

# 점성 및 비점성 유동장 해석을 위한 BGK 수치기법의 효율적 계산

채동석, 김종암<sup>\*1</sup>, 노오현<sup>\*2</sup>

## Efficient Calculation of Gas-kinetic BGK scheme for Analysis of Inviscid and Viscous Flows

Dongsuk Chae, Chongam Kim, Oh Hyun Rho

From the Boltzmann equation with BGK approximation, a gas-kinetic BGK scheme is developed and methods for its efficient calculation, using the convergence acceleration techniques, are presented in a framework of an implicit time integration. The characteristics of the original gas-kinetic BGK scheme are improved in order for the accurate calculation of viscous and heat convection problems by considering Osher's linear subpath solutions and Prandtl number correction. Present scheme applied to various numerical tests reveals a high level of accuracy and robustness and shows advantages over flux vector splittings and Riemann solver approaches from Euler equations.

**Key Words :** 볼츠만 방정식(Boltzmann Equation), BGK 근사(BGK Approximation)  
수렴가속화(Convergence Acceleration)

### 1. 서론

지난 수 십 년간 전자계산기의 강력한 계산능력을 활용하여 해석적 해가 구하기 힘든 문제를 수치적으로 풀기 위한 시도로서 매우 다양한 충격파 포착기법(shock capturing scheme)이 개발되었다. 그 중 가장 주목할 만한 것은 엄밀 및 근사 리만해법(exact or approximate Riemann solvers) 과 플럭스분할기법으로서, 이들은 Euler 방정식에 기반을 두고 선형 또는 비선형파의 상호작용을 풍상차분법(upwind scheme)의 방법으로 기술하려는 시도라고 할 수 있다. 이러한 수치기법이 최근 들어 더욱 광범위한 유체역학문제에 적용됨에 따라 여러가지 단점이 발견되었다. 플럭스분할기법은 많은 문제에서 있어서 매우 강건한 성질을 보여주지만 불연속 접촉면을 무시하기 때문에 점성 및 열 유동장이 정확히 계산되지 않으며 이러한 문제는 단순히 고차 내삽 기법의 이용만으로는 해결되지 않는다. 리만해법은 비교적 정확한 해를 구하는 것으로 알려져 있으나 짝홀 분리 현상, carbuncle 현상 및 진공에 가까운 유동장에서 불

안정성 등 강건성에서 문제점을 드러내었다[1]. 한편, 입자의 통계적인 운동을 기술하는 기체운동론(gas-kinetic theory)에 근거하여 Pullin[2], Deshpande[3] 및 그 밖의 연구자들은 몇 가지의 수치기법을 개발하였다. 그들은 비충돌 볼츠만 방정식으로부터 입자의 수준에서 플럭스분할기법 형태의 풍상차분법을 구현하였다. 이 방법에서는 입자들이 충돌 없이 셀면을 통과하므로 일반적으로 과도한 수치점성과 일진도를 유발하게 되며 이것은 Euler 방정식으로부터 유도된 플럭스분할기법과 공통되는 성질이라고 말할 수 있다. Xu 와 Prendergast[4,5]는 입자의 충돌을 고려한 수치기법을 개발하였는데 이들은 볼츠만 방정식의 충돌항을 BGK 모델로 대치하고 이것의 적분해로부터 수치플럭스를 구하였다. 이 수치기법은 기존의 리만해법에 비하여 수치적으로나 물리적으로 매우 타당한 성질을 지니고 있음이 밝혀졌다. 즉 강건성, 정확성, 엔트로피 조건, 양수보존성 등이 그것이다. 본 논문은 BGK 수치기법의 본래의 특성을 최대한 유지하는 가운데 내재적 시간적분의 틀 안에서 정상문제에 효율적으로 적용하기 위한 국부시간진진 및 multigrid 와 같은 수렴가속화기법을 개발하였다. 또한 점성 계산시 발생할 수 있는 문제점을 해결하기 위하여 Osher 의 선형파

\*1 정희원, 서울대학교 항공우주공학과  
\*2 정희원, 서울대학교 항공우주공학과

적분경로 해를 이용하여 불연속 접촉면이 정확히 계산될 수 있도록 수치기법을 개선하였다. 또한 BGK 모델은 Pr 수가 1 이 되므로 임의의 Pr 수에 대하여 계산되도록 Pr 수를 보정하였다. 본 논문에서 개발된 수치기법을 다양한 문제에 적용한 결과 만족할 만한 해를 얻을 수 있었다.

