

와도를 기저로 한 비압축성 점성유동해석 방법

서정천*

A Vorticity-Based Method for Incompressible Viscous Flow Analysis

J. C. Suh

A vorticity-based method for the numerical solution of the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations is presented. The governing equations for vorticity, velocity and pressure variables are expressed in an integro-differential form. The global coupling between the vorticity and the pressure boundary conditions is fully considered in an iterative procedure when numerical schemes are employed. The finite volume method of the second order TVD scheme is implemented to integrate the vorticity transport equation with the dynamic vorticity boundary condition. The velocity field is obtained by using the Biot-Savart integral. The Green's scalar identity is used to solve the total pressure in an integral approach similar to the surface panel methods which have been well established for potential flow analysis. The present formulation is validated by comparison with data from the literature for the two-dimensional cavity flow driven by shear in a square cavity. We take two types of the cavity flow: (i) driven by non-uniform shear on top lid and body forces for which the exact solution exists, and (ii) driven only by uniform shear (of the classical type).

Key Words: 와도기저방법(Vorticity-Based Method), 적분-미분 정식화(Integro-Differential Formulation), 유한체적법(Finite Volume Methods), 비오-사바르 적분(Biot-Savart Integral), 와도경계조건(Vorticity Boundary Condition)

1. 서론

Lighthill [1]과 Batchelor [2]등이 고체면과 유체 사이의 물리적인 특성을 와도로 표현한 후, 와도를 기저로 한 점성유동해석이 많이 이루어졌다 [3-9]. 유체의 점성력이 속도의 구배로 나타나므로 점성전단현상의 동력학적인 관계를 와도로 표현할 수 있게 된다. 물체표면에서의 무활조건과 물체표면에 인접한 유체에 작용하는 힘의 균형조건아래 표면으로부터 와도가 발생하며 확산과 대류작용을 거치면서 전체 유동장에 새로이 와도분포가 형성된다[10]. 이와 같은 생성과 재분포 과정을 반복하는 동적인 유동이 와도와 밀접한 관계가 있다.

와도를 기저로 한 해석방법에는 몇 가지 장점이 있다 [11,12]. 비관성좌표계에서의 와도이송

방정식이 관성좌표계에서의 형태와 같아 관성좌표계에서 개발된 수치해석기법을 비관성좌표계로 확장하기가 용이하며 와도분포는 물체표면 근처에 주로 분포되므로 한정적인 계산영역을 택할 수 있다. 또한 와류가 강하게 나타나는 유동의 경우, 와도 자체로 와류 특성을 표현하기가 편리하다. 다만, 와도를 기저로 한 수치해석방법에서 물체 표면에서 와도값에 대한 경계조건을 부여하는 데 어려운 점이 있다. 이러한 단점이 와도 기저 방법을 이용하는 데 장애요소로 작용하여 왔다. 최근들어 2차원 문제에 대한 이 문제를 해결하려는 연구가 활발히 진행되어 상당한 진전을 보이고 있다 [7-9,13,14]. 그러나 아직 물체표면에서의 압력과 와도경계조건의 연성관계를 완전히 고려하는 수치상의 기법은 정립되어 있지 않다.

본 논문에서는 Navier-Stokes 방정식(이후로는 'N-S 방정식'으로 명기)을 와도와 압력변수

*정회원, 서울대학교 공과대학 조선해양공학과

에 대한 Helmholtz 분리형태로 표현하고 물체 표면에서 와도와 압력사이의 힘의 평형을 고려하여, 와도 플럭스와 압력구배의 연성관계를 보여주는 경계조건을 사용하여 미분-적분형의 지배방정식을 구성하는 과정을 다루고 있다. 와도 이송방정식의 수치해석은 유한체적법을 사용하며, 구해진 와도장으로부터 속도를 구하는 방법으로는 Biot-Savart 적분항이 포함된 벡터등식을 이용한다. 기존의 와도기저방법에서 대부분 다루지 않은 압력계산을 압력Poisson방정식 분 전체압력(정압력과 동압력의 합)에 대한 적분방정식으로 바꾸어 패널 방법과 유사한 방법으로 압력장을 계산한다. 적분방정식으로 변환하여 푸는 경우, 적분 결과가 매끄러운 값을 제공하므로 통상의 미분방정식에서 요구되는 안정성 문제를 염려하지 않아도 되며 본 연구에서처럼 이상유체유동에서 잘 정립된 표면패널방법을 적용할 수 있다. 본 수치해석방법의 타당성을 검증하기 위하여 2차원 구동 cavity내의 층류 유동에 대한 시간전진해석을 수행한다. 여기서 두 가지 경우에 적용하여 제안하는 수치방법을 검증하고자 한다. 첫번째 유형은 엄밀해가 존재하는 경우로서 cavity 윗판의 이동속도가 일정함수의 분포로 주어지고 물체력이 가상적으로 주어진 경우이다[15,16]. 두번째 유형은 고전적인 구동 cavity 문제로써 윗판이 균일하게 이동하는 경우이다. 이 경우 비교 대상의 많은 계산 결과가 있으나 여기서는 Ghia등[17]의 계산 결과와 비교하고자 한다.

2. 이론적 접근

비압축성 (밀도를 1로 잡음) Newtonian 유체의 응력은 와도(ω)에 대한 법선방향과 압력(p)에 대한 접선방향의 성분의 합 (즉 $\underline{\tau} = -p\underline{n} + \mu\underline{\omega} \times \underline{n}$)으로 표현되고, N-S 방정식은 와도와 압력에 대한 Helmholtz 분리형태

$$\underline{a} = -\nabla p - \nabla \times (\mu\underline{\omega}) + \underline{f}_b, \quad (1)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 μ 는 유체의 점성계수, \underline{n} 은 경계면에서 유체장으로 향하는 단위법선벡터이며, \underline{a} 는 가속도항, \underline{f}_b 는 물체력이다. 점성계수가 일정하다고 가정하고 식(1)에 curl과 divergence 연산을 각각 수행하여 2차원 와도이송방정식과 압력 Poisson 방정식

