한국퍼지 및 지능 시스템학회 논문지 1998, Vol. 8, No. 6. (1998) 119 ~ 121

퍼지 유사도 척도
Fuzzy Similarity Measure

이 광 형
Kwang Hyung Lee

한국과학기술원 전산학과

요 약

퍼지 시스템이 퍼지 하이퍼그래프에 의해서 표현되었다고 할때, 퍼지 집합을 나타내는 퍼지 에지 사이의 유사도를 측정할 필요가 있다. 또한 원소들 사이의 유사도를 측정할 필요가 있다. 본 논문은 이런 필요성에 따라서 퍼지 유사도를 측정하는 척도를 제안한다. 하나는 퍼지 집합 사이의 유사도를 측정하고, 또 하나는 원소 사이의 퍼지 유사도를 측정해 준다. 이 척도는 퍼지집합과 원소 개개의 유사성을 중시하는 시스템 분석 분야에서 이용될 수 있다.

ABSTRACT

For a fuzzy system modeled by a fuzzy hypergraph, two fuzzy similarity measures are proposed : one for the fuzzy similarity between fuzzy sets and the other between elements in fuzzy sets. The proposed measures can represent the realistic similarities which can not be given by the existing measures. With an example, it is shown that it can be used in the system analysis.

1. 서 론

퍼지 시스템을 표현하기 위해서 퍼지 하이퍼 그래프(fuzzy hypergraph)가 제안되었다[5]. 이것은 기존에 많이 이용되던 하이퍼 그래프(hypergraph)를 퍼지 이론을 이용하여 확장한 것이다. 본 논문에서는 이렇게 확장된 퍼지 하이퍼그래프를 이용하여 어떤 시스템을 표현했다고 하자.

한편 퍼지 집합과 원소 사이의 유사도 측정은 중요한 연구주제가 되고 있다[2-5]. 퍼지집합 사이의 유사도와 원소 사이의 유사도는 [1]에서 제안 되었다. 본 논문에서는 시스템이 퍼지 하이퍼 그래프로 표현될 때, 그 속에 있는 퍼지 에지(fuzzy edge, 즉 퍼지집합)와 원소들 사이의 유사도를 퍼지값으로 구하는 척도를 제안한다. 여기에서 제안하는 척도는 원소와 집합 개개의 유사성을 중시하는 시스템 분석 분야에서 이용하면 효율적이다. 본 논문에서는 [5,6,7]에 있는 기호와 용어를 사용한다.

퍼지 하이퍼그래프는 다음과 같이 정의된다. 이 정의는 [5,7]에 있는 정의에서 E의 정의를 수정한 것인데, 각 에지의 소속정도를 표현할 수 있어서 현실적이다.

$\widetilde{H} = (X, E)$

$X = \{(x_i, \mu_X(x_i)) \mid \mu_X(x_i) > 0,\ i = 1...n\}$: 원소의 집합

$E = \{(A_j, \mu_E(A_j)) \mid \mu_E(A_i) > 0,\ i = 1...m\}$: 에지의 집합

$A_j = \{(x_i, \mu_j(x_i)) \mid \mu_j(x_i) > 0,\ i = 1...n\}$: 에지를 나타내는 퍼지집합

$A_j \neq \Phi,\quad j = 1...m$

$\mu_X(x_i) = \max_j[\mu_j(x_i)],\quad i = 1...n$

$\mu_E(A_i) = \max_i[\mu_j(x_i)],\quad i = 1...m$

집합 X는 원소 x의 퍼지집합인데, 각 원소가 이 그래프에 포함되는 정도를 퍼지집합으로 표현한 것이다. 그리고 집합 E는 그래프의 에지(edge) A의 퍼지 집합이다. 이때 에지 A는 두개 이상의 원소를 포함하는 퍼지집합으로서, 각 원소가 이 에지에 포함되는 정도를 나타낸다. $\mu_X(x_i)$는 x_i가 이 그래프에 포함되는 최대가능성을 나타내고, $\mu_E(A_j)$는 원소 x가 A_j에 포함되는 가능성을 나타낸다.