## 2. 수치기법

### 2.1 BGK 수치기법

BGK 수치기법의 시작은 볼츠만 방정식의 충돌항을 BGK 근사한 방정식으로서 2 차원의 경우 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{g - f}{\tau} \quad (1)$$

여기서  $f$  는 실제의 입자분포함수를 나타내며  $g$  는 입자충돌을 통하여  $f$  가 충돌시간  $\tau$  동안에 접근하는 입자분포함수를 나타낸다.  $f$  와  $g$  는 공간  $(x, y)$ , 시간  $t$ , 입자속도  $(u, v)$  및  $\xi$  의 함수이다.  $\xi$  는 내부에너지와 비열비를 적절히 기술하기 위하여 도입된  $K$  차원의 벡터이다. 연속체 가정에 의하여 거시적 변수인 밀도  $\rho(x, y, t)$ , 운동량  $\mathbf{P}(x, y, t)$  와 에너지밀도  $\varepsilon(x, y, t)$  는 다음의 식에서 구하게 된다.

$$\begin{pmatrix} \rho \\ P_x \\ P_y \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \int \psi f d\Xi$$

$$\text{그리고 } \psi = [1, u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \xi^2)]^T \quad (2)$$

여기서  $d\Xi = \xi^{K-1} d\xi du dv$  는 위상공간에서의 미소체적이며  $D$  차원에서 내부자유도  $K$  는  $K + D = 2(\gamma - 1)$  의 관계식에서 구하게 된다. 시간  $t$  때 셀면  $(x_{i+1/2}, y_j)$  에서의 입자분포함수  $f$  는 다음과 같이 표현된다.

$$f(x, y, t, u, v, \xi) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g(x', y', t, u, v, \xi) e^{-t'/\tau} dt' + e^{-t/\tau} f_0(x - ut, y - vt) \quad (3)$$

여기서  $x' = x_j - u(t - t')$  와  $y' = y_j - v(t - t')$  는 입자의 경로이며  $f_0$  는 매 계산시간초기의 비평형 입자분포함수이다. 여기서 입자분포함수  $f_0$  와  $g$  가 물리적으로 타당하게 주어져야 한다. BGK 수치기법은 입자분포함수의 선정이 융통적이라도 불필요한 인공점성을 없애고 계산시간을 단축하기 위하여 본 논문에서는 [4,5]와는 다르게 다음과 같이 제안하였다.

$$f_0 = \begin{cases} g^l & , x < 0 \\ g^r & , x > 0 \end{cases}$$

$$g = g_0(1 + \bar{a}x + \bar{b}y) \quad (4)$$

여기서  $g^l, g^r$  와  $g_0$  는 셀 경계에서 왼쪽, 오른쪽 및 중간의 국부 Maxwellian 분포함수를 나타내며,  $\bar{a}$  와  $\bar{b}$  는 공간상의 기울기를 나타낸다. 국부 Maxwellian 은 다음과 같이 표현된다.

$$g^* = \rho \left( \frac{\lambda^*}{\pi} \right)^{\frac{K+2}{2}} e^{-\lambda^* [(u-U^*)^2 + (v-V^*)^2 + \xi^2]}$$

여기서 Maxwellian  $g^*$  의 매개변수  $\rho^*, U^*, V^*$  와  $\lambda^*$  는  $f$  를  $g^*$  로 대신한 식(2)로부터 구할 수 있다. 상첨자 \*는  $l, r$  을 의미한다. 식(2)의 계산시 필요한 셀 경계의 바로 왼쪽과 오른쪽의 거시적 변수인  $\rho^*, P_x^*, P_y^*$  와  $\varepsilon^*$  는 MUSCL 기법[8] 통하여 구한다. 본 논문에서는 2 차의 공간정확도가 확보될 수 있게 하였고 van Leer 의 제한자를 사용하였다. 한편,  $g_0$  의 매개변수들은 보존성 구속조건 (conservation constraints)에 의하여 다음으로부터 구한다.

$$\int (g - f) \psi d\Xi = 0$$

그리고  $x = x_{i+1/2}$  에서의  $g_0$  공간상 기울기  $\bar{a}$  는 다음의 관계식에서 구할 수 있다. 즉

$$\int g_0 \bar{a} \psi d\Xi = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} \rho_{i+1} - \rho_i \\ P_{x_{i+1}} - P_{x_i} \\ P_{y_{i+1}} - P_{y_i} \\ \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \end{pmatrix}$$

$y$  방향의 기울기  $\bar{b}$  도 비슷한 방법으로 구할 수 있다. 입자분포함수  $f$  가 셀 경계면의 중심 즉,  $(x, y) = (0, 0)$  에 위치한다고 하면, 현재까지 식(4)의 미지수는 모두 구하였으므로 식(3)에 넣어 적분을 수행하면 분포함수의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$f(0, 0, t, u, v, \xi) = (1 - e^{-t/\tau}) g_0 + e^{-t/\tau} f_0(-ut, -vt) + (\tau(-1 + e^{-t/\tau}) + te^{-t/\tau})(u\bar{a} + v\bar{b}) g_0 \quad (5)$$