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{q}\omega) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \nabla \times \underline{f}_b, \quad (2)$$

$$\nabla^2 H = \nabla \cdot (\underline{q} \times \omega + \underline{f}_b), \quad (3)$$

을 유도할 수 있다. 레이놀드 수 Re 와 와도의 스칼라 성분 ω ($\omega \equiv \omega k$)은 물체의 특성길이와 특성속도로 무차원하였으며 본 예제에서 다루는 구동 cavity 문제의 경우, cavity 윗판의 길이와 그의 이동속도로 택하였다. 압력 p 는 전체압력 H (정압력과 동압력의 합)과 다음 관계를 맺는다.

$$H = p - p_r + \frac{1}{2}(q^2 - q_r^2). \quad (4)$$

상수 p_r 과 q_r 은 H 의 기준값을 하나 선정하기 위하여 택하는 기준압력과 기준속도이다. 속도 \underline{q} 는 벡터 등식으로부터 경계면에 분포된 특이점에 의한 속도와 와도 분포로 유기 되는 속도의 합

$$\underline{q} = \int_C [(\underline{n} \cdot \underline{q}) \nabla G + (\underline{n} \times \underline{q}) \times \nabla G] dC + \int_S \underline{\omega} \times \nabla G dS, \quad (5)$$

으로 구성된다. G 는 Laplace 방정식의 기본해인 Green 함수 $-\frac{1}{2\pi} \ln r$ 이다. r 은 유도장점 \underline{r} 과 적분점 \underline{r}' 간의 거리이다. 첫 번째 적분항(\underline{q}_c)은 주어진 유입류나 물체의 운동과 관련된 항으로 무활조건으로부터 얻어지며, 두번째 적분항(\underline{q}_s)은 소위 Biot-Savart 적분항으로서 유동장내의 와도 분포로부터 구해진다. 무한원반의 경계면을 갖는 외부유동문제의 경우, 무한원반에서의 조건을 윗식과 같은 적분형태의 표현을 통해 자동으로 만족시킬 수 있다. 이러한 점이 적분 형태로 변환하는 장점을 보이고 있다. 유사하게 Green함수를 도입하여 식(3)을 적분 형태로 변환하면

$$H = \int_C [H \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial H}{\partial n} G] dC + \int_S \nabla \cdot (\underline{q} \times \omega + \underline{f}_b) G dS, \quad (6)$$

으로 표현된다. 일반적으로 식(2)도 적분형태로 바꿀 수 있으나 이 경우의 Green 함수는 지수함수가 포함되어 해석적 적분에 어려움이 따른다. 오히려 식(2)은 2차 대류-확산형 편미분방정식 형태이므로 비교적 잘 정립된 기존의 수치해석기법을 활용하는 것이 바람직할 것이다. 결국 식(2), 식(5), 식(6)이 미분-적분형의 지배방정식을 구성하게 된다.

지배방정식과 더불어 요구되는 경계조건으로써, 물체벽(C_B)에서의 유속(\underline{q})이 물체의 속도(\underline{U}_B)와 같다는 무활조건은

$$\underline{q}(\underline{x}_B, t) = \underline{U}_B \text{ on } C_B, \quad (7)$$

으로 표현된다. 와도플럭스($\sigma \equiv -\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial n}$)에 대한 조건

$$\sigma = \underline{k} \cdot \underline{n} \times \left(-\frac{D\underline{q}}{Dt} - \nabla p + \underline{f}_b \right) \text{ on } C_B, \quad (8)$$

은 무활조건과 더불어 N-S 방정식의 접선방향 힘의 동적평형을 이용하여 유도된다. 이 값은 물체 표면에서 유체장으로 생성, 확산되는 와도량을 의미하며 초기 $t = 0^+$ 에서 순간적으로 가속되는 경우에도 적용된다. Lighthill[1]은 이러한 와도 생성에 대한 과정을 이미 설명한 바 있다. 식(8)을 물체 표면에 따라서 적분하면 압력이 연속이라는 성질에 의해 와도보존원칙이 성립함을 알 수 있다. 유사한 방법으로 N-S 방정식에 법선벡터 \underline{n} 로 내적을 취하면 $\partial H / \partial n$ 에 대한 경계조건

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \underline{n} \cdot \left(-\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + (\underline{q} \times \underline{\omega}) - \frac{1}{Re} \nabla \times \underline{\omega} + \underline{f}_b \right) \text{ on } C_B, \quad (9)$$

을 얻을 수 있다. 식(8)과 (9)으로 주어진 두 경계조건이 연성되어 있음을 알 수 있다. 본 수치해석 방법에서는 경계면에서의 압력을 고려하여 와도와 동적인 연성관계를 반복 계산을 통하여 고려하였다. Wu와 Wu[13]는 와도의 동적인 경계조건에 대한 물리적인 해석과 3차원 유동에 대한 확장을 수행한 바 있다.

3. 수치해석방법

3.1. 유한체적법

현시간단계(시간 t^n 에 해당함)에서 계산된 속도와 와도장으로부터 다음시간단계($t^{n+1} = t^n + \Delta t$)로 전진하면서, 와도장은 바뀌게 되고 이때 무활조건이 만족되도록 적당한 크기의 와도플럭스가 물체 표면으로부터 생성된다. 이 적당한 크기는 슬립(slip) 속도가 작은 허용값 내(본 계산에서는 0.0001을 택함)에 이를때까지 반복계산을 행하면서 구한다. 슬립속도는 Biot-Savart 적분에 의해서(이 계산과정에서는 전체 속도장을 계산하지 않고) 물체 표면에서의 속도만을

계산함으로써 얻어진다. 임의의 이산화된 요소 셀 A 을 적분영역으로 삼고 식(2)을 적분하면, 셀평균의 와도변수와 셀경계면 ∂A 에서의 와도플럭스와의 균형을 표현하는 적분 형태의 식

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \omega dA + \int_{\partial A} (\underline{q} \cdot \underline{n} \omega - \frac{1}{Re} \underline{n} \cdot \nabla \omega) dC = 0, \quad (10)$$

