

論文98-35S-10-18

# 제한된 최소 자승 오차 기준에 의한 다양한 FIR 필터 구현

## (Implementation of Various FIR Filters using Constrained Least Square Criterion)

洪承億\*, 金重圭\*\*

(Seungeok Hong and Kim Joong Kyu)

## 요 약

본 논문에서는 Adams에 의해 제안된 제한된 최소 자승 오차 기준에 의한 FIR 필터 설계 방법을 기초로 하여 저역 통과 필터 외의 다른 여러 가지 필터를 설계할 수 있는 방법론을 제시하였다. 이 방법에 의한 설계는 기존의 자승 오차 최소화 방법과 최대 오차 최소화 방법의 혼합된 형태로써 오차 기준으로 자승 오차와 최대 오차 두 가지를 동시에 고려하게 되며, 최고 이득, 전이 대역폭, 자승 오차 세가지가 모두 만족될 때만 그 해 즉, 임펄스 응답을 찾을 수 있게 된다. 이때 최적화 과정에서는 다중 교환 알고리즘을 이용하였다. 본 논문은 위의 두 중요 오차 기준의 상호 보완을 통하여 다중 대역 통과 필터, 미분기 및 Hilbert 변환기 등의 최적 설계에 적용할 수 있는 방법에 대해 고찰하였으며, 그 결과 제한된 최소 자승 오차 기준에 의한 설계 방법이 단순한 저역 통과 필터 뿐만이 아니라 여러 가지 다양한 FIR 필터 설계에 있어서도 그 우수함을 증명할 수 있었다.

## Abstract

In this paper, we studied some design methodologies of typical FIR filters based on the peak-error constrained least square criterion which was first introduced by Adams in 1991. This method is a mixed type of the classical least squared error method (LSM) and the so-called min-max error method (MMM). And by considering both the least squared error as well as the maximum error, the solution, i.e. the impulse response of the filter, can be found only when the restrictions on maximum gain, transition bandwidth, and the squared error are satisfied simultaneously under some trade-off conditions. We used the multiple exchange algorithms for optimization procedure and applied the design methodology to the cases of the multiband filter, the differentiator, and the Hilbert transformer by taking the balance of two design criteria into account. The results show that the peak-error constrained least weighted square error design method (PLEM) is superior in performance to the existing LSM and MMM from both the squared error and the maximum error standpoints. And it is verified that PLEM can be applied to not only the case of simple low pass filter, but also to various types of FIR filters.

## I. 서 론

기존의 FIR 필터 설계 방법으로는 주파수 샘플링

방법 (Frequency Sampling Method : FSM), 자승 오차 최소화 방법 (Least Squared-Error Method : LSM), 최대 오차 최소화 방법 (Minimum

\* 正會員, 韓國通信프리텔  
(Korea Telecom Freetel)

(Dept. of Electrical, Electronic and Computer Engineering, Sung Kyun Kwan Univ.)

\*\* 正會員, 成均館大學校 電氣電子컴퓨터工學部

接受日字: 1998년2월4일, 수정완료일: 1998년7월8일

Maximum-Error Method : MMM)등이 있다<sup>[1]-[5]</sup>. 이들 방법은 나름대로의 장단점을 지니고 있으며, 그 특성에 맞추어 여러 응용 분야에서 널리 사용되어지고 있다. 그러나 자승 오차 최소화 방법(LSM)과 최대 오차 최소화 방법(MMM)은 필터를 설계하는데 있어 오차 기준으로 자승 오차(squared error), 최대 오차(maximum error) 두 가지의 중요한 오차 기준 중 한가지만을 중시하고 다른 기준은 무시하게 되므로 두 가지 기준을 모두 고려해야 하는 분야에서는 문제점이 있었다<sup>[6]</sup>. 이러한 문제점을 보완하기 위해 Adams는 최대 오차 제한을 통한 최소 가중 자승 오차 방법(Peak-constrained Least Weighted-squared Error Method : PLEM)에 의한 FIR 필터를 연구하였다<sup>[6]</sup>. 이 논문을 시발점으로 하여 지금까지 이 분야에 대한 많은 연구가 진행되어지고 있다. 그 연구 방향의 큰 두 줄기는 단일 대역 일반 필터 설계 시 새로운 최적화 알고리즘을 개발하는 것<sup>[7]</sup>과 새로운 오차 기준을 세우는 것이었으며<sup>[8]</sup>, 응용 분야로는 비선형 위상 FIR 필터 설계에 적용되어지는 예가 제시되기도 하였다<sup>[9]</sup>. 이에 이 설계 방법을 바탕으로 하여 보다 확장된 형태인 다중 대역 통과 필터, 미분기, Hilbert 변환기 등을 설계하는 방법을 보이는 것이 본 논문의 목적이다.

본 논문에서 사용된 설계 방법은 Adams의 방법을 기초로 하게 된다. 각각의 응용분야에 따라 새로운 목적 함수와 제한 조건을 설정하였다. 그리고 최적화 방법으로는 Adams의 논문에서 사용되어진 다중 교환 알고리즘(multiple exchange algorithm)을 적용하였다.

본 논문의 구성은 FIR 필터에 적용되는 기본 표현과 Adams의 설계 방법을 간단히 설명한 후, 다중 대역 통과 필터, 미분기, Hilbert 변환기 설계로 이루어져 있다.

II. 주파수 응답 및 에너지에 대한 벡터 표현

길이가  $L$ 인 필터의 임펄스 응답(impulse response :  $h(n)$ )에 대한 주파수 응답(frequency response :  $H(e^{j2\pi f})$ )은 식 (1)로 표현되어지며, 이를 다시 벡터로 표현하면 임펄스 응답 벡터( $h$ )와 푸리에 커널 벡터( $k$ )의 내적으로서 식 (2)와 같이 된다.

$$H(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n)e^{-j2\pi fn} \tag{1}$$

$$H(e^{j2\pi f}) = k^T h \tag{2}$$

여기에서

$$h^T = [h(0), h(1), h(2), \dots, h(L-1)], k^T = [1, e^{-j2\pi f}, e^{-j4\pi f}, \dots, e^{-j2\pi(L-1)f}] \text{ 이다.}$$

선형 위상 특성을 가지는 FIR 필터의 특징은 그 임펄스 응답이 좌우 대칭에 있으며, 이를 분리하면 I, II, III, IV형 네가지로 나타낼 수 있다<sup>[11]-[15]</sup>. I형은 필터의 길이가 홀수이면서 임펄스 응답이 그 중심을 기준으로 할 때 우함수 특성을 보이며, II형의 경우 좌우 대칭은 I형과 같으나 그 길이가 짝수이다. III형은 I형과 같이 필터의 길이가 홀수이나 좌우 대칭 구조가 기함수적이며, IV형은 짝수 필터 길이에 기함수적 좌우 대칭 구조를 갖는다.