이로부터 우리가 구하고자 하는 셀면에서 계산시간간격  $\Delta t$  동안의 평균적인  $x$  방향의 수치플럭스는 아래와 같다.

$$\mathbf{F}_x(\mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_r, \tau, \Delta t)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int u \psi f(0, 0, t, u, v, \xi) d\Xi dt \quad (6)$$

마지막으로 본 수치플럭스 계산에 필요한 분자충돌시간  $\tau$  을 결정해야 한다. 분자충돌시간은 수치기법의 정확도와 강건성에 영향을 미치는 매우

중요한 변수이다. 왜냐하면 수치플럭스는 입자분포함수  $g_0$  부터 Lax-Wendroff 형태의 플럭스와  $f_0$ 로부터의 KFVS(kinetic flux vector splitting)가 분자충돌시간을 통하여 비선형적으로 결합된 형태를 띠기 때문이다. 분자충돌시간은 두개의 부분으로 이루어져 있다. 첫번째 부분은 기체운동론으로부터 유도될 수 있으며 두번째 부분은 충격파와 같은 불연속면을 몇 개의 격자점에서 포착하기 위하여 수치기법상 도입된 것이다. 식(5)를 자세히 살펴보면 해가 비교적 완만한 부분에서는 분자충돌시간이 줄어들게 되어 Lax-Wendroff 형태의 플럭스가 지배적이 되며 충격파와 같은 부분에서는 분자충돌시간이 증가하여 플럭스분할기법의 플럭스의 양이 커지게 된다. 이와 같은 특성은 BGK 모델이 입자의 충돌을 고려하였기 때문에 생기는 바람직한 성질로서 비충돌 볼츠만 방정식에 근거한 EFM 이나 KFVS 기법 보다 양질의 수치해를 제공하게 된다. 분자충돌시간은 비점성계산의 경우 다음과 같이 주어진다.

$$\tau = C_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{\rho} + C_2 \sqrt{\lambda} \times \frac{|\sqrt{\lambda^l} / \rho^l - \sqrt{\lambda^r} / \rho^r|}{\sqrt{\lambda^l} / \rho^l + \sqrt{\lambda^r} / \rho^r} \times |p^l - p^r|$$

여기서 첫번째 항은 기체운동론(gas-kinetic theory)로부터 주어지며 두번째 항은 해의 구배를 감지하여 이것이 심한 영역에서 플럭스분할기법을 지배적으로 작용시키기 위한 항이다.  $C_1$ 와  $C_2$ 는 경험적으로 주어지며 본 논문에서는 모든 경우  $5 \times 10^{-5}$ ,  $1 \times 10^{-3}$ 로 각각 주었다. 다만 3.2 절의 초음속 실린더와 2차원 충격파관 문제의 경우에만 수렴성 향상과 강건성 유지를 위하여  $C_2 = 1 \times 10^{-2}$ 로 주었다. 위의 형태는 다양한 문제에 대하여 비교적 정확하고 안정된 해를 제공하지만 결코 최적화된 형태가 아니며 이에 대한 추가적인 연구가 필요하다. 한편 점성유동장 계산 시에는 기체운동론에서부터 도출되는 관계식  $\tau p = \eta$ 에 의하여 구할 수 있으며 적절한 무차원화를 통하여 수치적 부분과 함께 다음과 같이 표현된다.

$$\tau = \frac{M_\infty \mu}{Re_\infty p} + C_2 \sqrt{\lambda} \times \frac{|\sqrt{\lambda^l} / \rho^l - \sqrt{\lambda^r} / \rho^r|}{\sqrt{\lambda^l} / \rho^l + \sqrt{\lambda^r} / \rho^r} \times |p^l - p^r|$$

여기서 점성계수는 Sutherland 법칙에 의하여 구하게 된다. 여기서 난류의 효과를 고려하는 경우 난류점성계수를 적절한 난류모델링으로부터 구하여 다음과 같이 분자충돌시간에 추가한다.

$$\tau = \frac{M_\infty (\mu_l + \mu_r)}{Re_\infty p} + C_2 \sqrt{\lambda} \times \frac{|\sqrt{\lambda^l} / \rho^l - \sqrt{\lambda^r} / \rho^r|}{\sqrt{\lambda^l} / \rho^l + \sqrt{\lambda^r} / \rho^r} \times |p^l - p^r|$$

### 2.2 국부시간적분

식(6)에서 보는 바와 같이 수치플럭스는 셀의 양면에서의 물리적 변수, 입자충돌시간 뿐만 아니라 계산시간간격의 함수이므로 수렴가속기법을 적용하기 어렵게 한다. 즉 식(6)에 국부시간적분을 그대로 적용하게 되면 셀 내부에서의 플럭스가 평형이 되지 않아서 올바른 해를 구할 수 없게 된다. 그러므로 Xu[10]는 식(4)의 입자분포함수를 더욱 단순화하여 시간에 독립적인 플럭스를 구하고 이에 multigrid 수렴가속화기법을 적용하였다. 그러나 이 방법은 입자분포함수의 공간의 기울기를 무시하였으므로 점성의 효과를 내기 위하여 Navier-Stokes 방정식으로부터 나오는 점성 플럭스를 추가하여야 하는 단점이 있다. 본 논문에서는 식(4)와 같이 점성의 효과가 손상되지 않을 정도로만 입자분포함수를 단순화하고 다음과 같이 시간적분을 수행한다(편의상 1차원의 경우로 설명한다).

