

# 비정렬 혼합 격자에서 내재적 방법을 이용한 비압축성 유동해석

김 종태<sup>\*1</sup>, 김 용모<sup>\*2</sup>, 맹 주성<sup>\*2</sup>

## Implicit Incompressible flow solver on Unstructured Hybrid grids

J. Kim, Y.M. Kim, and J.S. Maeng

The three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations have been solved by a node-centered finite volume method with unstructured hybrid grids. The pressure-velocity coupling is handled by the artificial compressibility algorithm and convective fluxes are obtained by Roe's flux difference splitting scheme with linear reconstruction of the solutions. Euler implicit method with Jacobi matrix solver is used for the time-integration. The viscous terms are discretised in a manner to handle any kind of grids such as tetrahedra, prisms, pyramids, hexahedra, or mixed-element grid. Inviscid bump flow is solved to check the accuracy of high order convective flux discretisation. And viscous flows around a circular cylinder and a sphere are studied to show the efficiency and accuracy of the solver.

**Key words:** 내재적 유한체적법(Implicit FVM), 비정렬 3차원 혼합격자(Unstructured 3-D Hybrid Grid), 원주 유동(Circular Cylinder Flow), 구 유동(Sphere Flow)

### 1. 서론

정렬격자에 비하여 격자생성의 자동화가 훨씬 용이한 비정렬격자는 항공기와 같이 형상이 복잡한 물체 주위의 비점성 유동해석에 매우 유용한 도구로 사용되고 있다. 그러나 점성 유동의 경계층을 정확히 해석하기 위해서는 벽면에 당겨진 종횡비가 큰 격자의 생성이 필수적이며 단순히 정사면체나 정육면체에 가까운 격자로는 점성유동장의 정확한 해석은 매우 힘들다. 현재 비정렬격자를 이용한 점성유동 해석에서 여러가

지 방법이 제시되고 있는데, 종횡비가 큰 사면체를 벽면 근처에 생성함으로써 전영역에 걸쳐 사면체 셀로만 격자를 구성하는 방법[1]과, 벽면 근처에서는 프리즘의 셀을 생성하고 그외의 영역에서는 사면체나 육면체의 셀을 생성하는 혼합격자법, 그리고 벽면 부근에서는 정렬격자를 생성하고 나머지 영역을 비정렬의 격자를 사용하는 방법 등이다. 첫 번째 방법은 전 유동영역을 사면체만으로 채움으로써 해석코드가 간단해질 수 있다. 그러나 사면체 격자는 격자점 수의 12배의 삼각면과 5~6배의 셀, 7배의 모서리를 생성하기 때문에 격자점 수와 동일한 셀, 3배의 면과 모서리를 생성하는 육면체 격자에 비해 기억장소의 부담을 크게 증가시킨다. Barth[2]는 종횡비가 큰 사면체에서 격자점을 중심으로 베

<sup>\*1</sup> 정회원, ETRI, PostDoc.

