이 어떤 의미를 가지고 있으며 왜 하는지를 알아야만 학생이 수업에 적극적으로 참여하는 의지가 생긴다고 보고 이를 '의미 지향적 활동의 원리'라 했다. 넷째, 지식은 학생 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 자주적 활동, 즉 반영적 추상화를 요구하는 데 이런 과정이 없이는 유의미한 지식이 될 수 없다. 따라서 이를 '반영적 추상화의 원리'라 불렀다.

그리고 von Glasersfeld(10장 1995)의 교수법에 대한 입장은 유능한 교수 방법이 어떤 이론적 토대를 지니므로 해서 더 확산되고 더 개발될 수 있는 철학적 기반을 제공하는 데 우선 순위를 둔다. 그는 이렇게 정리하고 있다.

> 어떤 경우라도 급진적 구성주의에서는 결코 하나의 옳은 방법만이 있는 것은 아니다. 확정된 교수 절차가 있을 수 없다. . . . 따라서 교사들에게 새로운 것을 말해줄 수는 없지만, 어떤 태도와 절차가 왜 비생산적 결과나 정반대의 결과를 초래하는지 지적할 수 있다. 그리고 교사들이 자신들의 자발적인 상상력을 사용할 기회를 지적할 수 있다. . . . . 상상력이 풍부한 교수방법의 개발에 적합한 이론적 기반을 제공하는 것이 철학이다.

이런 맥락에서 그는 조심스럽게 구성주의에 따른 수업 접근 방법을 언급한다.

V1) 훈련보다는 교수라는 마음(mind)을 가져라.

학교에서의 주요 문제는 내재적 목표보다는 외재적 목표에 중점을 둔다고 주장한다. 행동주의자들의 주장(자극과 강화)은 일시적인 동기와 성공을 가져다 줄 수 있을지는 몰라도 새로운 문제상황을 찾고 해결하려는 욕망을 제공하지는 못한다. 따라서 교사는 학생들이 사고할 수 있는 능력이 있다는 확신을 갖고 그들 자신들이 구성하고 생각하도록 해야한다는 것이다.

V2) 언어적 의사소통

일상생활에서 의사소통이 된다고 해서 교실수업에서도 그것이 가능하다고 생각해서는 안된다. 이는 언어의 느슨함에 기인하는데 이를 극복할 수 있다고 보고 있다; 교사가 사용하는 단어는 모든 사람들에게 똑 같은 의미를 갖는 독립적인 실재가 아니라 자신들의 경험적 세계와 연합되어 있다는 점을 기억하고 있어야 한다. 따라서 교사는 학생들의 해석을 끊임없이 검정하고 모순 없는 응답이 나올 때까지 대화를 멈추지 않아야 한다고 본다.

V3) 지각적 자료 이용에서의 유의점

쿠세네르의 막대와 같은 물리적 자료는 교사가 전달하려는 추상적 개념과 자명한 관계를 드러내고 있다고 생각해서는 안된다. 사람들은 일상적인 습관이 아니면 관련성을 잘 이해하지 못하기 때문이다. 이런 자료들은 감각적 추상과 반성적 추상화에 이르도록 돕는 데 이용되어야 한다.

V4) 학생 사고의 추론

교사는 학생들의 개념 구성과정을 안내하거나 수정하기 위해서 학생의 개념구조 또는 생각하는 방법에 대한 모델을 필요로 한다고 말하고 있다. 학생의 개념 구조는 단순히 추측에 의해서 얻어지는 것이 아니라, 교사가 학습자와의 여러 경험을 통해서 좀더 정확한 모델을 예측해야 한다는 것이다. 그렇게 할 때 비고츠키가 말한 근접발달영역(ZPD)에 의존할 기회를 갖게 된다.

V5) 가르치기보다는 도움을

학습자가 어떻게 경험적 상황에서 얻어진 반성을 다시 심적 조작에 의해 추상화되는가에 초점을 두고 있다. 이에 대해 자신의 글을 인용하고 있다(von Glasersfeld 1992).

> 반성적 담화가 발생되기 위해서는 교사로부터 개방적 태도와 호기심, '학생들의 말을 경청하려는' 의지를 요한다. . . . . 학생과 교사, 학생들간의 대화가 가능케 할 뿐만 아니라 대화의 매체가 되는 교실 분위기를 만드는 것이 교사의 주요 임무중 하나이다.