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{F_{i+1/2}(Q_{i+1}, Q_i, \tau, \Delta t) - F_{i-1/2}(Q_i, Q_{i-1}, \tau, \Delta t)\}$$

여기에 국부시간적분을 적용하기 위하여 위 식을 약간 변형하면

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t_l}{\Delta x} \{F_{i+1/2}(Q_{i+1}, Q_i, \tau, \Delta t_n) - F_{i-1/2}(Q_i, Q_{i-1}, \tau, \Delta t_n)\}$$

여기서  $\Delta t_n$ 은 플럭스를 적절히 정규화하기 위한 시간간격이며  $\Delta t_l$ 은 대류 및 점성확산을 고려하여 국부적으로 구하게 되는 시간간격이다. 여기서  $\Delta t_n$ 는 다음과 같이 구한다.

$$\Delta t_n = \frac{\min(\Delta t_l)}{2 CFL}$$

여기서  $\min(x)$ 는  $x$ 의 최소값을 구하는 함수이다.

### 2.3 내재적 시간적분법

내재적 시간적분법은 잔류항을 한번만 계산하고 시간간격을 크게 줄 수 있어 다단계 Runge-Kutta 시간적분법과 같은 외재적 시간적분법보다 유리하다고 판단되므로 본 논문에서는 적절한 내재적 시간적분법을 개발하였다.  $\Delta$ -형태는 2차원의 경우 다음과 같이 표현된다.

$$(sI / \Delta t_l + \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial F_x}{\partial Q})) + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial F_y}{\partial Q}) \Delta Q = -R$$

이식에서 행렬의 역변환을 위한 플릭스 자코비안이 계산되어야 한다. 그러나 본 수치플릭스는 매우 복잡한 형태를 띄게 되므로 수치플릭스가  $f_0$ 로부터의 KFVS로만 구성된 것처럼 가정하여 다음과 같이 풍상차분법으로 차분한다. 즉,

$$(sI/\Delta t_l + \frac{1}{\Delta x}(\delta_x^- A^+ + \delta_x^+ A^-) + \frac{1}{\Delta y}(\delta_y^- B^+ + \delta_y^+ B^-))\Delta Q = -R \quad (7)$$

그리고

$$A^+ = \frac{\partial}{\partial Q_l} \int_{-\infty}^0 u \psi g_l dE, \quad A^- = \frac{\partial}{\partial Q_r} \int_0^{\infty} u \psi g_r dE$$

여기서  $\delta^\pm$ 는 각 방향으로의 전방 및 후방차분을 의미한다. 식(7)은 ADI(alternating direction implicit)에 의하여 계산된다. 각종 계산결과를 통하여 위와 같은 시간적분은 원래의 수치기법이 가지는 강건성을 해치지 않는 것으로 확인되었다.

## 2.4 Multigrid

정상문제에서 수렴성을 더욱 가속화하기 위하여 multigrid 기법[11]을 적용하였다. 격자의 등급을 하첨자로 표시하면 가장 조밀한 격자의 변수는 면적이중에 따라 다음과 같이 제한(restriction)된다

$$Q_{2h}^{(0)} = \sum S_h Q_h / S_{2h}$$

여기서  $S_h$ 는 가장 조밀한 격자의 셀면적,  $S_{2h}$ 는 가장 조밀한 격자의 4개의 셀을 합친 면적을 나타낸다. 성긴격자에서의 해는 다음과 같은 절차에 의하여 보정된다.

- (1) 잔류항을 구하고 조밀한 격자계의 해를 최근 값으로 보정한다.
- (2) 성긴 격자로 제한을 수행한다.
- (3) forcing function 과 함께 조밀격자의 4개의 셀의 잔류항을 합한 것은

$$R_{2h}^* = R_{2h}(Q_{2h}) + \sum R_h(Q_h) - R_{2h}(Q_{2h}^{(0)})$$

- (4) 위의 잔류항으로 성긴 격자에서의 유동변수를 보정한다. 그리고 다음의 성긴격자의 잔류항은

$$R_{4h}^* = R_{4h}(Q_{4h}) + \sum R_{2h}^* - R_{4h}(Q_{4h}^{(0)})$$

이러한 과정이 가장 성긴격자까지 계속되며 그 후 보정치는 쌍선형 보간법(bilinear interpolation)에 의하여 조밀한 격자에 더하여 진다. 본 논문에서는 V-cycle 을 사용하였다.