<sup>\*2</sup> 정회원, 한양대 기계공학과

디안 셀을 생성하면 불필요한 대각의 모서리로 인하여 메디안 셀이 크게 찌그러지고 대류 플럭스에 많은 수치오차가 발생함을 보였다. 이는 셀 중심법으로 이산화하는 경우에도 마찬가지로 벽면에서 경사지게 존재하는 삼각면은 대류 플럭스에 큰 수치오차를 포함시키며, 점성플럭스의 계산에 있어서도 해를 매우 불안정하게 만들며 해의 수렴성이 매우 취약하다. Michal등[3]은 발달된 정렬격자 코드와 비정렬격자의 비점성 유동해석 코드를 통합하여 정렬/비정렬 혼합격자 기법을 개발하였다. 벽면 근처는 구조형 다중격자를 생성하여 경계층을 효율적으로 계산하며, 벽면에서 떨어진 곳에서는 사면체의 비정렬 격자를 이용하여 비점성 유동으로 해석하는 점성/비점성 영역분할법(zonal method)을 사용하였다. 그리고 Soetrisno등[4]도 정렬/비정렬 혼합격자기법의 효율성과 정확성을 설명한 바 있다. 그러나 이 방법은 유동해석 관점에서는 사면체 격자에 비해 계산시간이 효율적이라 말할 수 있으나 벽면에서 구조격자를 생성해야하는 어려움이 있으며, 구조격자 해석코드가 있는 경우에만 가능하다. Nakahashi[5], Kallinderis[6] 등은 사면체, 오면체(프리즘, 피라미드)를 자동 생성하고 유동해석하는 기법을 개발하였다. 점성경계층에는 프리즘을 적층함으로써 종횡비가 크고 찌그러짐이 거의 없는 셀을 생성하였으며 비점성영역은 양질의 사면체를 생성함으로써 계산효율을 증대시켰다. Karman[7]은 직교격자의 한계성을 극복하기 위하여 벽면근처에 프리즘을 생성하는 직교/프리즘 혼합격자를 이용하였으며, Coirier[8], Strang[9] 등은 사면체, 오면체, 육면체의 혼합격자에서 셀중심기법을 이용하여 점성유동을 해석하였다. 비정렬 혼합격자를 사용하는 방법은 사면체 격자만을 사용하는 경우보다 셀, 모서리, 면의 수를 대폭 줄일 수 있어 계산시간과 주기억장소 측면에서 보다 효율적이고 프리즘은 종횡비가 큰 사면체가 갖고 있는 셀의 찌그러짐이 없으므로 더 정확하게 플럭스를 계산할 수 있다. 본 연구에서는 점성유동해석에 큰 장점을 갖고 있는 혼합격자를 이용하여 비압축성 유동을 해석하는 기법을 개발하고 실린더와 구 주위의 유동을 해석하였다.

## 2. 지배방정식과 수치해법

### 2.1 지배방정식

Chorin[10]이 제안한 방법에 따라 비압축성 Navier-Stokes 방정식에서 압력과 속도를 연결하기 위하여 연속방정식에 압력의 비정상 항을 도입한다.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

여기서  $\beta$ 는 인공압축성의 매개변수이다.

해가 정상상태에 도달하면 식 (1)은 원래의 연속방정식 형태가 된다. 식 (1)을 운동량 방정식과 연결하면 다음과 같은 조합된 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} Q dV + \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \hat{n} dS = \oint_{\partial\Omega} \vec{F}_v \hat{n} dS \quad (2)$$

$$Q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \beta(u_i^2 + v_j^2 + w_k^2) \\ u(u_i^2 + v_j^2 + w_k^2) + p_i \\ v(u_i^2 + v_j^2 + w_k^2) + p_j \\ w(u_i^2 + v_j^2 + w_k^2) + p_k \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \hat{i} + \tau_{xy} \hat{j} + \tau_{xz} \hat{k} \\ \tau_{xy} \hat{i} + \tau_{yy} \hat{j} + \tau_{yz} \hat{k} \\ \tau_{xz} \hat{i} + \tau_{yz} \hat{j} + \tau_{zz} \hat{k} \end{bmatrix}$$

점성응력은 비압축성의 가정에 의하여 발산항을 제거하면 다음과 같다.

$$\tau_{xx} = 2\nu u_x, \quad \tau_{yy} = 2\nu v_y, \quad \tau_{zz} = 2\nu w_z$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \nu(u_y + v_x), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \nu(u_z + w_x)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \nu(v_z + w_y)$$

식 (2)와 같은 형태의 Navier-Stokes 방정식은 쌍곡선형 방정식 특성을 갖게되어 발달된 압축성유동 해석 알고리즘을 이용할 수 있다. 이것은 특히 수렴해를 구하는데 있어 인공압축성 알고리즘의 큰 장점이라 할 수 있다. 수렴해를 얻기위해 이산화된 식은 시간전진법과 같은 개념으로 반복계산된다. 시간변수는 물리적 의미보다 단지 가상적인 시간 혹은 반복계산의 매개

변수로 생각할 수 있다.

### 2.2 수치해법

임의의 셀(사면체, 프리즘, 피라미드, 육면체 등)로 이루어진 격자계에서 격자점을 공유하고 있는 셀을 이용하여 셀의 중점, 면의 중점, 모서리의 중점 들을 차례로 이어 검사체적을 재구성한다. 이것을 메디안 셀(median cell)이라고 부르며 유한체적법을 적용시키는 기본 요소이다.