저역 통과 필터, 고역 통과 필터, 대역 통과 필터, 대역 저지 필터 등 일반 FIR 필터는 설계 시 선형 위상을 가지기 위해서 I형이나 II형의 형태이어야 한다<sup>[11]-[15]</sup>. I형이나 II형은 좌우가 서로 우함수적인 임펄스 응답을 가지고 있기 때문에 주파수 응답을 계산할 때, 싸인(sine) 항은 좌우가 상쇄되고 코싸인(cosine)항만 남게 되어 복소수가 아닌 실수가 된다. 그러므로 실제 설계 시에는 복소수 형태인 원래의 주파수 응답 보다는 실수 값만을 갖는 아래 식 (3)에 정의되어진 영위상 주파수 응답(zero-phase frequency response)을 사용하는 것이 편리하다.

$$H_0(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) \cos \left[ 2\pi \left( n + \frac{1-L}{2} \right) f \right] \tag{3}$$

또한 이의 벡터 표현은 식 (4)와 같이 된다.

$$H_0(e^{j2\pi f}) = s^T(f)h \tag{4}$$

여기에서  $s^T(f)$ 는  $(1 \times L)$  행렬로 그 요소는

$$\cos \left[ 2\pi \left( n + \frac{1-L}{2} \right) f \right] \text{ (} n=0, 1, \dots, L-1 \text{) 이다.}$$

그리고 미분기나 Hilbert 변환기 등 주파수 응답이 허수만으로 표현되어지는 필터에 대해서는 III형이나 IV형의 형태를 가져야 한다<sup>[11][3]</sup>. III형이나 IV형의 임펄스 응답은 계수의 중간을 기준으로 좌우가 기함수적 형태를 띠고 있다. 그러므로 주파수 응답을 구하는데 있어 코싸인(cosine) 항은 좌우가 서로 상쇄되어

없어지게 되고 싸인(sine) 항만이 남게 된다. 즉 허수 항만이 남게 된다. 그러므로 III형이나 IV형의 설계에 있어서도 원래의 주파수 응답을 계산하는 것보다는 허수 항의 크기만을 계산하고 나중에 허수 항 처리 즉, 위상을 고려하는 것이 보다 편리하다. 이때 주파수 응답의 허수 항에 대한 크기 응답 표현은 식 (5)와 같이 되며, 그의 벡터 표현식은 I, II형처럼 식 (4)로 나타낼 수 있다. 그러나 이 때  $s(f)$ 는  $(1 \times L)$  행렬로 형태는 I, II형과 같으나 요소가  $\sin\left[2\pi\left(n+\frac{1-L}{2}\right)f\right]$  ( $n=0,1,\dots,L-1$ ) 로 I, II형과는 다르다.

$$H_0(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) \sin\left[2\pi\left(n+\frac{1-L}{2}\right)f\right] \quad (5)$$

주파수 응답 ( $H(e^{j2\pi f})$ )에 있어  $F_L$ 과  $F_U$  사이의 주파수 대역에서의 에너지( $E$ )는 식 (6)으로 정의 되며, 이는 식 (7)과 같이 행렬식으로도 나타낼 수 있다.

$$E = 2 \int_{F_L}^{F_U} |H(e^{j2\pi f})|^2 df \quad (6)$$

$$E = h^T Q h \quad (7)$$

여기에서  $Q$ 는  $(L \times L)$  행렬로서 식 (8)로 표현되어진다.

$$Q = 2 \int_{F_L}^{F_U} k k^* df \quad (8)$$

여기에서  $k$ 는 위에서 언급한 푸리에 커널을 의미한다.

### III. Adams 설계 방법

Adams는 필터 설계 시 통과 대역과 저지 대역의 최고 이득을 제한하면서 전체 가중된 자승 오차를 최소화하는 기준을 세웠으며, 저역 통과 필터에 대한 예를 제시하였다. 본 절에서는 이와 같은 저역 통과 필터를 통한 Adams의 설계 방법에 대해 살펴보기로 하며, 먼저 필터 설계 문제를 최적화에 적합하도록 목적 함수와 제한 조건으로 분리한 다음 최적화 알고리즘에 대해 고찰해 보도록 한다.

#### 1. 목적 함수와 제한 조건 정의

저역 통과 필터의 경우 최소화하려는 가중 자승 오차의 일반 표현은 아래의 식 (9)와 같다<sup>16)</sup>.

$$\varepsilon = 2W_p \int_0^{F_p} |H(e^{j2\pi f}) - G_p e^{j\pi f(1-L)}|^2 df + 2W_s \int_{F_s}^{1/2} |H(e^{j2\pi f})|^2 df \quad (9)$$

여기에서  $F_p$ 와  $F_s$ 는 통과 대역과 저지 대역의 경계점들의 정규화 된 주파수를 각각 나타낸다. 그리고  $W_p$ 와  $W_s$ 는 각각 통과 대역과 저지 대역의 오차 가중치를 나타내며,  $G_p$ 는 통과 대역의 이득을 나타낸다. 가중 오차를 고려할 때, 식 (9)의 앞부분은 통과 대역의 자승 오차를 나타낸 것이고 뒷부분은 저지 대역의 자승 오차를 나타낸 것이다. 특히 이 식에서 전이 대역에 대한 오차는 고려하지 않았다. 앞으로 전개되는 모든 필터도 여기에서와 같이 전이 대역에서의 오차는 고려하지 않고 통과 대역과 저지 대역 오차만 관심을 둘 것이다.

위의 가중 자승 오차의 임펄스 응답( $h$ )에 대한 2차 행렬 표현식은 (10)과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= h^T R_p h - 2h^T p + r + h^T R_s h \\ &= h^T R h - 2h^T p + r \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서 식 (8)의 행렬  $Q$ 에 대한 통과 대역 행렬 성분을  $Q_p$ 라 하고 저지 대역의 행렬 성분은  $Q_s$ 라 할 때,  $R_p = W_p Q_p$ ,  $R_s = W_s Q_s$ 이며  $R$ 은 그들의 합, 즉  $R = R_p + R_s$ 이다. 행렬  $p$ 는  $(L \times 1)$ 으로 식 (11)로 나타내어진다. 이 때  $s(f)$ 는 저역 통과 필터를 설계하므로 I, II형에서 사용된 요소가 적용되어야 한다(식 (4) 참조). 그리고 스칼라 값  $r$ 이 있는데, 이는 다음 절에서 설명할 최적화 알고리즘의 초기화 단계에서 미분에 의해 그 값을 잃게 된다.

$$p = 2W_p G_p \int_0^{F_p} s(f) df \quad (11)$$

위의 식 (10)과 (11)을 살펴보면, 이득이나 대역폭이 필터 설계 시 주어지는 값이므로 자승 오차가 임펄스 응답에 의해 결정됨을 볼 수 있다. 즉, 자승 오차가 임펄스 응답에 대한 2차식이 됨을 의미한다. 이를 바탕으로 하여 다음절에 설명할 최적화 알고리즘이 전개된다.