을 얻는다. 여기서 $\underline{q} \cdot \underline{n} \omega - \frac{1}{Re} \underline{n} \cdot \nabla \omega$ 는 셀경계면에서 외부로 유출되는 플럭스를 의미하며, 확산항은 중심차분기법으로 근사화하고[18], 대류항은 Roe[19]가 제안한 플럭스수정(flux limiter)을 이용한 2차정도 TVD (total variation diminishing)기법[20], 시간에 대하여는 Euler 양해(explicit) 시간전진법을 사용한다. 실제로 시간간격 Δt 보다 작은 시간간격 δt 로 여러번의 중간단계의 시간전진을 행하여야만 수치해석의 안전성이 보장된다. 이 중간시간간격은 안정성 해석에 의해 $\delta t \leq \frac{d^2}{4/Re + \sqrt{2} q_s d}$ 으로 삼았다. 여기서 d 는 셀의 긴 대각선길이이며, q_s 는 셀 중심에서의 속도이다. 전체 계산 영역에서의 안정성을 확보하기 위하여는 모든 셀요소에 대한 이와 같은 허용값 중 최소값을 택하게 된다.

시간단계 끝에서 얻어진 와도분포에 대하여 계산된 가상의 슬립속도가 0이 되도록 와도가 물체표면에서 생성되며 유동장의 변화가 따르고 새로이 슬립속도가 계산된다. 무활조건과 와도플럭스와의 관계는 Wu등[14]이 제안한 비연성 기법으로 고려하였다. 작은 시간간격(Δt)내에서의 N-S 방정식의 시간 평균을 취하고 압력구배항을 가상의 슬립속도로 대처하면, 와도플럭스의 시간평균값($\bar{\sigma}$)은 다음과 같은 반복계산 과정을 통해서 얻게 된다.

$$\bar{\sigma}^{(k+1)} = \bar{\sigma}^{(k)} + \frac{V_s^{(k)}}{\Delta t}, \quad (11)$$

윗첨자는 반복계산과정단계를 의미한다. 실제로 Δt 동안 변화하는 유동현상을 고려하여야 하지만, 시간에 대한 이산화의 개념에서는 생성된 와도플럭스가 작은 시간간격내에서 불변이라는 가정을 이용하여 전체적으로 와도와 압력과의 연성관계를 유지하면서 속도에 대한 무활조건을 통해 국부적으로 비연성을 시킴으로써 수치계산상 편리한 점이 있다. 다만, 이러한 국부적인 비연성 기법은 무활 조건을 만족시키는 와도 플럭스를 얻는 데 목적을 두고 있지만, 압

력과 힘의 평형을 얻기 위해서는 압력방정식의 풀이과정에서 전체적인 연성관계를 포함시켜야 한다. 이에 대한 구체적인 언급은 3.3절에서 다루기로 한다. 물체표면에서의 와도 ω_B 는 와도플럭스로부터 이산화된 미분 개념

$$\omega_B = Re d_1 \sigma + \omega_1, \quad (12)$$

으로 표현된다. 여기서 d_1 는 물체 표면에 인접한 셀의 중심의 표면으로부터의 법선방향 거리이며, ω_1 는 셀중심에서의 와도값이다.

3.2. Biot-Savart 적분

와도를 기저로 한 수치해석기법에서 속도장을 얻는 방법 중의 하나인 Biot-Savart 적분방법을 본 연구에서 택하였다. Biot-Savart 적분은 하나의 사각형 셀요소에 대해서 고려하기로 한다. 셀요소상의 적분점과 계산점을 각각 ξ 과 \mathcal{P} 로 표시하고 두 점간의 거리 벡터를 $\mathbf{r} = \xi - \mathcal{P}$ ($r = |\mathbf{r}|$)으로 정의하면, 이 셀요소에 분포된 와도로 인하여 점 \mathcal{P} 에서의 유기속도는

$$\begin{aligned} \underline{u} &= -\frac{1}{2\pi} \int_A \underline{\omega} \times \nabla(\ln r) dS \\ &= -\frac{k}{2\pi} \times \int_A \omega \nabla(\ln r) dS, \end{aligned} \quad (13)$$

으로 표현되며, 피적분항에 대한 변환

$$\omega \nabla(\ln r) = \nabla(\omega \ln r) - \frac{1}{2} \{ \nabla \cdot (\mathbf{r} \ln r) - 1 \} \nabla \omega, \quad (14)$$

과 더불어 와도의 세기가 선형적인 분포인 경우, Gauss 정리에 의하여 다음과 같이 선적분항으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \underline{u} &= -\frac{k}{4\pi} \times \left[\oint_{\partial A} \underline{n} \omega (\ln r^2 + 1) dC \right. \\ &\quad \left. - \nabla \omega \oint_{\partial A} (\underline{n} \cdot \mathbf{r}) \ln r dC \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 선적분은 셀요소의 경계인 직선변을 따라 시계반대방향으로 행해지며, \underline{n} 는 변에서 바깥으로 향하는 단위법선벡터이다. 따라서 각 변의 선분에 대한 선적분항의 합산 형태인

$$\underline{u} = -\frac{k}{2\pi} \times \left(\sum_{i=1}^4 I_i \right), \quad (16)$$

으로 표현된다. 여기서

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{1}{2} \underline{n}_i \int_0^{\ell_i} \omega (\ln r^2 + 1) dC \\ &\quad - \frac{1}{4} \nabla \omega (\underline{n}_i \cdot \mathbf{r}) \int_0^{\ell_i} \ln r^2 dC. \end{aligned} \quad (17)$$

아래첨자 i 는 각 변을 구분하는 지수이며, ℓ_i 는 그 변의 길이이다. 각 선적분은 독립적으로 계산되므로 한 변에 대한 결과를 다른 변에서도 동일하게 적용할 수 있다. 자세한 적분 과정과 3차원 확장에 대하여는 문헌[21]을 참조하기 바란다.