2. 퍼지 하이퍼 그래프

예를 들어서 그림 1에 있는 퍼지 하이퍼 그래프에

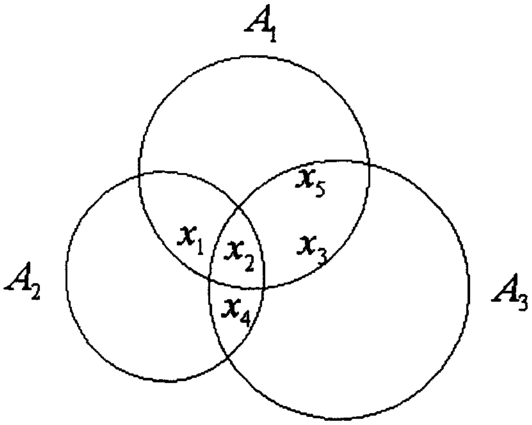

그림 1. 퍼지 하이퍼 그래프.

표 1.

	A_1	A_2	A_3	X
x_1	0.4	0.6	0	0.6
x_2	0.8	0.3	0.4	0.8
x_3	0.9	0	0.8	0.9
x_4	0	0.5	1	1
x_5	0.5	0	0.5	0.5
E	0.9	0.6	1	

의해서 표현된 퍼지 시스템을 고려해 보자.

앞에 주어진 퍼지 하이퍼 그래프에서 표 1과 같은 행렬을 얻을 수 있다. 이 행렬은 각 원소가 각퍼지 에지에 포함되는 소속정도를 나타낸다.

이 표에서 X는 퍼지 하이퍼 그래프의 정의에 있는 원소의 집합 X를 나타낸다. 그리고 E는 각각 퍼지에지 (A_1, A_2, A_3)가 이 시스템에 포함되는 정도를 나타낸다. 예를 들어서 A_1의 소속정도가 0.9인데, 이것은 A_1 내에 있는 원소의 최대 소속값이 0.9이기 때문이다. 마찬가지로 A_2는 전체 시스템에 포함되는 정도가 0.6이라 말할 수 있고, A_3는 1이라고 말할 수 있다. 이것을 나타내는 퍼지집합 E는 각 부분집합(퍼지 하이퍼 에지)이 전체집합에 포함되는 정도를 나타내기 때문에 의의가 있다. 그러면 다음 절에서는 이런 시스템에서 퍼지 유사도를 구한다.

3. 퍼지 유사도

[1]에서는 퍼지 유사도 척도를 제안했는데, 여기서는 이를 스칼라 유사도 척도라고 부르자.

- Scalar similarity $S(A_i, A_j)$ between fuzzy sets A_i and A_j

$$S(A_i, A_j) = \max_{x\in X} \min [\mu_{A_i}(x), \mu_{A_j}(x)]$$

- Scalar similarity $S_e(x, y)$ between fuzzy sets x and y

$$S_e(x, y) = \max_{i} \min [\mu_{A_i}(x), \mu_{A_i}(y)]$$

유사도를 좀더 현실에 가깝게 표현하기 위해, 다음과 같이 퍼지 유사도 척도를 제안한다.

- Fuzzy similarity $\tilde{S}(A_i, A_j)$ between fuzzy sets A_i and A_j

$$\tilde{S}(A_i, A_j) = \{(\sigma_{i,j},\ \mu_{\tilde{S}}(\sigma_{i,j})) \mid \sigma_{i,j} = \min[\mu_i(x),\ \mu_j(x)]$$
$$\mu_{\tilde{S}}(\sigma_{i,j}) = \max_{\sigma_{i,j} = \min[\mu_i(x),\ \mu_j(x)]} [\mu_X(x)], x \in X\}$$

- Fuzzy similarity $\tilde{S}_e(x, y)$ between elements x and y

$$\tilde{S}_e(x,y) = \{\gamma_{x,y}\ \mu_{\tilde{S}_e}(\gamma_{x,y}) \mid \gamma_{x,y} = \min_i [\mu_i(x), \mu_i(y)], \mu_{\tilde{S}_e}(\gamma_{x,y}) = \mu_E(A_i)\}$$

이해를 위해서 앞에 예로 들었던 시스템에서 유사도를 측정해 보자.

- Scalar similarity between fuzzy sets A_1 and A_2

$$S(A_1, A_2) = \max[\min(0.4,0.6), \min(0.8,0.3), \min(0.9,0), \min(0,0.5), \min(0.5,0)] = \max[0.4,0.3,0,0,0] = 0.4$$

- Scalar similarity between elements x_1 and x_2

$$S_e(x_1, x_2) = \max[\min(0.4,0.8), \min(0.6,0.3), \min(0,0.4)] = \max[0.4,0.3,0] = 0.4$$