이 때 대역 이득에 대한 제한 조건이 있어야 하는데 통과 대역 이득 제한 조건은 식 (12)로, 또한 저지 대역 이득 제한 조건은 식 (13)으로 나타내어진다. 여기에서  $\delta_p$ 는 통과 대역 이득 오차 한도이며,  $\delta_s$ 는

저지 대역 이득 오차 한도를 의미한다.

$$\left| H(e^{j2\pi f}) - G_p e^{j\pi f(1-L)} \right| \leq \delta_p \quad (12)$$

$$\left| H(e^{j2\pi f}) \right| \leq \delta_s \quad (13)$$

그리고 위의 대역 이득 제한 조건에 대한 영위상 응답 표현은 식 (14)와 식 (15)로 표현할 수 있으며, 이의 선형 부등식 행렬 표현은 식 (16)이 된다.

$$s^T(f)h - G_p + \delta_p \geq 0, \quad -s^T(f)h + G_p + \delta_p \geq 0 \quad (14)$$

$$s^T(f)h + \delta_s \geq 0, \quad -s^T(f)h + \delta_s \geq 0 \quad (15)$$

$$Bh - b \geq 0 \quad (16)$$

여기에서 행렬  $B$ 와  $b$ 는 식 (14)와 (15)의 값을 행렬화 한 것이다.  $M$ 을 설계의 정확성을 위해 계산상에 설정하는 격자수라 할 때, 행렬  $B$ 는 크기가  $(2M \times L)$ 로서 그 요소는 통과 대역의 것 즉, 식 (14)의  $s^T(f)$ 가 앞 행에 위치하고 그 뒤로 저지 대역의  $s^T(f)$ 가 위치하게 된다. 그리고 행렬  $b$ 는  $(2M \times 1)$ 의 크기로 그 요소는 행렬  $B$ 와 같이 먼저 식 (14)의 것이 앞에 식 (15)의 것이 뒤에 위치하게 된다. 즉, 먼저 통과 대역의 격자수만큼  $G_p - \delta_p$  값이 있고, 다음에 같은 수만큼  $-(G_p + \delta_p)$ , 그리고 나머지 저지 대역의 격자수의 2배만큼  $-\delta_s$ 가 있게 된다. 이 때 영위상 응답 특성으로 크기만을 고려하는 이유는 앞에서 설명하였듯이 선형 위상 필터는 임펄스 응답이 좌우 대칭인 특성이 있으므로 먼저 크기 응답 특성을 만족시킨 후 나중에 위상 특성을 고려해도 무관하기 때문이다.

위 식들을 제한된 비선형 프로그래밍(constrained nonlinear programming) 관점<sup>[10]</sup>에서 볼 때, 식 (10)은 최적화 과정의 목적 함수(object function)이며, 식 (16)은 그 과정의 제한 조건(constraints)이라 할 수 있다.

## 2. 최적화 알고리즘

다음 단계로 Adams는 식 (16)의 제한 조건하에서 목적 함수 식 (10)을 최소화 할 수 있는 다중 교환 알고리즘을 이용하여 최적화 된 임펄스 응답을 구하였다. 그 알고리즘은 아래와 같이 정리할 수 있다.

1) 초기화 : 가중된 에러를 최소화하는 임펄스 응답으로 초기값( $h^0$ )을 정한다. 이는 오차의 2차식 표현(식(10)), 즉 목적 함수의 임펄스 응답에 대한 미

분이 0이 되는 곳에서 구할 수 있다. 그 값은 식 (17)이다.

$$R h^0 = p \quad (17)$$

2) 극대 및 극소 주파수 선정 : 초기화 단계에서 초기화 된 임펄스 응답에 대한 주파수 응답을 구한 후 통과 대역과 저지 대역 상에서 극값을 갖는 주파수를 찾아낸다. 이 때 통과 대역과 저지 대역의 경계점 주파수는 항상 극값을 갖는 주파수에 포함시킨다.

3) 기준과 비교 : 극대 값 및 극소 값이 제한 조건을 만족하면 종료, 만약 제한 조건을 만족하지 않으면 찾아낸 주파수 상에서 새로운 방정식 (18)을 정의한다. 여기에서 행렬  $A$ 와  $a$ 는 행렬  $B$ 와  $b$ 의 부분으로서 제한 조건을 위배하는 주파수에 해당하는 행만을 추출하여 새로이 구성된다. 그리고 4)번 과정으로 넘어간다. 이때 제한 조건에서 계산 시 발생할 수 있는 오차, 즉 계산에 사용된 연산자의 길이에 의해 발생하는 오차등을 미리 방지하기 위해 계산상에 약간의 여유를 준다.

$$A h - a = 0 \quad (18)$$

4) 새로운 Lagrange 곱셈 벡터 계산 : 식 (19)에 따라 새로운 Lagrange 곱셈 벡터<sup>[6]</sup>를 계산한 후 Kuhn-Tucker 조건<sup>[10]</sup>에 따라 음수인 곱셈 항목은 벡터에서 제외시킨다.

$$\lambda = 2(A R^{-1} A^T)^{-1} \{a - A R^{-1} p\} \quad (19)$$

5) 새로운 임펄스 응답 계산 : 식 (20)에 따라 새로운 임펄스 응답을 계산한 후 다시 2)번 과정으로 넘어간다.

$$h = R^{-1} p + \frac{1}{2} R^{-1} A^T \lambda \quad (20)$$

이상의 방법을 순서대로 표현할 때 그림 1과 같으며, 이 때 각각의 응용 분야에 따라 Lagrange 곱셈 벡터와 새로운 임펄스 응답을 구하기 위해 행렬  $Q$ 와  $p$ 를 새로이 정의하여야 한다.

다음절에서는 본 논문에서 다루고자 하는 각각의 필터 성격에 따른 목적 함수와 제한 조건을 새로이 정의하고, 또한 행렬  $Q$ 와  $p$ 에 대한 새로운 값과 구체적인 설계 방법을 고찰하도록 하겠다. 설계 예에서의 최적

화 과정은 Adams의 다중 교환 알고리즘을 이용하였다.

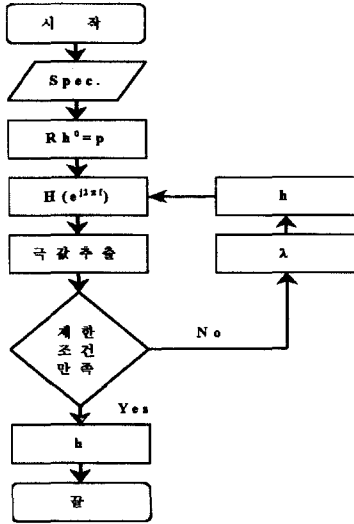


그림 1. 다중 교환 알고리즘 순서도  
Fig. 1. Multiple exchange algorithm flow chart.