## 2.5 점성유동장의 계산

점성유동장의 계산시 문제가 될 수 있는 것은 수치플릭스의 플릭스분할기법에 해당하는 항으로

서 플릭스분할기법은 점성 계산시 매우 중요한 불연속 접촉면(contact discontinuity)을 정확히 포착을 하지 못하기 때문이다. 특히 벽면근처와 같이 셀의 종횡비가 커서 계산시간 간격이 매우 작은 경우 식(5)에서 볼 수 있는 바와 같이 분자충돌시간이 커지게 되는 효과를 유발하므로 유동이 완만한 곳에서도 플릭스 분할기법이 지배적으로 작용하는 현상이 발생한다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 Osher의 선형과 적분경로를 고려하였다[12]. 본 수치기법의 플릭스 분할항을 Osher[13]의 수치 플릭스형태로 나타내면 아래와 같다.

$$F_{KFVS}(Q_l, Q_r) = F^+(Q_l) + F^-(Q_r) \\ = \frac{1}{2}[F_l + F_r - \int_L |B| dQ - \int_N |B| dQ]$$

여기서  $|B| = B^+ - B^-$ 이며  $B^\pm$ 는  $F^\pm$ 의 플릭스 자코비안이다. 그리고 L, N은 각각 선형, 비선형 적분경로를 나타낸다. 여기서 불연속 접촉면에 해당하는 선형적분경로를 Osher의 것으로 대치하면 수정된 수치플릭스는 다음과 같이 원래의 플릭스분할항에 추가된 항의 합으로 표현된다.

$$F_{MOD}(Q_l, Q_r) = \frac{1}{2}[F_l + F_r - \int_L |A| dQ - \int_N |B| dQ] \\ = F^+(Q_l) + F^-(Q_r) + \begin{cases} -F^-(Q_2) + F^-(Q_1), U > 0 \\ F^+(Q_2) - F^+(Q_1), U < 0 \end{cases}$$

여기서 1,2는 Osher의 중간상태의 값이며 U는 셀에 수직인 공통 속도성분이다. 이러한 항의 추가는 충격파에는 영향을 주지 않고 불연속 접촉면에만 영향을 미치게 되므로 원래의 수치기법이 가지는 강건성을 해치지 않는다. 그리고 이러한 형태의 플릭스가 더욱 점성이 적은 Lax-Wendroff 형태의 플릭스와 결합하게 되므로 [12]의 EFMO 기법보다도 양질의 해를 제공하게 된다. 또한 점성효과를 정확히 모사하기 위하여  $\tau \ll t$ 의 가정을 도입하여 식(5)의  $\tau(-1 + e^{-t/\tau}) + te^{-t/\tau}$ 를  $-\tau$ 로 바꾼다.

## 2.6 Pr 수 보정법

점성유동장에서와 같이 비평형 효과가 존재하는 곳에서는 입자분포함수를 Maxwellian으로만 가정할 수 없으므로 입자분포함수를 평형에서 약간 벗어난 형태로 가정하게 된다. 즉 입자분포함수를 분자충돌시간의 1차로 Chapman-Enskog 전개를 한 후 식(1)에 넣어 모멘트를 취하면 Navier-Stokes 방정식을 얻게된다[14]. 그러나 이와 같이 BGK 모델로부터 유도된 Navier-Stokes 방정식은 Pr 수가 1이 된다. 임의의 Pr 수에 대해서도 계산

이 가능하도록 다음과 같은 본래 점성항의 에너지 플럭스  $F_4$  를

$$F_4 = -\frac{\tau}{\Delta t} \int_0^M \int u \psi_4 (u\bar{a} + v\bar{b}) g_0 d\Xi dt$$

아래와 같이 바꾼다. 즉 수정된 플럭스는 다음과 같다.

$$F_4^{mod} = \frac{1}{Pr} F_4 + (1 - \frac{1}{Pr}) \frac{-\tau}{\Delta t} \int_0^M \int u^2 \psi_2 (u\bar{a} + v\bar{b}) g_0 + uv \psi_3 (u\bar{a} + v\bar{b}) g_0 d\Xi dt$$

위에서 숫자인 하첨자는 벡터의 n 번째 항을 나타내며 추가되는 항의 모멘트계산은 이미 수행된 상태이므로 위 식의 계산에 드는 시간은 미미하다.