- Fuzzy similarity between fuzzy sets A_1 and A_2

$$\tilde{S}(A_1, A_2) = \{(\min(0.4,0.6), 0.6), (\min(0.8,0.3), 0.8), (\min(0.9,0), 0.9), (\min(0,0.5), 0.1), (\min(0.5,0), 0.5)\} = \{(0.4, 0.6), (0.3, 0.8), (0, 0.9), (0, 0.1), (0, 0.5)\} = \{(0.4, 0.6), (0.3, 0.8), (0, 0.9)\}$$

예를 들어서, 유사도 0.4는 x_1이 A_1과 A_2에 동시에 포함될 때 주어진다. 그런데, x_1이 전체 시스템 (X)에 포함될 가능성이 0.6이다. 즉, $\upsilon_{\tilde{S}}(x_1)$=0.6. 따라서 0.4의 유사도를 가진 가능성은 0.6이다. $\mu_{\tilde{S}}(0.4)$=0.6. 마찬가지 방법으로 $\mu_{\tilde{S}}(0.3)$은 0.8이 되었다. 또한 $\mu_{\tilde{S}}(0)$은 세가지 경우에 발생했는데, 이것들의 가능성은 0.9, 0.1, 0.5이다. 정의에 따라 이들중에 최대값 0.9를 취하여 $\mu_{\tilde{S}}(0)$=0.9가 된다.

- Fuzzy similarity between elements x_1 and x_2

$$\tilde{S}_e(x_1, x_2) = \{(\min(0.4, 0.8), 0.9), (\min(0.6, 0.3), 0.6), (\min(0, 0.4), 1)\} = \{(0.4, 0.9), (0.3, 0.6), (0, 1)\}$$

예를 들어서 유사도 0.4는 A_1이 x_1과 x_2를 포함할 때 주어진다. 그런데 A_1이 전체집합 E에 소속될 가능성이 0.9이다. 즉, $\upsilon_E(A_1)=0.9$. 따라서 유사도가 0.4일 가능성은 0.9이다. $\mu_{\tilde{S}}(0)=0.9$.

Chen은 [2]에서 퍼지값의 유사도를 측정하는 척도들을 비교했는데, 퍼지 집합 사이의 유사도를 측정하는 척도를 세가지로 분류하고 비교 분석했다. 첫째는 기하학적인 거리에 기반을 둔 (based on the geometric model) 척도, 둘째는 집합이론에 근거한 (based on the set-theoretic approach) 척도, 셋째는 매칭함수에 근거한 (based on the matching function) 척도다. 여기에서 제안한 척도는 집합이론에 근거한 척도로서, 집합의 원소와 집합 개개의 유사성을 중시하는 특징이 있다. 그리고 유사도 측정결과가 퍼지집합으로 생성된다는 특징이 있다.

4. 결 론

퍼지 하이퍼 그래프에 의해서 표현된 시스템내의 유사도를 분석했다. 전체 시스템 속에서 부분집합이라 할 수 있는 퍼지 에지(퍼지집합)사이의 유사도를 퍼지값으로 구하는 척도를 제안했다. 아울러 원소들 사이의 퍼지 유사도를 구하는 척도도 제안했고, 이런 척도들은 퍼지집합과 원소사이의 유사도 분석에 효과적으로 이용될 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] H. Lee-Kwang, Y. S. Song, K. M. Lee, Similarity measure between fuzzy sets and between elements. Fuzzy sets and systems, **62**(3), 291-293, 1994.

[2] S.M. Chen, M.S. Yeh, P.Y. Hsiao, "A comparision of similarity measures of fuzzy values", Fuzzy Sets and Systems, **72**(1), 79-89, 1995.

[3] R. Zwick, E. Carlstein and D. Budescu, Measures of similarity among fuzzy sets: a comparitive analysis, *Int. J. Approximate Reasoning* **1**, 221-242, 1987.

[4] C. Murthy, S. K. Pal and D. Dutta Majymder, Correlation between two fuzzy membership functions, *Fuzzy Sets and Systems* **17**, 23-38, 1985.

[5] H. Lee-Kwang, K.M. Lee, "Fuzzy hypergraph and fuzzy partition", IEEE trans. Systems Man and Cybernetics, **25**(1), 196-201, 1995.

[6] Y.D. Kim, H. Lee-Kwang, "High speed flexible fuzzy hardware for fuzzy information processing", *IEEE trans. System Man and Cybernetics,* **27**(1), 45-56, 1997.

[7] H. Lee-Kwang, "Type-2 fuzzy hypergraph and adjacent level," IEEE trans. Systems Man and Cybernetics, (Submitted).

이 광 형(Kwang Hyung Lee)

한국퍼지 및 지능시스템학회논문지 제8권 제4호 참조