V6) 반성의 촉진

V7) 사회적 상호작용

다른 사람이 행한 일을 보거나 말한 것을 들으면 내가 행하고 말하는데 영향을 미친다고 한다. 다시 말해 우리의 사고를 반영한다는 것이다. 특히 타자의 아이디어가 나의 모델 구성에 양립될 수 없다면 조절이 일어난다. 이때 사회적 구성주의자는 협상을 통해 의미와 지식이 형성된다고 말하고 있다. 언어와 사회적 상호작용이 지식 공유의 수단이라고 주장한다. 하지만 협상에 의해 조절된 지식은 어디까지나 개인의 주관적 구성이라는 것이 본글라스펠트의 주장이다.

이상의 글에서 본글라스펠트의 주장을 요약해보면 수학 수업에서는 학생에게 경험적 추상과 심적 조작이 일어나도록 교사가 도움을 주어야한다는 것이다. 이때 교사는 그들이 가능한 한 무의미한 방향으로 흘러가지 못하도록 안내해야 하며 이를 위해 교사와 학생들 또는 학생들간에 끊임없는 대화가 지속되도록 환경을 조성해야한다는 것이다.

IV. 스켐프의 구성주의

1. 도식 구성

스켐프는 구성(construction)의 의미를 축조(형성;building)와 검사(testing)라는 두 가지 의미를 합한 것으로 보고 도식의 구성을 3가지 양식으로 나누었다.

도식의 구성

축조	검사
양식 1	
물질 세계에서 만나는 것으로부터 : <경험>	물질 세계에서 일어나는 사상(events)의 예견 : <실험>
양식 2	
다른 사람의 도식으로부터 : <개념 전달>	다른 사람들의 도식들과 비교 : <토론>
양식 3	
고차원 개념 형성 외삽법, 상상,직관에 의한 자신의 지식으로부터 : <창조성>	자신의 기존 지식이나 신념과의 비교 : <내적 일관성>

지식 구조 축조의 첫째 양식은 직접적 경험이다. 이 경험으로부터 심적 모델이 축조되며, 그 모델은 예측을 통한 검사를 할 수 있도록 만들어진다. 둘째는 사회적인 것이다: 즉, 토론과 지식의 공유는 학문적 삶의 주요한 특징적 모습이다. 셋째는 기존 지식에서 새로운 지식을 낳게 하는 것이다. 예를 들면 이미 알고 있는 패턴을 새로운 상황에 연장시켜 적용하는 일이다. 이런 양식들이 혼합되어 사용되어졌을 때 더 강력한 위력을 발휘한다.

나. 구성주의적 요소

먼저 위에서 언급한 본 글라스펠트의 제시와 백영배가 제시한 다음 4가지 원리를 주목한다. 스켐프의 저서(1989a)를 참고로 구성주의적 요소의 단락을 찾아본다.

P1) 학생 중심적 개별화의 원리

P2) 발문중심적 상호작용의 원리

P3) 의미 지향적 활동의 원리

P4) 반영적 추상화의 원리

> 새로운 개념은 직접적으로 전달될 수 없음을 . . . 모든 학습자는 자신의 마음속에서 새로운 개념을 형성해야한다(1989a, p. 69).

모든 구성주의에서 말하는 기본적 주장이다(예, II-1의 G1, P1).

> 관계적 도식은 질적으로 유기적(organic)이다(1989a, p. 13).
> 지능의 측정치에서 지능의 기능으로 우리의 관심을 바꿀. . (1989a, p. 28)

인지의 기능에 대한 급진적 구성주의의 주장와 지식을 생장력(viability)으로 대체해야한다는 주장과 동등한 말이다(G2). 스켐프는 '유기적'이라는 단어를 이렇게 풀이하고 있다.

> 관계적 이해로부터 만족을 얻은 아동은 그들에게 제시된 새로운 자료를 관계적으로 이해하려 할뿐만 아니라 새로운 자료를 적극적으로 찾고 새 분야를 개척하려 할 것이다. 마치 영양분을 찾아서 뿌리를 넓히는 나무나 새 영역을 개척하려는 동물과 같이.
> . . 특정 시기의 학습 내용이 나중에도 유익하게 이용되려면, 추상화와 개념화가 필연적으로 뒤따라야 함을 설명했다. 따라서 여기서 우리가 말한 도식의 의미는 개념화된 지식의 구조로 확대 해석되었다. 더욱이 개념과 도식은 직접적으로 전달될 수 없는 것임을 지적했다. 도식은 각자 자신의 마음속에서 스스로의 힘으로 구성되어진다. . . . 15년 내에 습득하게 하려면 교사의 효과적인 도움은 필수적이다. . . . . 교사는 학생들에게 간접적 도움밖에 줄 수 없다는 사실 때문에, 교사의 임무는 더 세련되어야 한다(1989a, p. 79).