본 해석이 와도세기가 셀요소별로 선형적으로 분포되는 경우에 적용되고 있지만, 본 연구에서는 셀요소별로 균일하게 분포되었다고 간주하여 위에 보인 적분항 중 첫 번째 항만을 고려하였다. 더욱이 적분이 엄밀함에도 불구하고 최종 결과형태에 나타나는 로그와 역탄젠트의 초월함수로 인해 어느 정도의 계산 시간이 소요된다. 따라서 계산점의 거리가 멀리(예를 들면 셀요소의 대각선의 5배 이상) 떨어진 경우 식(13)을 직접 이용하여 면적이 A 인 셀요소내의 와도를 세기가 ωA 인 점보우텍스(point vortex)가 셀요소의 중심에 위치한 것으로 대치하여 처리하였다. 이러한 일련의 적분과정을 모든 셀요소에 적용하여 얻은 값을 합하여 유기속도장을 계산하고, 이미 주어진 유입류의 속도나 경계면에서의 속도로부터 산출되는 유동장과 합치면 원하는 전체 속도장을 얻어낸다.

3.3. 전체압력방정식

앞서 얻어진 와도장과 속도장을 이용하여, 전체압력에 대한 적분방정식을 풀면 $n+1$ 번째 시간 단계에서의 모든 계산결과를 구성하게 된다. 물체가 고정되어 있거나 정속으로 병진운동하는 경우(순간적으로 정속 출발하는 경우도 포함), $\partial H / \partial n$ 에 대한 식(9)을 식(6)에 대입하고 유동장내의 점을 물체표면점(\mathcal{P}_B)으로 접근시키면 전체압력 H 에 대한 다음과 같은 Fredholm 2종 적분방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H &+ \frac{1}{2\pi} \int_{C_B} H \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} dC \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{C_B} \frac{1}{Re} \underline{n} \frac{\partial \omega_B}{\partial s} \ln r dC \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_S (\underline{q} \times \underline{\omega} + \underline{f}_b) \cdot \nabla(\ln r) dS. \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 물체표면 C_B 를 따른 적분은 Cauchy principal value 적분을, 미분변수 s 는 경계면의 접선방향을 의미한다. 식(6)의 면적분항은 벡터 연산 $\nabla \cdot (q \times \omega + f_b) \ln r = \nabla \cdot \{ (q \times \omega + f_b) \ln r \} - (q \times \omega + f_b) \cdot \nabla \ln r$ 과 Gauss 적분 정리를 이용하여 처리 한다. 결국 본 연구에서 다루는 압력 계산은 압력 Poisson식의 적분형에 근간을 두고 있다. 적분방정식 풀이 방법으로 이상유체해석에서 잘 정립된 panel방법과 유사한 균일특이 점분포방식에 해당하는 저차방법을 택하였다. 물체경계는 N 개의 직선panel을 연결하여 구성하고 그에 따른 식(19)의 두 적분항이 각각의 panel에 대한 기여항으로 표현된다. 식(19)의 우변의 면적분은 식(13)에 Biot-Savart적분항과 그 형태가 유사하다. 이때 $(q \times \omega) \cdot \nabla (\ln r)$ 를 $\omega \times \nabla (\ln r)$ 으로 대체하면서 $(q \times \omega)$ 의 유동장에서의 분포를 가지고 3.2절에서 언급한 적분기법을 사용할 수 있다.

3.4. 계산수행절차

앞 절에서 다룬 수치기법을 종합한 계산수행절차를 Fig. 1에 도식적으로 나타내었으며, 요약하면 다음과 같다.

- (i) n 번째 시간단계(시간 t 에 해당)에서 속도장 q^n 과 와도장 ω^n 이 계산되었다고 가정하고 $n+1$ 번째 시간단계(시간 $t + \Delta t$)에서의 와도장 ω^{n+1} 를 구한다. 식(2)으로 주어진 와도이송방정식을 무활조건에 맞게 시간 전진에 따라 유한체적법을 이용하여 푼다. 식(11)에 주어진 시간평균개념의 와도플럭스를 무활조건이 만족하도록 반복 계산과정을 통하여 갱신한다. 필요한 슬립속도는 Biot-Savart적분을 이용하여 계산하되 물체 표면에서만 속도 계산만이 필요하기 때문에 많은 계산 시간이 필요하지 않다. 전산프로그램 구성시 각 셀요소별로 분포된 단위세기의 와도에 의한 슬립속도에 미치는 영향을 일단 한 번만 계산한 후 이를 기억하여 필요시마다 사용하는 방식을 택하여 계산시간을 상당히 절약할 수 있었다.
- (ii) 절차(i)에서 구한 와도장 ω^{n+1} 에 해당하는 속도장 q^{n+1} 을 구하기 위하여 3.2절에서 다룬 Biot-Savart 적분을 수행한다. 와도세기는 각 셀요소별로 균일하게 분포되었다고 가정한다.

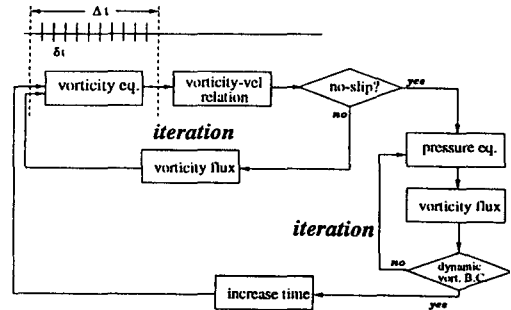


Figure 1. Flow chart for solution procedure

- (iii) 절차(i)과 (ii)에서 구한 와도장과 속도장으로부터 H^{n+1} 에 대한 적분방정식을 푼다. 이때 식(19)에 포함된 $\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega_B}{\partial s}$ 항을 계산한다. 즉 물체표면을 따라 물체표면와도의 접선방향 구배를 구한다. 이때 필요한 표면와도(ω_B)는 식(12)로부터 구한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 와도플럭스는 압력의 접선방향구배와 관련이 있기 때문에 반복계산과정을 통해 압력과의 연성관계를 고려한다. 반복계산시 초기추정은 절차(i)에서 구한 시간평균 개념의 와도플럭스를 이용하여 물체와도값을 정하고 이를 압력경계조건 부과시 사용하여 물체표면에서의 전체 압력값을 구하고 이로부터 압력의 접선방향구배를 구한 후 와도플럭스를 갱신하고 이와 같은 반복계산과정을 수렴된 결과가 얻어질 때까지 반복 수행한다.
- (iv) 앞서의 절차 (i), (ii), (iii)을 다음 시간 단계에서 수행한다. 초기상태의 유동은 이상유체해석에서 얻은 결과를 이용할 수 있으며, 특히 순간적으로 운동하는 물체의 경우 실험적으로 실제 경계층 형성의 구현이 어렵지만 이론적으로 $t = 0^+$ 에서 이상유체유동이 존재하고 물체표면에서 슬립속도가 특이현상을 가지면서 존재하게 된다. Biot-Savart적분은 매 시간단계에서 필요하므로 중복계산을 피하기 위하여 계산기 기억용량이 허용되는 범위내에서 그 적분값을 저장한다. 셀요소의 중심에서의 값을 주위의 격자점에서의 값으로 환산하는 경우 중심으로부터 그 점까지의 거리에 반비례하여 그 영향을 취하는 평균값 개념을 사용한다.