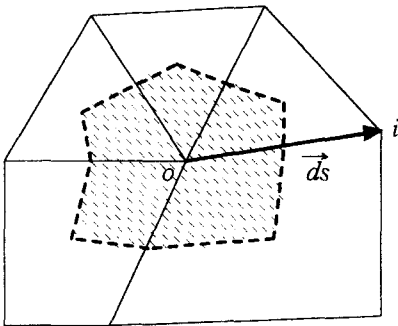


Fig. 1 Median dual control volume and edge direction vector on a hybrid mesh

이 방법은 단순히 사면체로 구성된 비정렬 격자뿐만 아니라 비정렬 혼합격자(Unstructured hybrid grid)에서도 적용이 가능하다. 지배방정식의 적분형태는 다음과 같은 이산화식으로 표현할 수 있으며 식(3)을 각각의 검사체적에 적용시켜 수치계산을 수행한다.

$$\frac{d}{dt}(Q_o V_o) + \sum_{i=1}^{N_o} (\vec{F} - \vec{F}_i) \cdot \vec{S}_i = 0 \quad (3)$$

식 (3)의 하첨자  $i$ 는 모서리에 의해 격자점  $o$ 에 연결된 이웃하는 임의의 격자점을 나타내고  $\vec{S}$ 는 셀 면(control face)의 면적벡터이다. 대류항은 MUSCL법을 이용한 2차 정확도의 Roe 플럭스로 이산화하며, 점성항은 임의의 셀에서도 이산화가 가능한 방법으로 중앙차분한다. 시간에 대해서 Euler 음해법을 이용하면 블록 매트릭스(Block matrix)형태의 이산방정식이 생성되며, 이것은 Jacobi법을 이용하여 해를 구한다.

#### 2.2.1 비점성 플럭스 계산

대류 플럭스는 다음과 같이 셀 경계면을 따라 차분된 형태로 표현할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{N_o} \vec{F}_i \cdot \vec{S}_i = \sum_{i=1}^{N_o} \phi(Q_o, Q_i, \hat{n}) S_i \quad (4)$$

$N_o$ 는  $o$ 점을 공유하는 모서리의 수이고  $\phi$ 는 셀 경계면에서 계산한 수치 플럭스이다.

셀 경계면에서 플럭스를 계산하는 방법은 중앙차분법과 흐름차분법으로 크게 나눌 수 있다.

본 연구에서는 해의 정확도와 수렴안정성을 위하여 Roe[11]의 플럭스를 사용하였다.

#### Roe의 플럭스

대류 플럭스는 해의 비선형성에 의한 진동을 막기 위해 흐름차분법의 일종인 플럭스 차분분할법을 이용해 구한다.

$$F_i = 1/2 [F(Q_l) + F(Q_r) - |A| (Q_r - Q_l)] \quad (5)$$

$Q_l$ 과  $Q_r$ 은 셀 면의 왼쪽과 오른쪽의 상태를 나타내는 유동변수이다.  $|A|$ 는 비점성 플럭스벡터의 특성벡터 행렬을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$|A| = [R] |A| [L] \quad (6)$$

$[R]$ 과  $[L]$ 은 플럭스 벡터의 자코비안 행렬  $[A]$ 를 상사변환하여 얻은 특성벡터 행렬이고,  $[A]$ 는 특성값 행렬이다. Roe의 평균공식 대신 산술평균을 이용하여 구한 셀 면 위에서의 변수 값으로부터  $|A|$ 를 계산한다. Rogers[12]나 Taylor[13] 등이 특성벡터를 유도하였으며 본 연구에서는 Rogers의 식을 이용하였다. 이 자코비안은 셀 면에 수직인 단위벡터뿐만 아니라 면에 접하는 2개의 접선 단위벡터를 필요로한다. 구조격자에서는 기존의 좌표선을 사용하여 접선 단위벡터를 정의 할 수 있으나 비정렬격자에서는 그런 방향성이 존재하지 않으며, 그대신 Gram-Schmidt 방법[14]을 이용하여 셀면에 접선벡터를 정의할 수 있다.