### 3. 수치실험결과

#### 3.1 천음속 에어포일 계산

2 절에서 개발한 수치기법의 정확성을 보기 위하여 천음속 에어포일을 계산하였다. 계산에 사용된 격자는 161\*33 O-type 격자이며 4 level multigrid 를 사용하였다. RAE2822 의  $C_p$  와 수렴 곡선이 그림.1 에 나타나 있다. 충격파를 셀 하나에서 포착하여 셀 3 개에서 포착하는 EFMO[12] 수치기법에 비하여 우수한 성능을 보이고 있다. 또한 4 level multigrid 는 단일격자의 경우보다

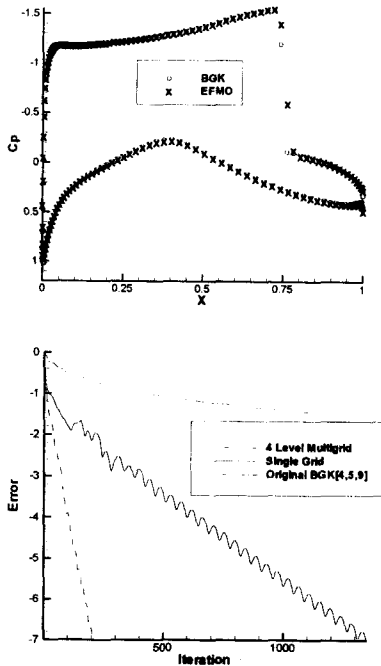
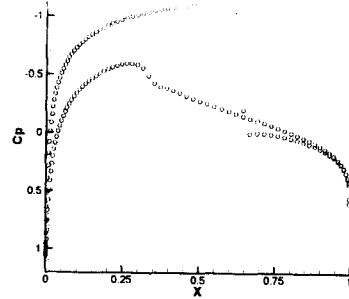


Fig.1 RAE2822 with  $M=0.75$ ,  $AOA=3$   
 $C_L = 1.0973$ ,  $C_D = 0.0463$



50% 정도의 추가적인 계산시간만을 필요로 하므

Fig.2 NACA0012 with  $M=0.8$ ,  $AOA=1.25$   
 $C_L = 0.3538$ ,  $C_D = 0.0229$

로 계산의 효율성이 크게 개선된 것을 알 수 있다. Fig.1 에 수렴가속화기법을 쓰지 않은 외재적 시간적분법에 의한 BGK 수치기법의 수렴곡선도 나타나 있다. Fig.2는 NACA0012 의 계산 결과로서 충격파를 2 개의 셀에서 잡고 있다. 이러한 결과들로부터 본 수치기법은 천음속 영역에서 효율적이고 정확한 결과를 주고 있는 것을 알 수 있다.

#### 3.2 강건성 수치실험

수치기법의 강건성을 살펴보기 위하여 초음속 유동에 놓인 실린더를 계산하였다. 이 문제에서

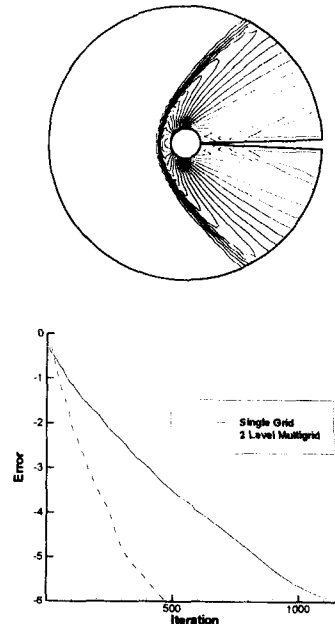


Fig.3 Supersonic Cylinder Density Contour with  $M=2.5$

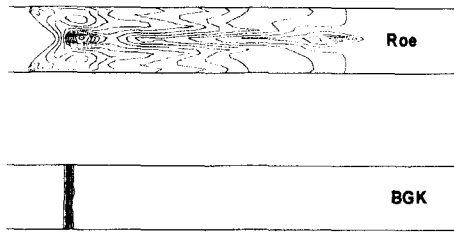


Fig.4 Carbuncle Test

는 매우 강한 충격파와 진공에 가까울 정도의 팽창영역에서 몇 번의 계산 단계 후 끊기며 플럭스분할기법의 일종인 CUSP 기법도 실패하는 것으로 알려져 있다[9,15]. 그러나 본 수치기법은 별 문제없이 계산이 수행되었다. Fig.3은 등밀도선과 수렴곡선을 보여준다. 이 계산에서는 multigrid의 restriction과 interpolation의 불안정성 문제로 2 level만 사용되었지만 계산시간은 여전히 단축된 것을 볼 수 있다. 이러한 계산에 알맞은 강건한 restriction과 interpolation 기법에 대한 연구가 필요할 것으로 판단된다. 또한 수치기법이 고속 유동시에 carbuncle 현상을 나타내는지 시험하기 위하여 참고문헌[1]에서 제안된 2차원 충격파관 문제를 계산하였다. Fig.4는 관내의 등밀도선도로서 Roe의 FDS의 경우 200회의 반복계산 후 해가 완전히 파괴된 반면 본 수치기법은 2000회의 계산 후 비교적 안정된 해를 제공하고 있음을 볼 수 있다.