4. 계산예: 2차원 구동 cavity 유동

2차원 구동cavity내의 점성유동해석은 수치해석기법의 타당성을 검증하기 위한 예제로서 많이 채택되어 왔다. 기하학적인 형상과 경계조건은 단순하지만 유동 특성은 매우 복잡하므로 다른 결과와 비교함으로써 본 해석기법의 정확도를 확인하고자 한다. cavity 윗판($y=1$ 에 위치)에서 수평방향(x 방향)의 속도분포 $q_x = f(x)$ 로 주어지고 연직방향 물체력

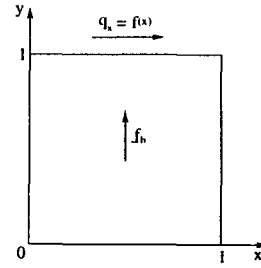


Figure 2. Flow geometry for driven cavity

$$\underline{f}_b \cdot \underline{j} = 8Re[24F(x) + 2f'(x)g''(y) + f'''g(y)] \\ + 64[F_2(x)G_1(y) - g(y)g'(y)F_1(x)],$$

여기서

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2, g(y) = y^4 - y^2, \\ F(x) = \int_0^x f(x)dx, \\ F_1(x) = f(x)f''(x) - [f'(x)]^2, \\ F_2(x) = 0.5f^2(x), \\ G_1(y) = g(y)g'''(y) - g'(y)g''(y)$$

이 주어진 경우에 엄밀해가 존재한다[16,17] (Fig. 2 참조). Figs. 3-4에 Reynolds수(Re) 100에서 시간 간격과 격자수를 바꾸어 가면서 정상상태에 도달된 수치해석결과의 수렴성을 엄밀해와 비교하여 검증하였다. 본 계산은 시간전진에 의한 비정상계산을 수행하고 있기 때문에 초기에 순간적으로 출발하는 경우로 가상하였다. 정상상태의 판정은 연속적인 시간단계에서 와도, 속도, 압력의 시간간격에 대한 상대적인 변화비가 0.001내에 이르렀을 때로 삼았다. 내벽 가까이에 격자점을 상대적으로 조밀하게 분포시키는 통상의 방법대신 균일한 격자계를 사용하였는 바, 그 이유는 동일한 셀요소에 대해 Biot-Savart적분값을 기억, 저장하기가 용이하기 때문이다. 계산은 서울대학교 공과대학이 보유하고 있는 CRAY-J916기종의 계산기를 사용하였으며 61×61 격자점과 $\Delta t = 0.05$ 를 사용하는 경우 매시간 단계를 전진하는 데 약 1초의 CPU가 소요된다. 이 경우 와도경계조건 과 압력경계조건을 만족시키기 위해 보통 약 10번 내외(단, 정상상태에 상당히 도달함에 따라 2 내지 5번)의 반복계산과정이 수반된다. 이때 반복계산의 수렴도는 허용슬립속도와 허용압력변화를 공히 0.0001내로 택하였다. 그림

상의 수평축은 윗판에서 시작하여 시계방향으로 돌면서 cavity 경계면의 위치를 표시하며 경계면에서의 와도분포, 와도 플럭스, 압력분포를 나타내고 있다.

Fig. 3에는 격자점 61×61 을 사용하여 2개의 시간간격을 달리 택함($\Delta t = 0.05, 0.1$)에 따라 cavity 벽면에서의 와도, 와도플럭스, 압력 분포를 보이고 있다. 이에 의하면 그 수렴성이 좋을 것을 확인하였고 이후의 계산결과에서는 시간간격으로 $\Delta t = 0.05$ 를 택하였다. 3개의 격자계 선택($41 \times 41, 61 \times 61, 81 \times 81$)에 따른 상응하는 영향을 Fig. 4에 보였으며 이 경우 택한 격자수에 대한 계산 결과가 민감하지 않음을 알 수 있다. 다만, 고전적인 통상의 구동 cavity 유동에서는 높은 Reynolds 수에서 복잡한 보우텍스 유동이 구석 근처에서 발생하여 가까이에 위치한 다른 벽면 근처의 유동을 유기하는 바 그 유동 특성을 제대로 구현하기 위해서는 벽면 근처에 조밀한 격자분포가 요구되나, 본 경우는 복잡한 보우텍스 유동이 없는 경우로서 조밀한 격자계를 택하지 않아도 된다. 본 연구의 주된 목적이 제안하고 있는 수치해석방법의 타당성을 검증하고자 하는 일이기 때문에 Fig. 5, 6, 7에 보인 계산 결과에서는 격자수 61×61 을 택하였다. Fig. 5에는 시간경과에 따른 cavity 중심선상에서의 속도분포의 변화를 보이고 있다. 여기서 cavity 윗판으로부터 발생된 와도의 cavity 내로의 확산과 대류작용이 중심쪽으로 확장되고 그에 따른 유동의 변화가 전파되는 양상을 보이고 있다. Fig 6에는 시간경과에 따른 cavity 내부의 운동에너지의 증가를 보이고 있다. 정상상태에서의 운동에너지의 엄밀해는 $1216/33075$ 이다. 운동에너지는 셀요소 중심에서의 속도의 제곱에 셀요소의 면적을 곱하고 각각의 셀에 대하여 이를 합산하여 산정하였다. 초반시간에는 cavity 윗판에서 유도되는 운동에너지가 내부로 전달되면서 급격히 증가함을 알 수 있고 일정 시간이