수학적 개념은 경험적 반성과 추상화가 따라야만 결국 자기 것이 된다. 박영배와 본글라스펠트의 학습 시사점에서도 볼 수 있다.(P4, V6).

둘째는 사회적인 것이다: 즉, 토론과 지식의 공유는 학문적 삶의 주요한 특징적 모습이다.(1989a, p. 80)

> 무엇보다도 중요한 저학년에서, 수학적 상황을 말로 기술하는데 더 오랜 시간을 배정해야 한다. 본래 사고와 구술(spoken word) 사이의 연관성은 사고와 종이에 쓰여진 단어보다 강하고, 사고와 수학적 기호 사이의 연관성보다 훨씬 더 강하다. 구술은 다른 방법보다 훨씬 더 빠르고 쉽다(1989a, p. 114).

구성을 축조(형성)와 검사로 이루어졌으며 특히 여러 가지 활동을 할 때 스켐프는 행위를 하기 전에 결과를 예측하게 한다. 이 예측은 결국 축조와 검사를 통해 확인되는 데 이는 곧 반성적 추상화를 더욱 공고히 하는 것이다. 도식 구성 양식 1과 2는 박영배의 학생 중심적 개별화의 원리(P1)와 발문중심적 상호작용의 원리(P2), 구성주의에서 언어적 의사소통의 강조와 일치하는 대목이다.

V. Skemp의 수 개념 기초 활동

1. 스켐프(Skemp)의 놀이 활동

Skemp는 어떤 시기의 학습 내용이 존속 가능하려면 추상화와 개념화가 필수적이다라고 했다. 여러 석학들이 수 세기 동안 쌓아올린 지식을 아동들이 10년에서 15년 내에 습득하게 하려면 교사의 효과적인 도움은 필수적이며 올바른 교수법은 수학적 도식 구성에 큰 도움이 되지만, 교사는 학생들에게 간접적 도움밖에 줄 수 없다는 사실 때문에 교사의 임무는 더 세련되어야 한다. 이를 위해 교사는 학생의 도식을 바꾸기보다는 메타인지가 그 기능을 잘할 수 있도록 가능한 한 좋은 학습 상황을 제공해야한다고 했다. 학습자료 제공으로 326개의 활동을 개발하여 단원별로 묶어서 구조적으로 활용할 수 있도록 하였다(Skemp 1989b). 이 활동의 북미판은 VTR을 보면서 이용할 수 있도록 편집되었고 구매 및 정보 인터넷 싸이트는 http://www.skemp.com/이다.

2. 수 개념의 기초 활동

이 절에서는 스켐프의 놀이 활동 저서(1989b)의 제 1장을 참고로 하였다. 그는 수 관련 개념에 기초가 되는 조직을 집합에 따른 조직으로 보았다. 이 개념에 관련된 주제들마다 여러 개의 활동이 있다. 이 주제의 순서는 다음과 같이 되어있다. ㉠분류, ㉡집합, ㉢원소 개수에 따라 집합 비교하기, ㉣원소 개수에 따른 순서 ㉤집합들의 순서열, ㉥공집합과 0(영), ㉦두 집합간의 원소 짝짓기, ㉧대응한 집합, 수 헤아리기 및 수, ㉨수 헤아리기, 대응 및 추이성. 각 주제에 대해서 '개념'과 '목적' 및 '개념토론'이 기술되고 난 후에, 활동들이 전개된다. 각 활동에서는 활동에 참여할 수 있는 학생 수와 활동의 목표가 있다. 그리고 활동에 필요한 준비물과 방법이 주어진다. 각 주제의 마지막 부분에서는 활동토론이 있다. 활동의 순서 계열, 그 활동이 어떤 도식 양식에 해당되는지, 교사를 위한 이론적 시사점뿐만 아니라 활용상의 유의점 등을 싣고 있다. 맨 마지막으로 '관찰과 청취', '반성', 및 '토의'가 있는데 이는 교사가 아동들의 활동을 관찰하고 메모하여 자신의 학습 이론적 토대와 더 나은 활동을 위해 이를 반영하고 다른 교사들과 토의하는 것을 잊지 않도록 하기 위함이다. 전체적 전개가 체계적이고 지극히 구성주의적 있다.

가. 분류

개념: 대상간의 유사성

목적: 여러 개의 대상들이 섞인 것에서 어떤 특성에 따라 집합으로 분류하기. 이 공통적인 특성은 지각적인 것일 수도 있고 개념적인 것일 수도 있다.