#### 고차정확도의 대류 플럭스 계산

$Q_l$ 과  $Q_r$ 의 값으로서 좌우의 격자점의 값 즉 셀의 평균값을 이용한다면 1차 정확도의 수치

플럭스를 구한 것이 된다. Barth[15]가 제안한 방법으로 각 셀에서 변수의 선형변화를 가정하고 그 셀에서의 변수구배를 구한다면 고차정확도 수치 플럭스를 계산할 수 있다. 셀 중심( $x_0, y_0$ )을 기준으로 경계의 값은 다음과 같이 Taylor series를 이용하면:

$$Q(x, y) \approx Q(x_0, y_0) + \nabla Q_0 \cdot \Delta r \quad (7)$$

격자점에서 해의 구배를 구하는 방법으로 Green-Gauss 정리를 이용하는 방법, 최소자승법(least-square method)을 이용하는 방법 등이 있다. 본 연구에서는 최소자승법만을 사용하였다.

### 2.2.2 점성 플럭스 계산

점성 플럭스는 다음과 같이 유동변수와 변수의 1차 도함수로 표현된다.

$$F_v = F_v(Q, \nabla Q) \quad (8)$$

구조격자에서는 일반적으로 유한차분법을 이용하여 셀 면에서 해의 구배를 쉽게 얻을 수 있다. 다른 방법으로 셀 면을 중심으로 새로운 검사체적을 구성한 뒤 Green-Gauss 정리에 의해 해의 구배를 얻어내기도 한다. 일반적으로 비정렬의 격자에서는 셀 면에서 해의 구배를 구하는 것이 단순하지 않고 부가적인 격자자료를 필요로 한다. 가장 간단히 셀 면에서 해의 구배를 구하는 방법은 고차의 대류플럭스를 계산하기 위하여 구한 셀의 구배(셀 면에 이웃하는 두 격자점에 저장된 값)를 산술평균하여 사용하는 경우가 있는데 이방법은 여러 수치실험을 통해 정확도에서는 다른 방법과 유사하거나 차이가 없으나 셀의 크기가 유사하고 찌그림짐이 없는 정규 격자에서 격자점의 분리현상(grid decoupling) [16]으로 인하여 해가 불안정해진다. Barth[17]는 사면체로 이루어진 비정렬격자에서 Galerkin 유한요소법이 격자점을 중심으로하는 유한체적법과 일치함을 보이고 유한요소법을 이용하여 점성플럭스를 구하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 계산의 측면에서 효율적이나 혼합형의 비정렬격자에서는 사용할 수 없다. Nakahashi[5]는 모서리(node-centered 기법에서는 모서리의

중심이 셀 면의 중심으로 사용된다.)에서 그 모서리를 공유하는 각요소의 구배를 체적 가중 평균하여 얻었다.

$$\nabla Q_E = \frac{1}{Vol_E} \sum_{\alpha \in E} \nabla Q_\alpha Vol_\alpha \quad (9)$$

침자 E는 모서리(edge)를, e는 요소(element)를 나타낸다. 비슷한 방법으로 Kallinderis[6]는 모서리를 공유하는 셀로 검사체적을 만들어 모서리 중심에서의 해의 구배를 계산하였다. 이 방법들은 cell-to-node, cell-to-edge 등의 부가적인 격자연결자료를 필요로 한다.

여기서는 해의 구배를 모서리 방향의 성분은 직접 차분한 값을 사용하고 나머지 성분은 두 격자점의 평균 값으로 처리하였다.