경과하면서 그 증가폭이 둔감되고 정상상태에 이르게 되면 윗판에서의 운동에너지 공급과 내부에서의 유체점성에 의한 소멸(dissipation)이 균형을 이루게 된다. Fig. 5에 보인 중심선상에서의 속도분포로부터 보우텍스 유동의 중심위치의 시간경과에 따른 변화를 알 수 있는 바 이와 같은 양상을 뒷받침하게 된다. 초기시간에 윗판 근처에 얇은 강력한 와도 경계층이 형성된 후 유체의 점성에 의해 그 두께가 점진적으로 커지고 그로 인해 내부 유동장을 교란시키면서 안정된 정상상태의 보우텍스 유동이 자리잡는 양상을 추정할 수 있다. 정상상태에서의 유선과 와도장, 압력장 분포를 Fig. 7에 보였다. 그림상으로는 본 계산 결과와 엄밀해와의 차이를 구분하기 힘들다. 여기서 특이한 점은 와도를 기저로 한 대부분의 수치해석방법에서 다루지 않는 압력 계산을 수행한 점이다. 기준 압력값은 cavity의 왼쪽윗구석 바로 밑에 위치한 벽면panel요소에서의 전체압력을 0으로 삼아 택하였다. 이는 전체압력에 대한 적분방정식의 이산화식인 1차연립방정식의 유일해를 얻기 위한 요구 조건이다. cavity내의 유동장이 엄밀해와 아주 잘 일치함을 알 수 있어 본 논문에서 제안하고 있는 방법이 앞서의 경계면에서의 물리량뿐만 아니라 내부에서의 유동장 특성을 잘 재현하고 있음을 확인하였다.

개발된 수치해석기법을 검증하는 또 하나의 문제로서 통상의 구동 cavity 문제 (즉, 앞서의 경우에서 $f(x) = 0, f_b = 0$ 에 해당함)를 택하였다. 많은 비교 대상의 계산 결과가 있으나 본 연구에서는 Ghia등[19]의 결과와 비교하였다. 사용된 격자수는 $Re = 1000$ 에 대하여는 81×81 이며, $Re = 5000$ 에 대해서는 121×121 이다. Fig. 8에는 $Re = 1000, 5000$ 에 대해 중심선상에서의 속도 분포를 나타내고 있다. 공히 Ghia등[17]의 결과와 일치된 결과를 제시하고 있다. cavity내의 유선, 와도장, 압력장을 Fig.9에 나타내었다. 본 문제의 경우, 압력구배에 의한 유동보다는 cavity윗판의 운동학적인 유동이 강한 유동으로써 예상대로 압력장의 구배가 완만하다. 여기에 직접 비교하고 있지 않지만, Ghia등의 결과와 정량적으로 일치함을 확인할 수 있다. 레이놀드 수가 증가함에 따라 제2, 제3의 보우텍스 유동이 발생하는 바 본 계산을 통해 이를 잘 표현하고 있다. 윗판의 양쪽 구석에서는 경계조건의 불연속으로 인한 모호성으로 인해 와도의 구배가 심하게 나타남에 따라, 그 근처에서의 경계조건을 부여하는 수치해석상의 반복계산과정에서 수렴성이 떨어

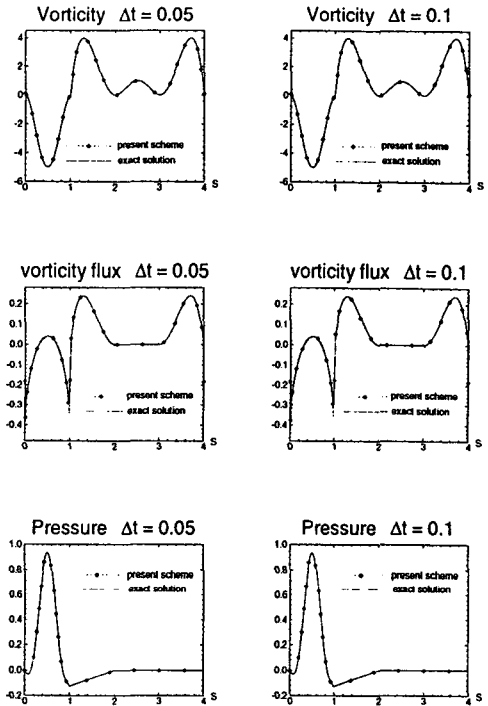


Figure 3. Sensitivity of time interval on vorticity, vorticity flux and pressure along the cavity wall for the cavity flow driven by shear and body force at $Re = 100$ with the 61×61 grid.

어지는 현상을 초래할 수 있다. 실제로 그 곳에서 급격히 변하는 와도분포를 제대로 구현하기 위해서는 많은 격자를 집중하여야 하는 어려움과 수치해석상의 불안정성을 해소하기 위하여 본 계산에서는 네 군데의 각 구석에 위치한 정사각형 격자를 두 개의 삼각형 격자로 나누어 계산하였다. cavity의 운동에너지의 시간경과에 따른 변화를 Fig. 10에 보였다. 이에 의하면 높은 레이놀드 수에서는 정상상태에 이르는 소요 시간이 오래 걸린다는 것을 알 수 있다. 따라서 정상상태의 결과만에 관심을 갖는 경우에는 계산시간의 절약을 위하여는 다격자제(multigrid)의 사용이 바람직할 것이다.