개념 토론: 아동들은 스스로 주어진 자료들을 분류하게 되는데 이는 분류가 지능과 밀접한 관련이 있기 때문이다.

본래 모두 7개의 활동들이 있는데 여기에서는 활동 1만 소개한다. 활동 2는 '그림 맞추기'에서는 실제 사물을 분류하는 것이 아니라 그것을 대표하는 그림들을 분류하는 것으로 활동 1보다 발전된 것이다. 활동 3은 활동 2를 좀더 많이 연습하는 데 있다. 활동4는 도미노 게임으로 2사람씩 짝을 지어한다. 방법은 도미노 게임방식이고 색깔, 모양, 점의 수에 따른 여러 종류의 카드를 이용한다. 여기서 점의 개수는 처음에는 3개 나중에는 5개까지로 한다. 이 점들은 불규칙하게 배열하고 또 세지 않고 지각적으로 인식할 수 있는 개수를 사용한다. 활동 5-6에서는 활동 2-3에서 행한 지각적이 아닌 개념적 특성에 따라 분류한다. 이는 눈에 보이는대로가 아니라 생각에 의한 분류이다. 마지막 활동은 앞에서 해온 활동 6의 연장으로 2가지 속성을 동시에 분류하는데 있다.

활동(이름): 지각에 의한 분류

교사와 함께 하는 소규모 집단활동

목적: 대상들간의 유사점과 차이점을 구분하게 한다.

준비물: 각기 다른 종류의 여러 가지 물건, 얇은 쟁반(예, 상자 뚜껑), 큰 상자

방법: 1. 여러 가지의 물건을 탁자 위에 붓는다. 그리고 교사는 '여기에 모든 것이 섞여 있는데 여러분은 분류할 수 있는가?'라고 묻는다. 필요하면 교사는 시범을 보인다.

2. 그 물건들이 분류되었을 때 분류된 쟁반을 큰 상자에 넣는다.

나. 집합

개념: 분류의 결과로서 생긴 것, 즉 집합

목적: 물적 대상으로서 하나의 집합에 속하는지 안 속하는지를 결정하는 심적 판단을 내릴 수 있게함. 심적 대상에 대해서도 그렇게 하기. 심적 혹은 물적 대상을 어떤 선택에 따라 분류하기

개념 토론: 분류의 결과는 집합이라 하는 대상들(물적이나 심적인 것)의 모임이다. 따라서 우리는 분류를 하나의 과정으로 그 결과를 집합으로 생각할 수 있다. 어떤 집합에 넣을 수 있는지 없는지는 심적 판단의 결과이다. 그래서 같은 대상들이 선택에 따라서 다르게 분류될 수 있고, 그 결과 집합들은 서로 다를 수 있다.

여기에는 4개의 활동이 있는데 서로 연결할 수 있는 입방체(레고나 듀플로와 같은 것) 활동 1은 이런 입방체로서 색깔에 따라 집합을 만드는 활동이고, 활동 2는 여러 가지 종이 그림을 분류하여 큰 마분지에 붙이고 이 집합의 이름을 짓게 한다. 활동 3은 아래에 소개된 것처럼 한 가지 속성에 따라 집합을 분류하는 활동이고, 활동4는 두 가지 속성으로 집합을 분류하는 활동이다.

활동: 어떤 집합을 만들까?

소집단을 위한 활동. 같은 물건을 여러 속성에 따라 분류하는 일

준비물: 색깔, 모양, 크기 또는 두께에 의해 분류될 수 있는 속성을 지닌 블록들. 집합을 상징하는 고리 하나(끈이나 고무줄).

방법: 단계(a)

1. 각각 하나의 블록을 갖게 하여 차례로 '너의 블록에 대해 얘기해 보겠니'. 예를 들면 '이것은 붉다. 원형이다' 그리고 다른 것들과 비교하면서 '이것은 작고 두껍다'라고 대답한다.
2. 탁자 위에 모든 블록을 쏟아 놓는다.

3. 고리를 내려놓고 주어진 특징에 따라 어떤 집합을 만들 수 있는지 토의한다.
4. 다 같이 그 집합에 속하는 블록을 골라서 고리 안에 넣는다.
5. 이 집합이 어떤 집합인지 물어본다. 예를 들면, '직사각형 집합'
6. 다른 종류의 속성을 사용해서 (예, 색깔, 모양, 크기 또는 두께로써) 아동들이 이런 일에 자신을 가질 때까지 반복한다.