IV. 다중 대역 통과 필터 설계

다중 대역 통과 필터는 위에서 보인 Adams의 저역 통과 필터 설계 방법의 단순한 확장이라 할 수 있다. 먼저 그에 대한 가중 자승 오차식은 식 (21)과 같이 표현되며, 그의 이차원 표현식 즉 목적 함수는 식 (22)처럼 나타낼 수 있다. 이 때  $N_B$ 는 대역의 갯수이며,  $F_{Ui}$ 는  $i$ 번째 대역의 끝 주파수이며  $F_{Li}$ 는  $i$ 번째 대역의 시작 주파수이다. 그리고  $W_i$ 와  $G_i$ 는 각각  $i$ 번째 대역의 오차 가중치와 이득을 나타낸다.

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N_B} \int_{F_{Li}}^{F_{Ui}} W_i(e^{j2\pi f}) |H(e^{j2\pi f}) - G_i(e^{j2\pi f})|^2 df \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{i=1}^{N_B} h^T R_i h - 2h^T p_i + r_i \\ &= h^T R h - 2h^T p + r \end{aligned} \quad (22)$$

그리고  $R_i$ 는 각 대역에서의 가중치  $W_i$ 와 식 (8)에 나타난 행렬  $Q$ 의 곱이며, 행렬  $Q$ 의  $i$ 번째 대역의 각 요소는 식 (23)에 나타나 있다.

$$q_i(n) = \begin{cases} 2(F_{Ui} - F_{Li}) & n = 0 \\ \frac{\sin[2\pi n F_{Ui}] - \sin[2\pi n F_{Li}]}{\pi n} & n = 1, \dots, L-1 \end{cases} \quad (23)$$

행렬  $p_i$ 는 저역 통과 필터 설계에 사용된 식 (11)의 확장된 형태로 식 (24)과 같이 표현된다. 그리고 각 대역에서의 행렬  $p_i$  요소는 식 (25)에 나타나 있다. 다중 대역 통과 필터도 또한 I, II형으로 구현하므로  $s'(f)$ 의 요소는  $\cos\left[2\pi\left(n + \frac{1-L}{2}\right)f\right]$  ( $n=0, 1, \dots, L-1$ ) 이어야 한다.

$$p_i = 2W_i G_i \int_{F_{Li}}^{F_{Ui}} s(f) df \quad (24)$$

$$p_i(n) = \begin{cases} \frac{2W_i G_i [\sin\{(2n+1-L)\pi F_{Ui}\} - \sin\{(2n+1-L)\pi F_{Li}\}]}{(2n+1-L)\pi} & n \neq \frac{L-1}{2} \\ 2W_i G_i (F_{Ui} - F_{Li}) & n = \frac{L-1}{2} \end{cases} \quad (25)$$

다음으로 제한 조건을 살펴보겠다. 제한 조건 또한 저역 통과 필터 경우의 확장된 개념으로서, 각 대역별로 제한 조건을 설정한 후(식(26)) 그것을 토대로 부등식 형태의 제한 조건식(식(16))을 만들면 된다.

$$|H(e^{j2\pi f}) - G_i(e^{j2\pi f})| \leq \delta_i(e^{j2\pi f}) \quad , F_{Li} \leq f \leq F_{Ui} \quad (26)$$

예 1에는 위에서 정의한 목적 함수와 제한 조건하에 다중 교환 알고리즘을 이용해 실제로 설계한 다중 대역 통과 필터에 대한 예를 제시하였으며, Adams의 방법에 의한 결과와 자승 오차 최소화 방법(LSM), 최대 오차 최소화 방법(MMM)에 의한 결과를 상호 비교 검토하였다.

예 1. 다중 대역 통과 필터 예

필터 길이  $L=55$ , 통과 대역이 각각  $0 \sim 0.1, 0.25 \sim 0.4$  [cycle/sample]이고 저지 대역이 각각  $0.15 \sim 0.2, 0.45 \sim 0.5$  [cycle/sample], 통과 대역의 이득이 각각 1, 0.5이고 저지 대역의 이득은 0, 그리고 전이 대역의 오차는 관여하지 않는 다중 대역 통과 필터를 설계하였다. 설계 시 통과 대역과 저지 대역의 이득 제한 값은 동일한 값으로 설정하였으며, 오차 가중치 또한 각각의 대역에 대해 동일하게 1로 설정하였다.

그림 2에 자승 오차 최소화 방법(LSM), 최대 오차 최소화 방법(MMM) 그리고 본 논문의 방법(PLEM)에 의한 필터 설계 오차를 자승 오차 및 최대 오차 관점에서 동시 비교하여 보았다. 이 그림에서 실선은 PLEM으로 대역의 이득 제한 값을 변화 시키면서 설

계하였을 때 설계된 필터의 최고 오차와 자승 오차 값에 대한 궤적을 나타내며, 'o'와 'x'는 각각 LSM과 MMM에 의한 최고 오차와 자승 오차 값의 위치를 표시하고 있다.

필터의 초기값은 위의 알고리즘 설명에서 보였듯이 LSM에 의한 결과와 같은 지점이다. 그러나 이 지점은 그림 2에서 알 수 있듯이 최소 자승 오차 값을 갖지 않는다. 그림을 살펴보면 자승 오차의 최소값을 나타내는 지점이 필터의 초기값, 즉 LSM에 의한 지점이 아닌 다른 지점임을 알 수 있다. 따라서 이득 제한 조건의 적절한 조절을 통해 LSM에 의한 방법보다 더 적은 자승 오차뿐만 아니라 동시에 더 작은 최대 오차를 갖는 필터를 설계할 수 있다는 것을 알 수 있다. 또한 그림 2에서 MMM에 의한 결과가 위치한 오차 지점을 살펴보면 PLEM에 의한 결과보다 더 큰 최대 오차와 더 큰 자승 오차를 갖는 것을 알 수 있다. 이는 MMM이 통과 대역과 저지 대역을 등리플이 되도록 설계하는데 그 원인이 있다. PLEM은 각 대역의 리플이 일정하지 않게 조절을 하면서 최대 오차를 줄이기 때문에 MMM에 의한 것보다 더 낮은 최대 오차를 나타낼 수 있다.