3.3 점성 계산

개발된 수치기법은 근본적으로 점성플럭스를 내포하고 있으므로 일반적인 충격파 포획기법과 달리 별도로 점성 플럭스를 추가할 필요가 없다. 개발된 플럭스가 실제의 점성효과를 정확히 모사

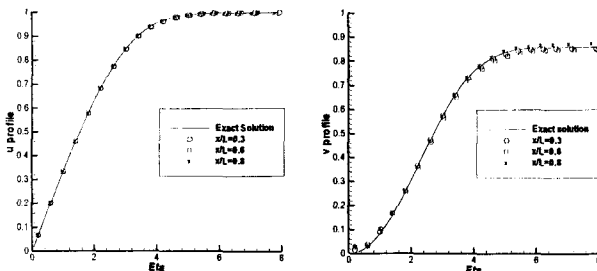


Fig.5 Boundary Layer on Flat Plate  
M=0.2, Re=10000

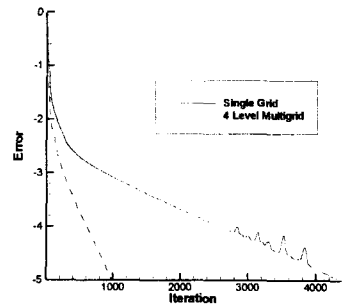
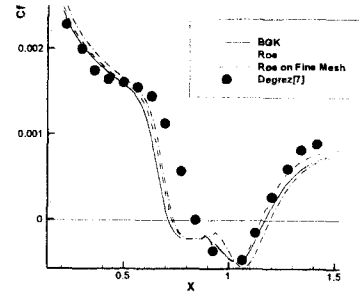


Fig.6 Shock Boundary Layer Interaction  
M=2.0 Re=2.96e5

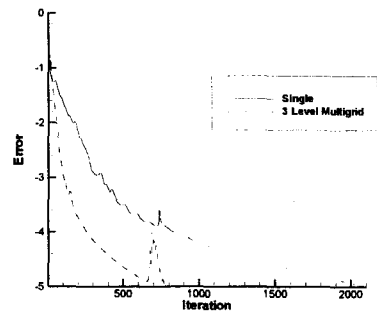
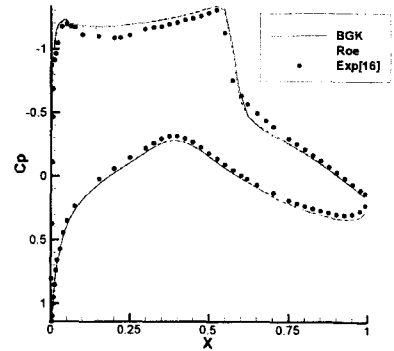


Fig.7 RAE2822 with M=0.73, AOA=2.79,  
Re=6.5e6  
 $C_L=0.8714, C_D=0.0211$

하는지를 확인하기 위하여 평판의 경계층분제를 계산하였다. 계산에 사용된 격자는  $81 \times 33$  격자점을 가지며 평판을 따라 경계층 내부에 일정한 격자 개수가 사용되도록 격자를 생성하였다. Fig.5는 평판의 각 위치에서의 x,y 방향의 무차원화된 속도분포를 보여준다. Blasius의 해와 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. Fig.6은 층류 충격파-경계층 상호작용 문제로서 실험값[7] 및 Roe의 FDS와 비교하여 표면의 마찰계수가 만족할 만한 결과를 보여주고 있다. 해의 비교를 위하여 매우 조밀한 격자에서 Roe의 FDS 방법으로 계산된 마찰계수도 도시하였다. Fig.7은 Baldwin-Lomax 난류 모델링을 사용하여 참고문헌[16]의 RAE2822의 case 9에 해당하는 조건에서 계산된  $C_p$  분포와 수렴곡선을 보여주고 있다.  $241 \times 49$ 의 C-type 격자가 계산에 사용되었다. 수렴곡선이  $-4 \sim -5$  근방에서 튀는 현상은 명확하게 밝혀지지 않았으나 O-type 격자를 사용하는 경우에는 이러한 현상이 나타나지 않는 것으로 보아 격자의 문제라고 추정된다. 이 결과에서 볼 수 있는 것과 같이 개발된 수치기법은 층류문제 뿐만 아니라 난류문제에도 성공적으로 적용될 수 있다.