단계(b)

1. 위와 같이 블록을 탁자 위에 펼쳐 놓고 고리를 놓는다.
2. 한 아동이 하나의 속성을 마음속으로 결정하고, 아무에게도 말하지 않는다.
3. 그는 그 속성에 따라 분류하여 고리 안에 하나 하나 넣는다. 그 집합에 속하지 않는 것은 따로 제쳐둔다.
4. 다른 사람들은 그가 무슨 집합을 만드는지 찾아낸다. 무엇인지 아는 아동은 다른 사람에게 말하지 않고 그가 집합을 분류하는데 도움을 준다.
5. 최종적으로 집합에 이름을 붙인다. 예. 빨간 육면체 집합. 그런 후 다른 종류의 속성을 사용하여 반복한다.

다. 원소 개수에 따라 집합 비교하기

개념: 단위 물체로 구성된 집합. 대상의 크기나 위치가 아니라 단위 물체의 수에 따라 큰 집합 또는 작은 집합을 구분하기.

목적: 두 집합 중 어느 쪽에 더 많은 단위 물체가 있는가? 또는 같은가?

개념 토론: 여기서 '원소 개수에 따라 비교하기'란 '어떤 집합이 더 많은 원소를 가지는가? 혹은 같은 수의 원소를 가지는가?' 결정을 의미한다. 이는 뺄셈학습을 위한 준비 단계이고 거기에서는 '얼마나 많이 혹은 적게'라는 질문으로 발전한다. 넓게 놓인 3개의 물체들로 이루어진 집합은 가까이 붙어있는 5개의 작은 물체들의 집합보다 더 크게 보일 수 있다. 그러나 후자가 더 큰 것으로 인식하기 위해서는 크기, 위치, 특성에 상관없이 단지 원소들을 하나의 단위로 생각할 수 있는 능력을 요구한다. 이런 능력은 자연스러운 것이 아니다. 먼저 크기가 같은 물체에서 시작하여 차츰 크기가 다른 것으로 경험하게 한다. 충분한 시간을 갖고 개념 형성을 지도해야 한다.

여기에는 2개의 활동이 있는데 첫째는 아래의 활동이고 둘째는 교사와 함께 하는 단체 활동이다. 여기서 집합에 소속하는 단위들의 개수는 물체의 위치에 무관함을 보이는 데 있다. 준비물은 활동 1과 같다. 먼저 학생이 몇 개의 입방체를 주머니에서 끄집어내고 다음은 교사가 몇 개를 끄집어내어 무질서한 간격으로 벌려 놓는다. 학생들은 자신이 가진 입방체가 선생님의 것보다 작은지 많은지를 말하는 활동이다.

활동: 잘 골라내기

소집단을 위한 활동. 목적은 집합에서 '크다', '작다'라는 식으로 집합을 비교하기 위한 도입이다.

준비물: 입방체(레고나 듀플로등), 주머니, 박스나 상자.

방법: 1. 입방체를 주머니 속에 넣는다. 각 아동은 한 가지 색을 선택한다.
2. 차례대로 손을 넣어 입방체 하나를 끄집어낸다. 자신이 결정한 색깔과 같으면 입방체를 연결하고 그렇지 않으면 상자에 버린다.
3. 가장 길게 연결한 입방체를 가진 자가 1등이다.

활동 토론: 이런 활동에서는 흩어진 입방체를 연결하여 긴 막대를 만들거나 만들어진 막대를 낱개로 분

리하는 행위는 집합 개념의 두 측면— 단위들로 구성되고 하나의 실체—를 이해하는 데 큰 가치를 지닌다.

라. 원소 개수에 따른 순서

개념: 위치에 따른 순서, 길이에 따른 순서, 단위 물체의 개수에 다른 순서

목적: 왼쪽에서 오른쪽으로 수의 크기에 따라 집합을 배열하기, 역으로 작아지는 순서대로 배열하기.

개념 토론: 이 활동들을 너무 쉬운 것으로 보아서는 안된다. 왜냐하면 앞 절(다. 원소 개수에 따라 집합 비교하기)에서처럼 집합을 단순히 비교하는 일과 여러 종류의 비교를 결합하는 작업이 함께 내포되기 때문이다. 따라서 이 활동은 여유를 가지고 천천히 진행되어야 한다.

여기에는 2개의 활동이 있는데 첫째 활동은 입방체를 연결한 막대의 길이를 비교하여 순서 계열을 정하는 활동이다 이 활동을 바탕으로 둘째에서는 수의 크기, 길이, 위치에 따른 순서를 서로 연관짓는 활동을 하게 된다. 아래에 소개된 활동이 둘째 활동이다.