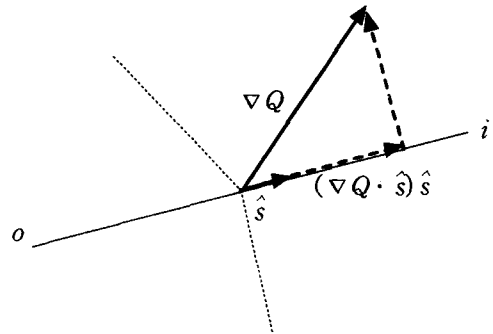


Fig. 2 Splitting of the gradient on the control face

$$\begin{aligned} \nabla Q &= (\nabla Q \cdot \hat{s}) \hat{s} + [\nabla Q - (\nabla Q \cdot \hat{s}) \hat{s}] \\ &\approx (\overline{\nabla Q} \cdot \hat{s}) \hat{s} + [\overline{\nabla Q} - (\overline{\nabla Q} \cdot \hat{s}) \hat{s}] \quad (10) \\ &= \frac{(Q_i - Q_o)}{ds} \hat{s} + [\overline{\nabla Q} - (\overline{\nabla Q} \cdot \hat{s}) \hat{s}] \end{aligned}$$

여기서  $\hat{s}$ 는 모서리 방향의 단위 벡터이고,  $ds$ 는 그 길이를 나타낸다.  $\overline{\nabla Q}$ 는  $(\nabla Q_o + \nabla Q_i)/2$ 이다. 이 식은 점성플럭스에서 가장 큰 부분인 주확산항을 모서리 방향으로 직접 차분함으로써 점성항의 정특성(positivity)을 만족시키고 격자점의 분리현상(grid decoupling)을 배제시킬 수 있다. 셀 면에서의 해의 구배를 구하기 위하여 단순히 두 이웃하는 셀에서의 해 구배를 평균하는 방법(method 1)과 식 (10)을 이용하였을 때

(method 2) 해와 수렴 특성을 비교하기 위하여 2차원 열전도 방정식을 해석하였다.

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (11)$$

식 (11)은 Euler 음해법과 point-Jacobi를 이용하여 계산하였으며 계산영역은 1×1의 정사각형이고 경계조건은 위쪽 벽면이 T=1 이고 그외는 0이다. Fig. 3의 (a)는 사용된 격자로 거의 같은 크기의 정삼각형으로 이루어져 있다. Method 1은 method 2에 비하여 수렴성이 매우 취약함을 볼 수 있으며 등온선도에서 볼 수 있는 바와 같이 method 1을 이용한 경우 해는 많은 지그재그를 포함하고 있으나 method 2는 아주 깨끗한 해를 만들어냄을 알 수 있다.

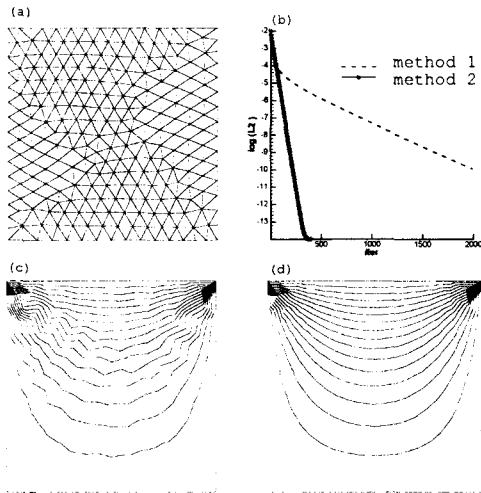


Fig. 3 Comparison of two different methods to calculate gradient on control face with heat conduction equation (a) regular triangular grid, (b) convergence rates, (c) temperature contours with method 1, (d) with method 2

### 2.2.3 시간 적분

시간에 대해서는 Euler 음해법을 이용하여 이산화한다.

$$\frac{d}{dt}(Q_o V_o) + R_o^{(n+1)} = 0 \quad (12)$$

$$R_o^{(n+1)} = \sum_{i=1}^N [F_i^{(n+1)} S_i - F_{Vi}^{(n+1)} S_i]$$

n+1 단계에서의 잔류오차는 Taylor series를 이용하면 다음과 같이 선형화시킬 수 있다.

$$R_o^{(n+1)} = R_o^n + \left(\frac{\partial R_o}{\partial Q}\right)^n \Delta Q \quad (13)$$

식 (12)에 (13)을 대입하고 시간중분 혹은 반복 계산에 의한 수정값 ΔQ로 정리하면 델타형(delta form)의 이산화 방정식을 얻는다.

$$\left(\frac{V_o}{\Delta t} [I] + \left(\frac{\partial R_o}{\partial Q}\right)^n\right) \Delta Q = -R_o^n \quad (14)$$