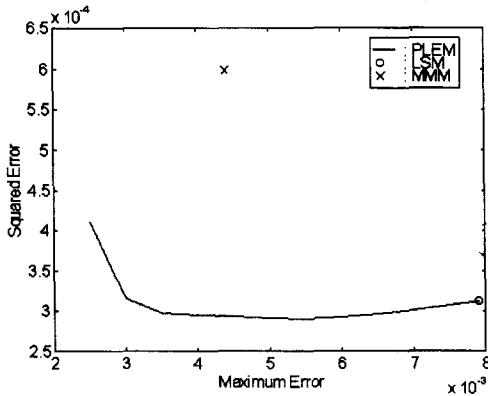
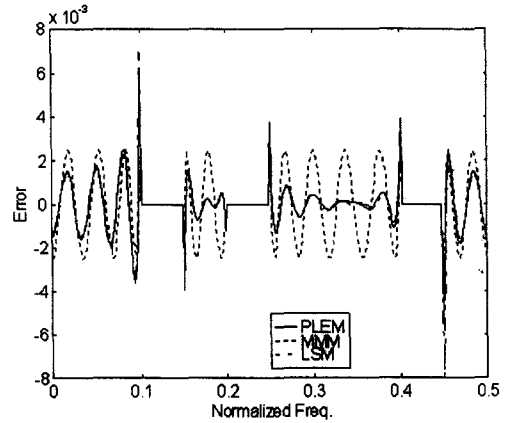


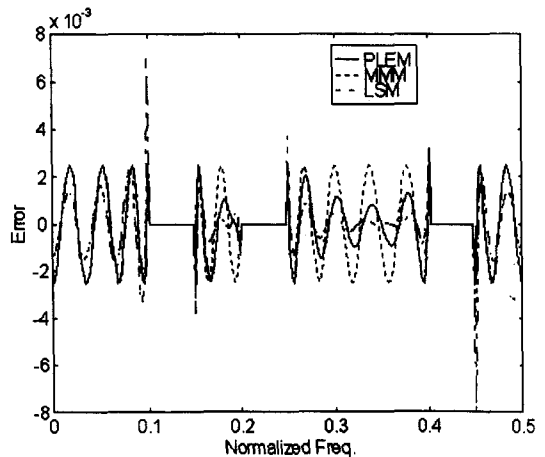
그림 2. 다중 대역 통과 필터의 오차 비교  
Fig. 2. Error comparison of multiband filter.

그림 3은 PLEM에 의한 설계 결과 중 자승 오차가 최소값을 갖는 경우(그림 3 (a))와 최대 오차가 최소값을 갖는 경우(그림 3 (b))에 대한 비교 결과이다. 그림 3 (a)를 보면 PLEM에 의한 결과가 자승 오차 최소값을 나타내면서 최대 오차는 0.0055를 나타냈다. 이 결과는 LSM에 의한 오차 형태와 거의 비슷하나 약간의 차이가 있는데, PELM가 LSM보다 각 통과

대역 가장자리 부분의 오차 값을 많이 감소시키면서 대역내의 오차를 약간 증가시켜 전체적으로는 자승 오차의 감소를 가져오는 결과를 얻을 수 있었다. 따라서 LSM에 의한 설계의 가장 큰 문제점 중 하나로서 대역 가장자리에서의 오차가 상대적으로 크다는 점을 들 수 있었다. 그림 3 (b)를 보면 PLEM이 MMM과 같이 저주파 대역에서는 등리플 오차를 띄고 있다. 그러나 다음 대역부터는 등리플이 아님을 볼 수 있다.



(a)



(b)

그림 3. 다중 대역 통과 필터의 오차 비교 (a) PLEM 설계 값이 자승 오차가 최소일 때 (b) PLEM 설계 값이 최대 오차가 최소일 때

Fig. 3. Error comparison of multiband filter (a) Least squared error condition under PLEM (b) Minimum maximum error condition under PLEM.

이로 인해 모든 대역에서 등리플을 보이고 있는 MMM보다 자승 오차가 작게 된다. 그리고 최대 오차를 볼 때, MMM은 고주파 부분의 대역으로 갈 때,

대역 가장자리 부분에서 큰 오차를 보이면서 최대 오차를 크게 하고 있는 반면, PLEM은 전체 주파수에 걸쳐 오차를 제한 조건 이하로 만족시키기 때문에 오차가 대역 가장자리 부분에서 급격하게 증가하는 현상이 없음을 볼 수 있다.

### V. 미분기 설계

미분기는 일반 대역 통과 필터와는 달리 III형 또는 IV형 필터로 설계하여야 하며<sup>[1]-[5]</sup>, 주파수 응답 계산 시에는 영위상 주파수 응답 대신 식 (5)의 허수 부분만을 사용하면 된다. 설계 과정에서는 먼저 크기 특성만을 고려하여 앞 장의 다중 대역 통과 필터의 설계 과정을 적용하여 크기 특성을 계산하고, 다음 단계로는 표현식에 있어 허수임을 표시하여 위상을 정확히 나타내야 한다. 이는 다음 장에서 살펴볼 Hilbert 변환기에도 똑같이 적용되어진다.

미분기의 이상적 주파수 응답 특성은 식 (27)과 같다. 이 식에서 볼 수 있듯이 그 특성이 허수 값만으로 이루어져 있으며, 크기 응답(magnitude response) 특성은 원점을 지나는 직선의 형태를 띄게 된다.

$$H(e^{j2\pi f}) = j2\pi f \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} \quad (27)$$

오차를 계산할 때 있어서 일반 대역 통과 필터에 적용한 오차 계산식의 이상 응답 특성 부분에 약간의 수정이 가해져야 한다. 즉, 일반 필터는 통과 대역이 일정한 이득인 경우를 예로 들었으므로 오차 계산식에서 이상 응답 특성 부분에 상수가 적용되었으나 미분기에서는 사선의 형태를 나타내야 하므로 2차원 공간의 직선의 방정식 형태를 적용해야 한다. 그리고 미분기의 특성상 통과 대역만을 중시하므로 일반 대역 통과 필터 오차 계산식의 저지 대역 오차 항은 필요가 없게 된다. 따라서 미분기에 있어서의 가중 자승 오차는 아래식 (28)로 표현할 수 있으며, 이때  $F_p$ 와  $G_p$ 는 각각 통과 대역 끝 주파수 및 통과 대역의 끝 이득을 나타낸다.

$$\epsilon = 2W_p \int_0^{F_p} \left| H(e^{j2\pi f}) - \frac{G_p}{F_p} f \cdot e^{j\pi f(1-L)} \right|^2 df \quad (28)$$

이 오차식의 2차원 형태는 다중 대역 통과 필터와 같이 식 (29)의 형태를 띄게 된다. 단 미분기에서는 통

과 대역만을 고려하므로 행렬  $R=W_p Q_p$ 로 표현되어지며, 행렬  $Q_p$ 에 대한 각 요소는 식 (30)과 같이 나타내어진다.