활동: 수, 길이(크기), 위치를 연관 짓기.

첫째 활동과 유사하게 교사가 이끄는 소그룹 활동이나 약간 어렵다. 길이를 연상하지 않고 수의 순서 정하기 도입. 첫째 활동처럼 예측이 가능하다.

준비물: 다른 색깔들의 입방체. 얇은 쟁반이나 상자 뚜껑.

방법: 1. 각 아동은 길이와 색깔이 다른 세 개의 막대를 만든다.(같은 막대에는 같은 색깔로)
2. 짧은 것은 왼쪽에 긴 것은 오른쪽에 순서대로 쟁반에 세 개의 막대를 올려놓는다.
3. 그리고 자신의 쟁반 위에 있는 막대를 분리하여 같은 색깔끼리 모아두되 무질서하게 흩어 놓고 다른 아동과 교환한다.
4. 어느 색깔의 입방체를 연결하면 가장 긴 막대를 만들 수 있는 지를 말한다. 그 색깔의 입방체를 쟁반 옆에 둔다.
5. 입방체를 막대로 만들어서 길이를 비교하여 4에서 예측한 것과 비교한다. 그리고 3,4,5 단계를 반복하면서 가장 짧은 막대가 어느 것인지를 예측한다. 이것에 익숙해지면 네 개, 다섯 개로 입방체의 개수를 높여간다.

활동 토론: 길이, 위치, 개수에 따른 3가지의 순서를 서로 결부시키는 작업을 아동들에게 요구하고 있다. 여기서 여러 가지 형태의 비교를 내포한다. 예를 들면 길이에 따른 순서를 정할 때 주어진 막대는 더 짧은 것 다음에 그리고 더 긴 막대 앞에 와야한다. 이런 활동에 충분한 시간을 주어야하며 아동에 따라 요구되는 시간이 달라진다.

마. 집합들의 순서열

개념: 틈이 없는 집합의 순서열

목적: 이런 배열을 만듦. 그런 배열을 추정함. 완전한 배열인지 아닌지를 말하기; 그렇지 않다면 그 틈을 찾고 틈을 메우기.

개념 토론: 일정한 규칙이 없는 여러 개의 막대를 순서대로 배열할 때, 어떤 막대를 끄집어내면 나중에 어느 것이 빠졌는지를 알 수가 없다. 그러나 자연수의 경우는 다르다. 만약 시작 수와 끝 수를 안다면 그 배열이 완전한지 아닌지를 알 수 있다. 완전하지 않으면 어느 것이 빠졌는지 순서 상으

로 어디에 위치한 것인지를 알 수 있다. 막대 계단에서는 이런 특징들이 뚜렷이 드러난다.

활동: 계단 찾기

이 활동은 (Skemp 1989a 한글판)에 소개되어 있으므로 생략하기로 한다.

바. 공집합과 0(영)

개념: 어떤 원소도 갖지 않는 집합. 따라서 원소의 수는 0이다.

목적: 어떠한 경우가 공집합인지 인식한다. 공집합의 원소의 수를 0(영)이라 한다.

개념 토론: 아무런 원소를 갖지 않는 집합의 원소의 수는 0(영)이다. '아무것도 없다', 또는 '전혀 없다'라는 대답은 '이 안에 무엇이 있나?' 또는 '여기에 얼마나 많은 물체가 있나?'에 대한 대답이다. 원소의 수는 집합의 성질이다. '공집합의 수는 얼마인가?'에 대한 대답이 0이다.

여기에도 앞 절과 같이 하나의 활동만 실려있다.

활동: 공집합

선생님과 함께 하는 소그룹 활동. 공집합의 개념을 원소 수가 0임을 함께 도입하는 데 있다.

준비물: 3가지 색깔의 입방체들. 4개의 집합고리.

방법: 1. 아동들은 4개의 집합 고리를 이용하여 색깔별로 분류한다. 이때 고리 하나는 빈 채로 남게된다.
2. 입방체가 있는 고리를 지적하면서 '이 집합을 무엇이라 부를까?' 그리고 '집합의 원소 수는?'라고 묻는다. 예를 들면 '푸른색 집합', '3'이라는 대답이 나온다.
3. 빈 집합을 가리키며 '이 집합은 무엇이라 부르는가?' 그리고 '원소 수는 무엇인가?'라고 묻는다.