### 3.4 평판 열전달 문제 계산

평판의 경계층 문제에서와 동일한 조건하에서 평판의 열전달 문제를 계산하였다. 벽면에서는 단열경계조건을 부여하였다. Fig.8은 다양한 Pr수에 따른 평판의 위치  $x/L=0.6$ 에서의 무차원화된 온도분포를 보여주고 있다. 본 논문에서 제안한 Pr수 보정법이 비교적 정확한 온도분포를 계산하는 것으로 판단된다. 다만 벽면근처에서 단열온도가 약간의 오차를 보이고 있는데 이것은 플럭스 분할항에 Osher의 해를 사용할 때만 나타나는 현상으로 참고문헌[12]에서도 보이고 있으며 그 원인은 정확히 알려지지 않았다. 정확한 열전달량을 계산하기 위해서는 반드시 해결되어야 할 문제로서 현재 연구중이다.

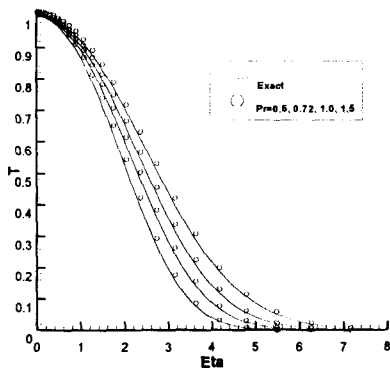


Fig.8 Temperature Profile on Flat Plate  
M=0.2, Re=10000

### 3. 결론 및 향후 연구과제

본 논문에서는 BGK 수치기법의 효율적 계산을 위하여 수치기법이 가지고 있는 양질의 특성을 유지하는 범위에서 최대한 단순화하는 동시에 이에 적합한 수렴가속화 기법을 개발하였다. 또한 점성유동 및 열전달 유동 계산시 나타날 수 있는 문제점을 주목, 이를 적절히 해결하고 다양한 문제에 적용한 결과 매우 만족할 만한 결과를 얻었다. 그러나 점성계산시 플럭스분할기법에 Osher의 해를 추가하는 방법은 별도의 계산시간을 요구하며 열전달 문제의 경우 문제점을 드러내므로 이에 대한 연구가 필요하다.

### 후기

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구과제의 재정적 지원하에 수행되었으며 이에 심심한 감사를 표합니다.

### 참고문헌

- [1] Quirk, J.J., "A Contribution to the Great Riemann Solver Debate", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.18, 1994, pp. 555~574
- [2] Pullin,D.I., "Direct Simulation Methods for Compressible Inviscid Ideal-Gas Flow", *Journal of Computational Physics*, Vol. 34, 1980, pp. 231~244
- [3] Deshpande,S.M., and Mandal,J.C., "Kinetic Flux Vector Splitting for Euler Equations", *Computers and Fluids*, Vol. 23, 1994, pp.447~478
- [4] Kun Xu, and Prendergast,K.H., "Numerical Hydrodynamics from Gas-Kinetic Theory", *Journal of Computational Physics*, Vol. 109, 1993, pp. 53~66
- [5] Kun Xu, and Prendergast,K.H., "Numerical Navier-Stokes Solutions from Gas Kinetic Theory", *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, 1994, pp. 9~17
- [6] Roe,P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, 1981, pp. 357~372
- [7] Degrez,G., Boccadoro, C.H., and Wendt,J.F.W., "The Interaction of an Oblique Shock Wave with a Laminar Boundary Layer Revisited. An Experimental and Numerical Study", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.177, 1987, pp. 246~267
- [8] Van Leer,B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second Order Sequel to

- Godunov's Method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, 1979, pp.101~136
- [9] Kim,C., *Robust and Accurate Numerical Methods for High Speed Unsteady Flows*, Ph.D. Dissertation, Dept. of Mechanical and Aerospace Eng., Princeton Univ. 1997
- [10] Kun Xu, Martinelli,L., and Jameson, A., " Gas-Kinetic Finite Volume Methods, Flux-Vector Splitting, and Artificial Diffusion", *Journal of Computational Physics*, Vol. 120, 1995, pp. 48~65
- [11] Jameson, A., and Yoon,S., "Lower-Upper Implicit Schemes with Multiple Grids for the Euler Equations", *AIAA Journal*, Vol. 25, 1987, pp. 929~935
- [12] Moschetta, J-M., and Pullin,D.I., "A Robust Low Diffusive Kinetic Scheme for the Navier-Stoks/Euler Equations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 133, 1997, pp. 193~204
- [13] Enquist,B., and Osher,S., "Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Calculations", *Mathematics of Computation*, Vol.34, 1980, pp.45~75
- [14] Vincent,W.G., and Kruger,C.H., *Introduction to Physical Gas Dynamics*, John Wiley and Sons, New York ,1965
- [15] Kim.C and Jameson,A., "A Robust and Accurate LED-BGK Solver on Unstructured Adaptive Meshes", *Journal of Computational Physics*, Vol.143, 1998, 598~627
- [16] Cook,P.H., Mc Donald ,M.A., and Firman, M.C.P., "AEROFOIL RAE2822 Pressure Distributions, Boundary Layer and Wak Measurements", AGARD Report No.138, 1979