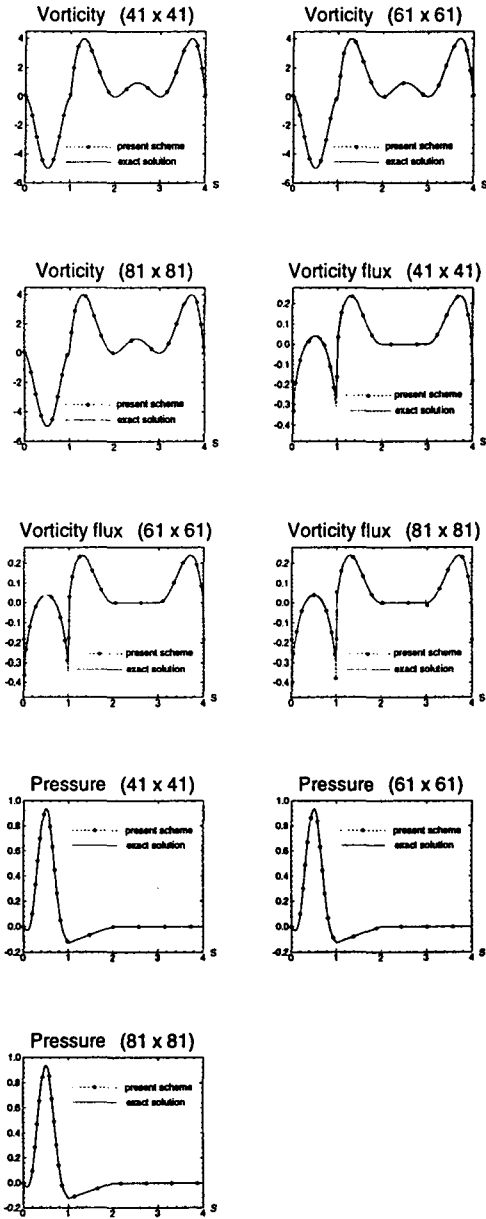


Figure 4. Sensitivity of mesh size on vorticity, vorticity flux and pressure along the cavity wall for the cavity flow driven by shear and body force at $Re = 100$ with $\Delta t = 0.05$.

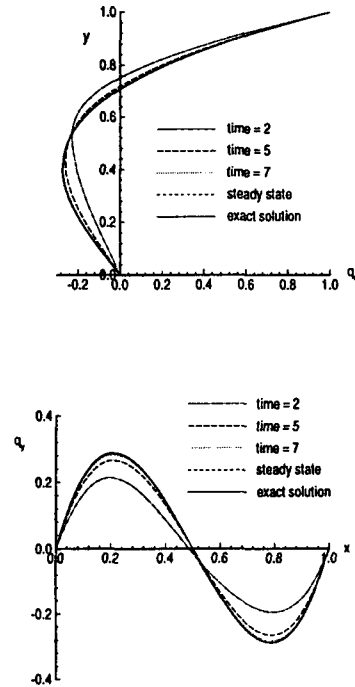


Figure 5. Time evolution of the velocity along the center lines of the cavity for the cavity flow driven by shear and body force at $Re = 100$ with $\Delta t = 0.05$ and the 61×61 grid.

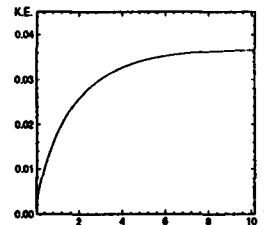


Figure 6. Time evolution of kinetic energy for the cavity flow driven by shear and body force at $Re = 100$ with $\Delta t = 0.05$, and the 61×61 grid.

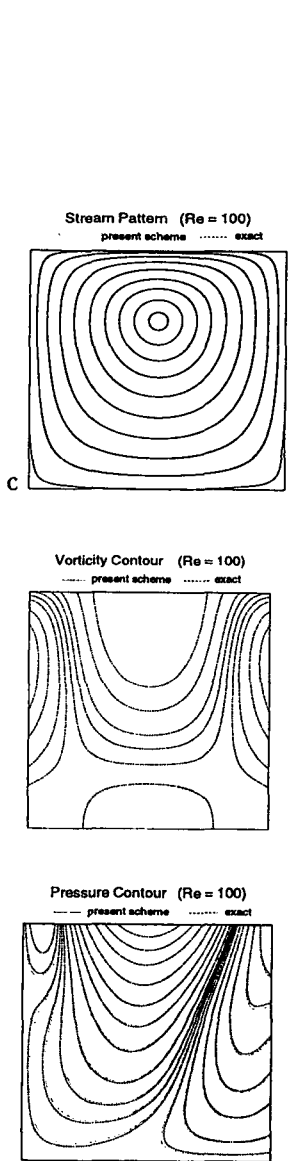


Figure 7. Streamline pattern, vorticity contour and pressure contour for the cavity flow driven by shear and body force at $Re = 100$ with $\Delta t = 0.05$ and the 61×61 grid.

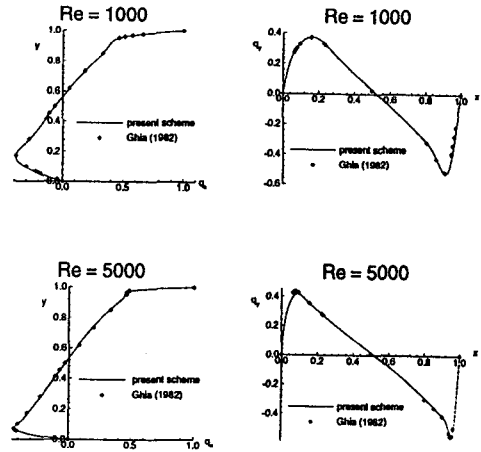


Figure 8. Velocity along the center lines for the classical driven cavity flow at $Re = 1000, 5000$ with $\Delta t = 0.05$.

5. 결론

본 논문에서는 2차원 비압축성 유체의 비정상점성유동해석을 위한 미분-적분형태의 수치해석방법을 제시하였다. 주안점은 와도-속도 정식화에서 나타나는 와도와 압력간의 연성관계를 반복계산방법을 이용하여 고려하는 접근방법에 있다. 또한 본 방법에서 필요한 Biot-Savart 적분에서 변환된 피적분항에 대하여 적분정리를 이용하여 선적분의 형태로 표현하고 해석적인 적분이 가능하도록 하였다. 와도, 속도, 압력에 대한 지배방정식을 순차적으로 푸는 수치 해석기법을 근간으로 하여 2차원 driven cavity 유동문제에 적용하여 수치해석 방법의 타당성을 검증하였다. 장차 본 연구에서 제시하고 있는 기본 개념을 이용하여 3차원 유동해석에 적용할 예정이다.