활동 토론: 여기서 수개념을 외삽을 하고 있다. 볼 수 있는 대상들의 집합에 비해 공집합은 더 추상적이다. 그러므로 새로운 수개념은 아동들의 상상력에 의존한다. 이는 양식 2(의사소통과 토의)의 도움으로 양식 3의 실제적 도식 구성에 해당한다.

사. 두 집합들간의 원소 짝짓기

개념: 서로 다른 집합에서 대상간의 짝짓기

목적: 어떤 집합의 개개의 대상과 다른 집합의 대상들간을 물적·심적으로 짝짓는 능력. 이에 관련된 용어의 이해와 응용.

개념 토론: 어떤 측면에 따라 물체를 심적으로 물적으로 분류하여 집합을 만드는 일은 이를 표상하는 심적 조작이다. 두 집합간에 물체를 짝짓는 일도 중요한 정신적 연결이다.

여기에는 두 개의 활동이 있다. 첫째는 물적 대상들로 이루어진 집합들간의 짝짓기이고 둘째 활동은 정신적으로 짝짓기이다. 첫째 활동에서는 개, 사람, 인형 등 우리 주변의 친숙한 물체나 그 그림들을 담은 두 개의 상자에서 각 상자의 물체를 끄집어내어 두 물체를 의미 있게 짝짓는다. 예를 들면 '개 1마리와 한 사람'이 쌍이 되어 산보를 한다. 이렇게 하나 하나 짝을 다 짓고 난 후 한 쪽이 남으면 우리는 더 이상 짝지을 수 없다고 말하고 다시 반복한다. 둘째 활동에서는 지각적으로 드러나지 않는 것끼리 짝을 지운다. 예를 들면 택시와 운전사.

아. 대등한 집합, 수 헤아리기 및 수

개념: 일대일 대응. 대등한 집합.

목적: 두 집합이 대등한지 정확하게 진술하기.

개념 토론: 수학자들은 대등한 집합의 독특한 성질에 관심을 둔다. 즉, 원소의 개수가 같은지 알기 위한 방법으로 두 집합의 원소를 대응시킨다.

활동: 대등한(일대일 대응) 집합.

2명 또는 소그룹 활동. 짝짓기.

목적: 짝짓기가 서로 대등한 집합이라는 사고로 발전시키기. 대등한 집합개념과 수를 헤아리는 과정을 연결짓기.

준비물: 각 아동마다 집합고리와 같은 종류의 물건이 10개정도 담긴 용기.

방법: 단계(a)

1. 한 학생이 몇 개의 물건을 꺼내서 일렬로 나열한다. 다른 학생이 테이블 위에 자신의 물건을 꺼내서 서로 짝을 짓는다.
2. 짝지어진 것을 각각 다른 집합 고리 안에 하나하나 넣는다. 고리 안에 있는 물건들의 서로 대응하는 짝이 있다고 교사는 말한다.
3. 두 집합의 물건을 각각 헤아린다.
4. 과정 1-2를 반복한다.

단계(b) (예측적으로)

1. 한 아동이 자기 물건을 집합 고리 안에 몇 개 넣는다. 다른 아동(들)이 그 아동이 만든 집합과 같은 (대응되는) 집합을 만든다.
2. 원소의 개수가 많을 때는 개수를 헤아려서 같은지를 확인하거나 나열하여 확인한다.

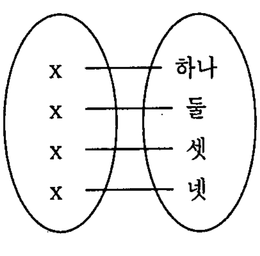
활동 토론: 피아제에 의하면 수에 대한 의미—위에서 기술된 바와 같이 두 집합간의 일대일 대응—를 충분히 이해하지 않고도 개수를 헤아릴 수 있다. 이런 이해없이 개수를 헤아린다는 것은 단지 언어 활동에 불과하고 진정으로 수 개념을 연관 짓는 일이 아니다.

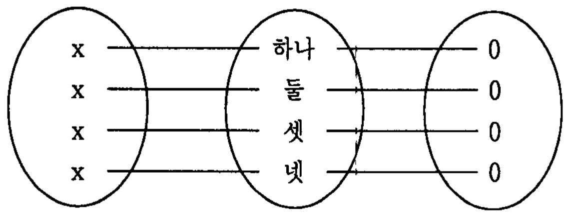
자. 수 헤아리기, 대응 및 추이성.