대류항의 자코비안은 1차 정확도만을 고려하고, Roe 자코비안 행렬은 상수라 가정하여 근사적인 대류 플럭스 자코비안을 계산한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_o}{\partial Q_o} &= \frac{1}{2}(A_i + |A|) \\ \frac{\partial F_o}{\partial Q_i} &= \frac{1}{2}(A_r - |A|) \end{aligned} \quad (15)$$

점성 플럭스에 대해서는 라플라스 형의 점성 플럭스만을 고려하고 식 (10)의 두째 항을 무시하고 대입하여 정리하면

$$\sum F_v^x \approx \sum \mu \nabla u \vec{A} \approx \sum \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial s} \frac{ds}{ds}\right) \vec{A} \quad (16)$$

이 되고, 결국 점성 플럭스의 자코비안은 식 (16)에서 δQ를 제외한 계수로 이루어진 대각 행렬이 된다.

### 2.2.4 이산화방정식의 해법

이산화방정식 (14)의 좌변은 매우 성긴 구조를 갖고 각각의 요소는 4X4의 행렬로 이루어져 있어서 구조격자에서 많이 사용되고 주기억장소의 사용에서 효율적인 TDMA 등과 같은 방법은 사용할 수 없다. Frink[18] 등은 Jacobi, Gauss-Siedel 방법 등을 이용하여 해를 구하였으며, 각 시간 단계에서 매트릭스 계산을 위해

보통 10-20번의 내부 반복계산을 하였다. 식 (14)의 좌변행렬은 대각성분과 나머지로 나누어 표현할 수 있다.

$$(D + L + U)\Delta Q = RHS \quad (17)$$

Jacobi 법은 다음과 같이 대각행렬만 남기고 나머지 부분은 우변으로 넘김으로써 셀간의 연결성을 제거하는 방법이다.

$$D\Delta Q_o = RHS - (L + U)\Delta Q_i \quad (18)$$

본 연구에서는 각각의 모서리에서 2 개의 플릭스 자코비안  $A^+$ ,  $A^-$ 를 구한 뒤 내부반복계산에서 이용하였으며 20번의 내부반복을 수행하였다.

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 원호형 돌출이 있는 채널내 유동

10% 두께의 돌출이 있는 채널 내부를 비점성 비압축성의 유체가 흘러가면 돌출의 앞전과 뒷전에서 정체압이 형성되고 돌출의 표면에서 유체가 가속 및 감속된다. 이론적으로 유동에너지는 손실없이 보존되나, 수치해석 기법의 계산 오차에 의하여 유동값은 돌출을 중심으로 앞뒤가 대칭을 이루지 못하며 그 크기를 이용하여 수치 해법의 정확도를 평가할 수 있다. Fig. 4는 사용된 격자를 보여주는 것으로 먼저 2차원에서 삼각격자를 생성한 뒤 유동에 수직한 방향으로 적층하여 프리즘을 생성하였다. 2차원 삼각격자의 수는 2200개이며 프리즘의 수는 22000개이다. 그리고 사용한 격자점의 수는 12895개이다.

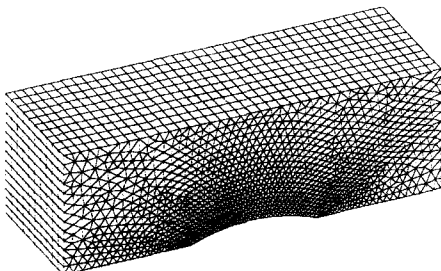


Fig. 4 Surface mesh of a channel with 10% arc bump, npoin=12859, npri=22000

일반적으로 대칭인 압력장은 쉽게 얻을 수 있으므로 수치해의 정확도를 판단하는 데는 도움이 되지 못하며, 주유동방향 속도성분(u 속도)의 분포를 통해 수치오차의 크기를 평가할 수 있다.