$$\epsilon = h^T R h - 2h^T p + r \quad (29)$$

$$q(n) = \begin{cases} 2F_p & n=0 \\ \frac{\sin[2\pi F_p n]}{\pi n} & n=1, \dots, L-1 \end{cases} \quad (30)$$

행렬  $p$ 도 역시 새로운 값을 갖게 되는데, 그 값은 식 (31)의 적분식과 같이 나타내진다. 이 식에서 미분기는 III형 또는 IV형으로 설계되어지므로  $s^j(f)$ 를 설정할 때 II장에서 설명하였듯이 III, IV형에 적합하게 해야 하며, 그 때 행렬  $p$ 의 각 요소는 식 (32)의 값을 갖는다.

$$p = 2W_p \frac{G_p}{F_p} \int_0^{F_p} f \cdot s^T(f) df \quad (31)$$

$$p(n) = \begin{cases} \frac{2W_p G_p}{\pi(L-1-2n)} [\cos\{\pi(L-1-2n)F_c\} - \cos\{\pi(L-1-2n)F_c\}] & n \neq \frac{L-1}{2} \\ 0 & n = \frac{L-1}{2} \end{cases} \quad (32)$$

제한 조건도 일반 필터와는 다르다. 크기 응답이 사선의 형태이므로 제한 조건에도 이러한 특성이 포함되어야 한다. 낮은 주파수에서는 이득이 낮으므로 그만큼 이득 오차 한도가 작아야 하며, 높은 주파수에서는 이득이 크므로 낮은 주파수와 비교했을 때 상대적으로 이득 오차 한도를 크게 설정해도 무방하게 된다. 그러므로 식 (33)에서 보여주는 이득 오차 한도( $\delta$ )도 일정한 값이 아닌 주파수에 따라 특징하게 변하는 형태를 가져야 한다.

$$\left| H(e^{j2\pi f}) - \frac{G_p}{F_p} f \cdot e^{j\pi f(1-L)} \right| \leq \delta(e^{j2\pi f}) \quad (33)$$

아래 예 2에서는 미분기 설계에 대한 예시를 제시하였으며, 다중 대역 통과 필터와 마찬가지로 다른 설계 방법에 의한 결과와 비교 검토하여 보았다.

#### 예 2. 미분기 예

필터 길이  $L = 21$ 이고 통과 대역이  $0 \sim 0.4$  [ cycle/sample ], 통과 대역 가장자리 이득( $G_p$ )이 0.8인 미분기를 설계하였다. 설계 시 오차 가중치는 1로 설정하였다.

그림 4는 다중 대역 통과 필터처럼 3가지 설계 방법의 오차를 비교한 그래프이다. 미분기의 초기값은 최대 오차와 자승 오차가 동시에 가장 큰 부분이다. 이는 다중 대역 통과 필터나 다음 절에서 보여질 Hilbert 변환기가 초기값을 LSM과 같은 특성을 갖는 것과는 다르다. 설계 목적은 자승 오차가 최소인 점에서 시작하여 최대 오차를 감소 시키면서 상대적으로 자승 오차를 증가 시켜가며 해를 찾는 것이었다. 그러나 결과적으로는 최적화 과정이 진행되면서 필터의 특성이 최대 오차와 자승 오차가 동시에 감소하는 특성을 보이고 있다. 이는 최대 오차와 자승 오차의 일반적인 상관 관계를 벗어나는 특징이다. 이와 같은 특징은 LSM에 의한 결과와 MMM에 의한 결과를 비교해도 알 수 있다. 즉, LSM이 MMM보다 최대 오차와 자승 오차 모두 큰 값을 갖고 있는데, 그 원인은 그림 5에서 보면 알 수 있듯이 LSM에 의한 결과가 저주파 대역에서 너무 큰 오차가 있기 때문이다. 다중 대역 통과 필터의 오차 비교인 그림 2를 보면 최대 오차가 감소하면서 같이 자승 오차가 감소하였으나 어느 지점부터는 자승 오차가 증가하는 것이 확인하였다. 그러나 미분기에서는 이러한 특성이 주어진 조건에서 필터를 설계할 수 없을 정도로 최대 오차가 작아졌을 때에만 약간 나타나고 있다.

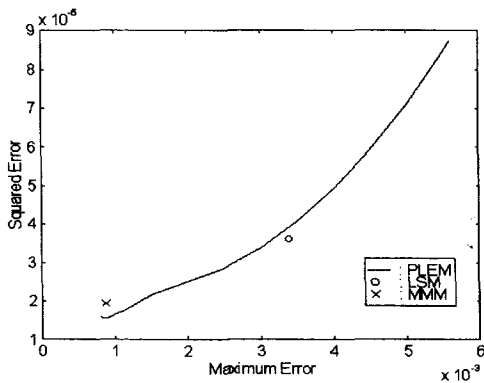
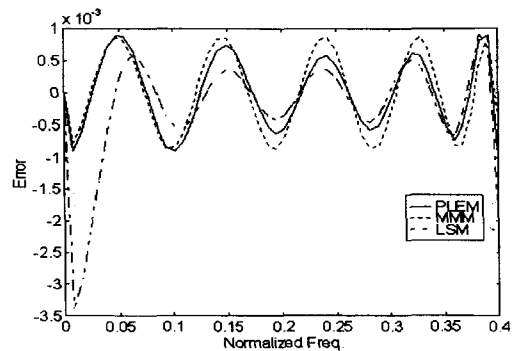


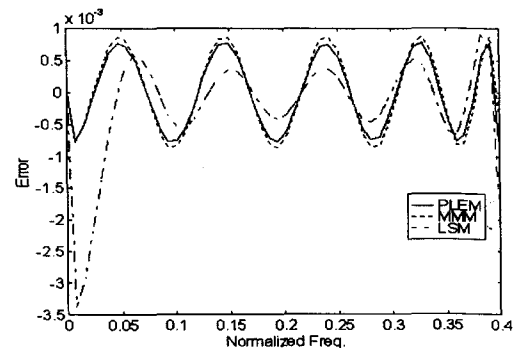
그림 4. 미분기의 오차 비교  
Fig. 4. Error comparison of differentiator.