개념: 이런 개념들 사이의 관계

목적: 직관적 차원에서 이런 관계 사용하기

개념 토론: 집합의 원소 개수를 헤아릴 때 수 이름 집합과 짝을 이룬다. 왼쪽 집합에 대응되는 단어의 맨 마지막 '넷'이 그 개수이다. 이렇게 수 이름 집합과 1-1대응하는 모든 집합의 수는 서로 같게 된다. 아래 그림은 '추이성'의 한 보기이다. 수를 셀 때 우리는 물리적 짝짓기를 할 필요없이 두 집합의 원소가 같은지를 알기 위해 수 이름 집합을 하나의 매개집합으로 사용한다. 이 절에서는 어떤 활동을 소개하지 않는다. 이름 집합의 이런 특성을 말하려 함이다.





VI. 맺는 말

먼저 우리는 구성주의의 주장과 학습 원리 등을 알아보았다. 구성주의 맥락에 따른 학습 방법이란 특별한 것이 아니다. 최근의 여러 논문에서 발표되고 제시되었던 그런 수업 방식이며 열린 교육과도 맥락을 같이한다. 사실 능동적 수업 방식을 택하고 있는 교사가 현재 행하고 있는 방식들이다. 단지 이런 방식들이 과거의 교수-학습 이론과는 잘 맞지 않아서 소수의 특별한 방법으로 여겨져 모든 교사들에서 획기적으로 전이되지 않을 수도 있다.

스켐프의 이론을 구성주의 문맥에서 해석해 보았다. 우리는 스켐프의 학습 이론이나 교육 실천 방안이 결코 구성주의의 맥락과 다르지 않다는 것을 보았다. 그는 여러 가지 범례제시를 통하여 어떤 개념을 구성한다고 보았고 수학적 개념도 그 예외는 아니다. 이런 생각을 구성주의에 적용해 보자. 현재 교실에서 좀더 유효하다고 보여지는 여러 교수방법들로부터 공통적 특성을 추출한 것이 아마도 '구성주의' 이론의 기초를 제공한 것으로 볼 수 있다. 스켐프의 교수방법을 이제 구성주의라는 큰 페르다임 속에 넣어 봄으로서 우리는 더 좋은 교수방법을 고안해 낼 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤 (1998). *초등수학교육론*. 서울: 동명사.

박성택 (1996). Skemp 이론에 따른 수학 학습 효과 분석. *부산교육대학교 과학연구소보 제2집*. pp. 189-264.

박영배 (1996). *수학 교수-학습의 구성주의적 전개에 따른 연구*. 서울대학교 박사학위 논문.

유현주, 임재훈 (1997). 급진적 · 사회적 구성주의와 포스트모더니즘. *대한수학교육학회 추계 연구 발표 논문집*. pp. 379-414.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. The Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism As a Philosophy of Mathematics*. Statae University of New York Press.

Gergen, K. (1995). Social Constructivism and Educational Process, In the Steffe, L. P. & Gale, J. (Eds), *Constructivism in Education*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. [*구성주의와 교육*, 조연주 외 공역, 학지사 1997].

Skemp, R. R. (1989a). *Mathematics in the Primary School.* Routledge [김판수, 박성택 공역 교우사, 1995].

Skemp, R. R. (1989b). *Structured Activities for Primary Mathematics Vol I, II*, Routledge.

Travers, K., Pikaart, L., Suydam, M., & Runion, G. (1977). Mathematics Teaching. Harper & Row, New York.

von Glasersfeld (1995). *Radical Constructivism: A way of Knowing and Learning.* The Falmer Press.

von Glasersfeld (1993). Questions and answers about radical constructivism. In Tobin, K. (Ed). *The Practice of Constructivism in Science Education.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

von Glasersfeld (1992). Guest editorial. *Educational Studies in Mathematics 23*, 3, 443-4.

<Abstract>

R. R. Skemp's basic activities for building number concepts based on constructivism

Kang, Shin Po[4], & Kim, Pan Soo[5]

Nowadays there are presented various educational methods based on Constructivism which is regarded as newest epistemological paradigm about Knowledge and knowing, but none which is dramatically new. The educational methods proposed by the advocates of Constructivism are already put in practice by the teachers that are interested. Following this, we will interpret R. Skemp's theory about educational methods based on Constructivism. Here we will introduce various play activities for building number concepts.

4) Pusan National University of Education (236 Kyojae-1-dong, Yonjae-gu, Pusan, 611-736 Korea. Tel: 051-500-7234; Fax: 051-505-4908)

5) Pusan National University of Education (236 Kyojae-1-dong, Yonjae-gu, Pusan, 611-736 Korea. Tel: 051-500-7235; Fax: 051-505-4908; E-mail: pskim@ns.pusan-e.ac.kr)