후기

본 연구는 한국진흥재단이 지원하는 1996년도 대학부설연구소 지원연구과제의 일환으로 수행하였다. 본 논문의 원고 작성에 보탬을 준 이경수군에게 고마움을 표한다.

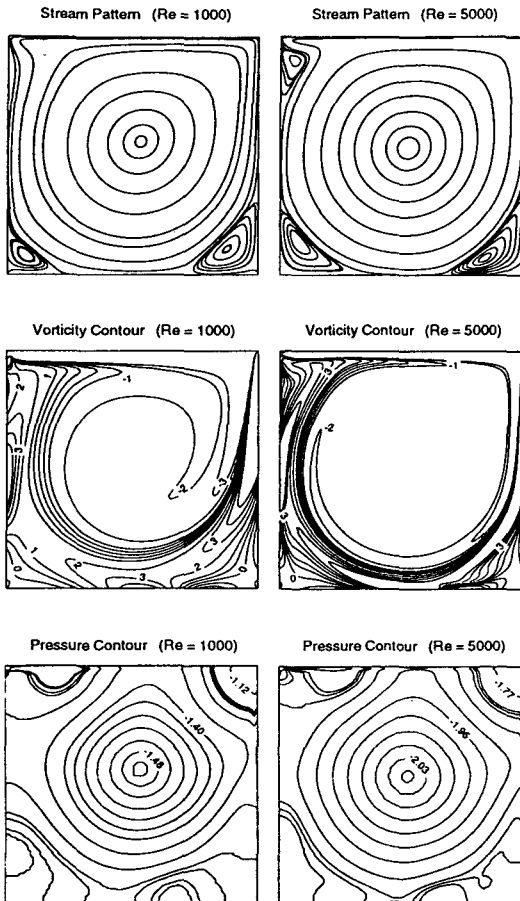


Figure 9. Streamline pattern, vorticity contour and pressure contour for the classical driven cavity flow at $Re = 1000, 5000$ with $\Delta t = 0.05$

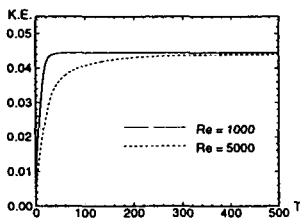


Figure 10. Time evolution of kinetic energy for the classical driven cavity flow at $Re = 1000, 5000$ with $\Delta t = 0.05$.

참고문헌

- [1] Lighthill, M. J., "Introduction, Boundary Layer Theory," *Laminar Boundary Layers*, edited by J. Rosenhead, Oxford University Press, New York (1963), p. 54
- [2] Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1967).
- [3] Chou, M.-H. and Huang, W., "Numerical Study of High-Reynolds-Number Flow Past a Bluff Object," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 23 (1996), p. 711.
- [4] Dennis, S. C. R. and Hudson, J. D., "An h^4 Accurate Vorticity-Velocity Formulation for Calculating Flow Past a Cylinder," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 21 (1995), p. 489.
- [5] Ern, A. and Smooke, M. D., "Vorticity-Velocity Formulation for Three-Dimensional Compressible Flows," *J. Comp. Physics*, Vol. 105 (1993), p. 58.
- [6] Guj, G. and Stella, F., "A Vorticity-Velocity Method for the Numerical Solution of 3D Incompressible Flows," *J. Comp. Physics*, Vol. 106 (1993), p. 286.
- [7] Koumoutsakos, P. and Leonard, A., "High-Resolution Simulations of the Flow Around an Impulsively Started Cylinder Using Vortex Methods," *J. Fluid Mech.*, Vol. 296 (1995), p. 1.
- [8] Koumoutsakos, P. and Shiels, D., "Simulations of the Viscous Flow Normal to an Impulsively Started and Uniformly Accelerated Flat Plate," *J. Fluid Mech.*, Vol. 328 (1996), p. 177.
- [9] Wu, J.-Z., Wu, X.-H., Ma, H.-Y. and Wu, J.-M., "Dynamic Vorticity Condition: Theoretical Analysis and Numerical Implementation," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 19 (1994), p. 905.
- [10] Gresho, P. M., "Incompressible Fluid Dynamics: Some Fundamental Formulation

- Issues," *Ann. Review Fluid Mech.*, Vol. 17 (1991), p. 411.
- [11] Speziale, C. G., "On the Advandages of the Vorticity-Velocity Formulation of the Equations of Fluid Dynamics," *J. Comp. Physics*, Vol. 73 (1987), p. 476.
- [12] Wu, J. C., "Theory for Aerodynamic Force and Moment in Viscous Flows," *AIAA J.*, Vol. 19, No. 4 (1981), p. 432.
- [13] Wu, J.-Z. and Wu, J.-M., "Interactions Between a Solid Surface and Viscous Compressible Flow Field," *J. Fluid Mech.*, Vol. 254 (1993), p. 183.
- [14] Anderson, C. R., "Vorticity Boundary Conditions and Boundary Vorticity Generation for Two-Dimensional Viscous Incompressible Flows," *J. Comp. Physics*, Vol. 80 (1989), p. 72.
- [15] Shih, T. M., Tan, C. H. and Hwang, B. C., "Effects of Grid Staggering on Numerical Schemes," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 9 (1989), p. 193.
- [16] Rida, S., Mckenty, F., Meng, F. L. and Reggio, M., "A Staggered Control Volume Scheme for Unstructured Triangular Grids," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 25 (1997), p. 697.
- [17] Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. Comp. Physics*, Vol. 48 (1982), p. 387.
- [18] Hoffman, K. A. and Chiang, S. T., *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Publication of Engineering Education System, Wichita (1993).
- [19] Roe, P. L., "Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows," *Proc. 1983 AMS-SIAM Summer Seminar on Large Scale Computing in Fluid Mech., Lectures in Applied Math.*, Vol. 22 (1985), p. 163.
- [20] Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester (1990).
- [21] Suh, J. C. "The Evaluation of the Biot-Savart Integral," (submitted to *J. Eng. Math.* (1997)).