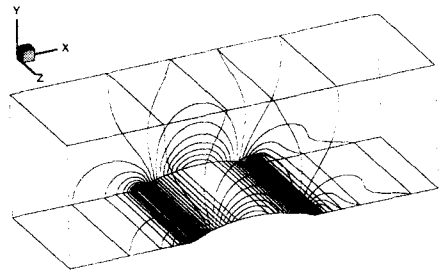


Fig. 5 U-velocity contours for incompressible inviscid flow through a channel with 10% arc bump

Fig. 5에서 볼 수 있는 바와 같이 u 속도가 돌출을 전후로 거의 대칭적으로 분포되어 있고 z 축방향으로는 속도변화가 없는 2차원 유동임을 알 수 있다. Fig. 6은 채널 유동에 대한 비압축성 코드의 수렴 특성을 보여주는 것으로 음해법의 빠른 수렴특성을 알 수 있다. CFL 값은 초기 100번 반복 계산중에 1부터  $10^8$ 까지 증가시켰다.

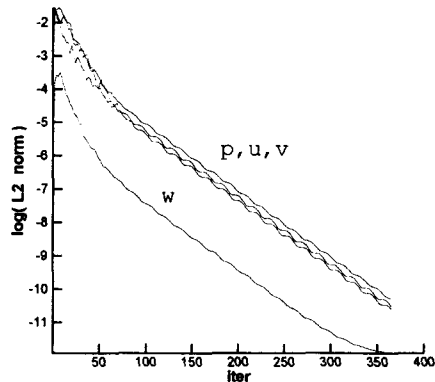


Fig. 6 Convergence rates for incompressible inviscid channel flow.

#### 3.2 3차원 원주 주위의 점성유동

직경이 1이고 길이가 2인 원통 주위의 낮은 레이놀즈 수 유동에 대하여 해석하였다. 먼저 2

차원 원주에 대하여 삼각형과 사각형으로 구성된 격자를 생성한 뒤 원주의 축방향으로 적층하였다. 2차원에서 격자점 수는 9143개이며, 삼각형은 15389개, 사각형은 1341개이다. 길이방향(z 방향)으로 11개의 격자점을 등간격으로 분포시켰다. 그리고 원주의 양 끝단에서 z 축 방향의

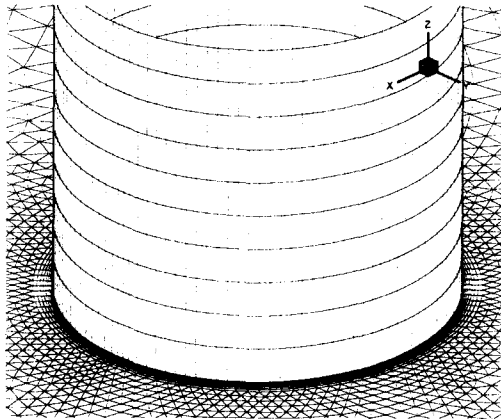


Fig. 7 Mixed element grid around a circular cylinder, npoin=100573, npri=153890, nhex=13410

속도성분  $w$ 를 0으로 하는 대칭조건을 주었다. 레이놀즈 수가 40인 경우 유동은 정상상태이며 원주 뒤에 발생하는 와동은 이탈하지 않고 벽면에 부착되어 있다. Fig. 8은  $z=1$ 인 원주의 중간 단면에서 압력장을 보여준다. 벽면에서 등압력 선도가 찌그러짐 없이 이어져 있고, 원주 후류

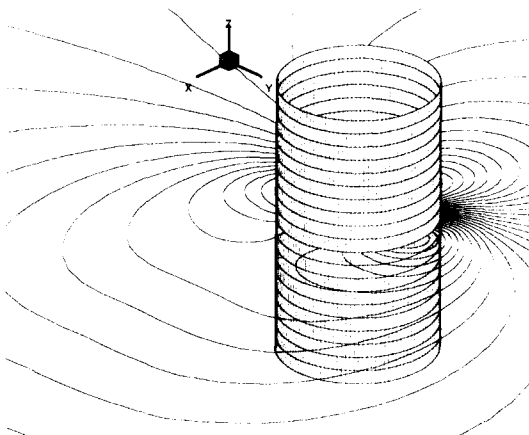


Fig. 8 Pressure contours for incompressible laminar flow around a circular cylinder at  $z=1$ ,  $Re_D = 40$

에서 와도에 의해서 압력이 구배가 작음을 알 수 있다. Fig. 9는 같은 단면에서 속도장을 나타낸 것으로, 1쌍의 대칭적인 와동이 원주 후류에 존재함을 볼 수 있다.