그림 5는 PELM에 의한 설계 결과 중 자승 오차가 최소값을 갖는 경우와 최대 오차가 최소값을 갖는 경우에 대한 비교 결과이다. 그림 5 (a)를 보면 PLEM에 의한 결과가 전체적으로 최소 자승 오차를 나타내고 있음을 알 수 있는데, LSM이 최소 자승 오차를 갖지 못하는 이유는 위에서 말했듯이 저주파 대역에서

큰 오차가 있기 때문이다. 또한 필터의 오차 형태가 MMM처럼 등리플 형태를 보이고 있으나 정확한 등리플이 아닌데, 이는 리플에 약간의 불규칙성을 통해 자승 오차를 감소시켰기 때문이다. 그리고 최대 오차를 그림 5 (b)의 PLEM과 비교하였을 때 그 값이 저주파 영역에서 더 큼을 알 수 있다. 즉, 저주파 영역에서 최대 오차의 증가를 통해 전체적인 자승 오차 감소를 이룬 것이다. 다음으로 그림 5 (b)를 살펴보면, PLEM의 결과가 등리플이면서 최대 오차가 전체적으로 최소인 경우를 보이고 있으나 자승 오차가 그림 5 (a)의 결과보다 큰 것을 알 수 있다. 이는 최대 오차를 줄이기 위해 등리플을 형성하면서 자승 오차를 증가시킨 것에 그 원인이 있음을 알 수 있다. 결과적으로 그림 5의 두 결과를 살펴보면, 자승 오차와 최대 오차의 일반적인 상관 관계를 만족함을 알 수 있다.



(a)



(b)

그림 5. 미분기의 오차 비교 (a) PLEM 설계 값이 자승 오차가 최소일 때 (b) PLEM 설계 값이 최대 오차가 최소일 때

Fig. 5. Error comparison of differentiator (a) Least squared error condition under PLEM (b) Minimum maximum error condition under PLEM.



VI. Hilbert 변환기 설계

Hilbert 변환기의 이상적 주파수 응답 특성이 식 (34)에 주어져 있다. 이 식에서 볼 수 있듯이 그 특성이 미분기와 마찬가지로 허수 값만으로 이루어져 있다. 따라서 Hilbert 변환기도 미분기처럼 III형 또는 IV형으로 설계를 하여야 한다. 그리고 크기 특성이 일정 대역에서 일정한 값을 가지므로 가중 자승 오차식이 나 제한 조건을 형성할 때 다중 대역 통과 필터의 주파수 응답 특성 중 하나의 통과 대역만을 가지고 있는 필터로 생각할 수 있다. 그리고 설계 마지막 단계에 그 위상 특성을 반드시 고려해 줄 필요가 있다.

$$H(e^{j2\pi f}) = \begin{cases} -j, & 0 < f < \frac{1}{2} \\ j, & -\frac{1}{2} < f < 0 \end{cases} \quad (34)$$

위의 이상적 주파수 응답 특성 대신에 실제 설계에는 미분기와 마찬가지로 신호가 통과하는 특정 대역만을 고려하면 되겠는데, 그 특정 대역의 가장자리 주파수를  $F_L, F_U$ 라 할 때, 가중 자승 오차는 아래 식 (35)로 표현되어 진다. 여기에서  $W_p$ 는 통과 대역의 오차 가중치이고,  $G_p$ 는 통과 대역의 이득이다.

$$\epsilon = W_p \int_{F_L}^{F_U} |H(e^{j2\pi f}) - G_p e^{j\pi f(1-L)}|^2 df \quad (35)$$

이 오차식의 2차원 행렬식은 식 (36)으로 표현할 수 있다. 이 식은 앞의 여러 필터와 같은 형태를 띄고 있으며, 다른 필터와의 차이는 행렬  $Q$ 의 요소에 있다. 그 요소는 다중 대역 통과 필터의 한 대역만을 고려한 것과 같은 것으로서 아래 식 (37)처럼 나타내어진다.

$$\epsilon = h^T R h - 2h^T p + r \quad (36)$$

$$q(n) = \begin{cases} 2(F_U - F_L) & n = 0 \\ \frac{\sin[2\pi n F_U] - \sin[2\pi n F_L]}{\pi n} & n = 1, \dots, L-1 \end{cases} \quad (37)$$

다음으로 식 (36)의 행렬  $p$ 를 살펴보기로 하자. 그 표현식 또한 다중 대역 통과 필터의 한 대역으로 생각할 수 있다(식(38)). 그러나 다중 대역 통과 필터는 I,II형으로 설계되어지는 반면에 Hilbert 변환기는 III,IV형으로 설계되어지기 때문에 그 요소의 값이 다르다. 그러므로  $s^T(f)$  를 II장에서 보였듯이 III, IV형에 적합하게 적용해야 하며, 식 (38)에 의한 행렬  $p$ 의 원소는 식 (39)와 같이 표현된다

$$p = 2W_p G_p \int_{F_L}^{F_U} s(f) df \quad (38)$$

$$p(n) = \begin{cases} 2W_p G_p \left[ \frac{F_U}{\pi(L-1-2n)} \text{sinc}[\pi(L-1-2n)F_U] - \frac{1}{\pi(L-1-2n)} \text{co}[\pi(L-1-2n)F_U] \right] n \leq \frac{L-1}{2} \\ 0 & n = \frac{L-1}{2} \end{cases} \quad (39)$$

이득 제한 조건도 신호가 통과하는 대역만을 고려하면 되는데 그 표현식은 식 (40)에 나타나 있다.

$$|H(e^{j2\pi f}) - G_p e^{j\pi f(1-L)}| \leq \delta_p \quad (40)$$

이 때 Hilbert 변환기는 다중 대역 통과 필터와는 사용하는 필터의 형이 다르므로 식 (40)의 크기 특성에 대한 응답 특성식 (41)에서  $s^T(f)$ 는 III, IV 형에 적합하도록 해야 한다.

$$s^T(f)h - G_p + \delta_p \geq 0, \quad -s^T(f)h + G_p + \delta_p \geq 0 \quad (41)$$

아래 예 3에서 Hilbert 변환기 설계에 대한 예시를 보였으며, 다중 대역 통과 필터나 미분기와 마찬가지로 다른 설계 방법에 의한 결과와 설계 오차 관점에서 상호 비교 검토하였다.

예 3. Hilbert 변환기 예

필터 길이  $L=25$ , 통과 대역이  $0.1 \sim 0.4$  [cycle/sample] 이고 통과 대역의 이득이 1인 Hilbert 변환기를 설계하였다. 오차 가중치는 앞의 예처럼 1로 하였다.

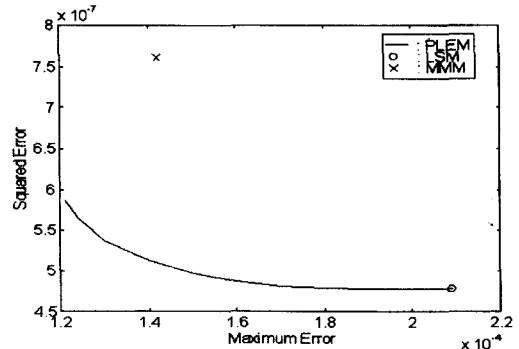
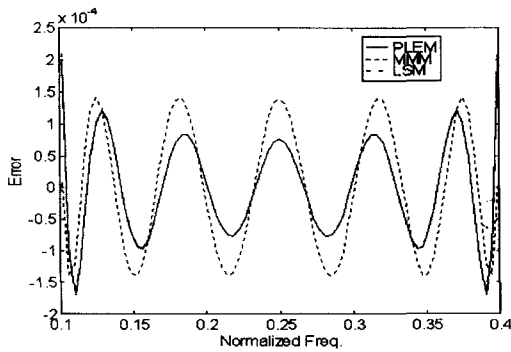


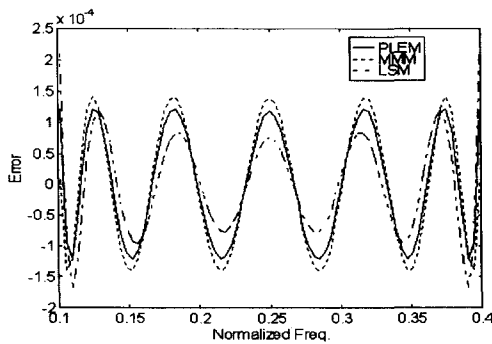
그림 6. Hilbert 변환기의 오차 비교  
Fig. 6. Error comparison of Hilbert transformer.

그림 6에 앞의 예처럼 3가지 방법에 의해 설계된 필터의 오차를 비교하였다. 필터의 초기값이 LSM에 의한 값과 같다. 즉, 초기값의 자승 오차가 LSM에 의

해 설계된 필터의 자승 오차와 같다는 것이다. 최적화 과정이 진행되면서 최대 오차를 감소시킬수록 자승 오차가 증가함을 알 수 있으며 이는 자승 오차와 최대 오차간의 일반적인 상호 관계를 잘 따르고 있음을 의미한다. 그러나 PLEM에 의해 설계된 필터의 최대 오차 최소값은 MMM에 의해 설계된 값보다 더 작으며, 그 때의 자승 오차 또한 MMM보다 작다. 이는 PLEM에 의해 설계된 필터가 MMM에 의해 설계된 필터보다 우수한 성능을 가질 수 있음을 의미한다.



(a)



(b)

그림 7. Hilbert 변환기의 오차 비교 (a) PLEM 설계 값이 자승 오차가 최소일 때 (b) PLEM 설계 값이 최대 오차가 최소일 때

Fig. 7. Error comparison of Hilbert transformer (a) Least squared error condition under PLEM (b) Minimum maximum error condition under PLEM.

그림 7을 보면 그림 6의 결과에 대해 잘 나타나 있다. 그림 7 (a)을 보면 PLEM의 초기값이자 최소 자승 오차를 가지는 필터와 LSM에 의한 필터의 오차 곡선이 같다. 그리고 이 필터들의 오차 특성을 보면 대역의 끝부분이 중간 부분보다 오차가 더 크다는 것에 있다. 이는 LSM에 의한 설계의 고유한 문제점으

로 이를 해결하기 위해 창함수나 전이대역 등을 이용하고 있다<sup>[1]-[5]</sup>. 그리고 그림 7 (b)를 보면 PLEM로 설계된 필터의 최대 오차가 최소값을 갖는 경우로서 오차 특성이 MMM처럼 등리플을 형성함을 알 수 있는 반면에 MMM에 비해 최대 오차와 자승 오차가 더 작음을 알 수 있다. 이는 그림 6의 결과를 잘 설명하고 있는 것으로 위에서 말했듯이 PLEM의 MMM에 대한 우수성을 나타낸다고 할 수 있다.

## VII. 결 론

본 논문에서는 제한된 최소 자승 오차 기준에 의한 FIR 필터 설계 방법(PEM)을 적용하여 다중 대역 통과 필터, 미분기, 그리고 Hilbert 변환기를 설계하기 위한 구체적인 목적함수와 제한 조건을 제시하고 실제 설계를 통하여 기존의 자승 오차 최소화 방법(LSM) 및 최대 오차 최소화 방법(MMM)과 설계 결과에 대한 오차 관계를 상호 비교하여 보았다. PLEM은 설계 과정 상에서 자승 오차, 최대 이득 그리고 전이 대역 폭이 각각의 상호 교환 관계를 만족될 때만 그 해를 구할 수 있게 되는데, 위의 예에서는 특정 부분에서 전통적인 자승 오차와 최대 오차 사이의 상호 교환 관계를 벗어나는 경우가 있었지만 종국에는 둘 사이의 상호 교환 관계를 고려하여 필터 설계를 할 수 있었다. 또한 PLEM이 LSM이나 MMM보다 설계 오차가 작아 더욱더 정교한 필터 설계에 적합할 뿐만 아니라, 단순한 저역 통과 필터 외에도 여러 가지 다양한 종류의 FIR 필터설계에도 널리 적용될 수 있음을 확인할 수 있었다. PLEM에 의한 필터 설계 방법은 지금까지 필터 설계 시 LSM이나 MMM 경우처럼 한 가지 종류의 오차만을 고려한 부적절한 설계 방법을 대체할 수 있는 우수한 성능을 보여주고 있으며, 본 논문에서 제시된 구체적 설계방법은 특정 응용 분야에 적합하도록 필터 조건들을 조정하여 적용함으로써 다양한 분야에 널리 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

## 참 고 문 헌

- [1] T. W. Parks and C. S. Burrus. *Digital Filter Design*. New York: Wiley, 1987.
- [2] Andreas Antoniou. *Digital Filters: Analysis, Design, and Applications*.

- McGraw-Hill, 1993.
- [3] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, 1989.
- [4] J. G. Proakis and D. G. Manolakis. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, 1996.
- [5] E. C. Ifeachor and B. W. Jervis. *Digital Signal Processing: A Practical Approach*. Addison-Wesley, 1993.
- [6] J. W. Adams, "FIR digital filters with least-squares stopbands subject to peak-gain constraints," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.39, no.4, pp.376-388, Apr. 1991.
- [7] J. W. Adams *et al.*, "New approaches to constrained optimization of digital filters," in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst.*, May 1993, pp.80-83.
- [8] I. W. Selesnick, Markus Lang, and C. S. Burrus, "Constrained least square design of FIR filters without specified transition bands," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.44, no.8, pp.1879-1996, Aug. 1996.
- [9] Markus Lang, J. Bamberger, "Nonlinear phase FIR filter design with minimum LS error and additional constraints," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Apr. 1993, pp. 57-60.
- [10] David G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, 1989.

---

 저 자 소 개
 

---


 洪 承 億(正會員)

1971년 11월생. 1995년 2월 성균관  
대학교 공과대학 전자공학과 졸업.  
1998년 2월 성균관대학교 대학원  
전자공학과 졸업. 1997년 12월 ~  
현재 한국통신프리텔 근무.

金 重 圭(正會員) 第 35卷 S編 第 7號 參照