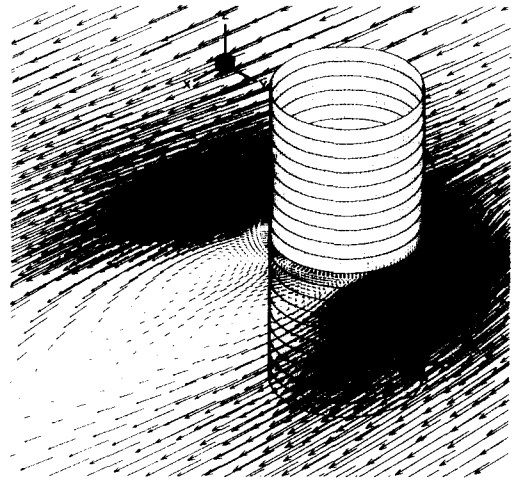


Fig. 9 Velocity vectors for incompressible laminar flow around a circular cylinder at  $z=1$ ,  $Re_D=40$

Coutanceau 등[19]은 원통형 수조에서 원주를 일정속도로 이동시키면서 후류의 속도와 박리길이 등을 측정하였으며 수조의 벽면효과를 고려하기 위하여 원주직경( $d$ )과 수조의 직경( $D$ )을 이용하여 매개변수  $\lambda (=d/D)$ 를 정의하였다. Fig. 10은 실험치와 2차원 및 3차원의 계산결과를 비교한 것으로, 2차원 결과는  $z=1$ 인 단면에 서의 결과

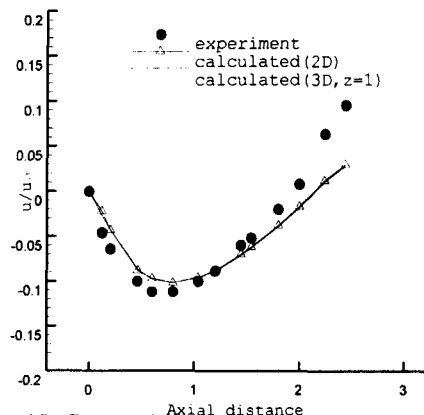


Fig. 10 Comparison of computed and experimental wake centerline velocities,  $Re_D=40$

와 일치하는 것을 볼 수 있으며 실험치와는 약간의 차이를 보이고 있다. 실험치는  $\lambda$ 가 0.07일 때의 값으로 2 개의  $z$  평면에서 미끄럼 조건을 사용하여 계산한 값과 차이가 있는 것은 당연하다. Coutanceau 등은  $\lambda$ 에 따른 박리길이 변화를 고찰하고 원주 길이가 무한대( $\lambda=0$ )인 경우에 대하여 박리길이를 2.13으로 추정하였으며, Fig. 10의 계산값은  $u/u_{in}$  이 0인 점이 2.13으로 일치하고 있다.

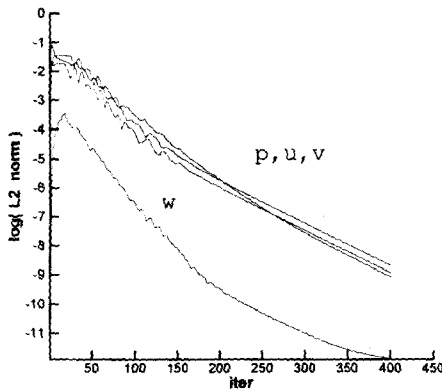


Fig. 11 Convergence rates for incompressible laminar flow around circular cylinder,  $Re_D=40$

Fig. 11에서 원주 유동에 대한 수렴성을 볼 수 있으며 사용된 CFL은 500이었다.

### 3.3 3차원 구 주위의 점성유동

Taneda[20]는 실험을 통하여 레이놀즈 수가 20이하인 구 주위의 유동에서는 박리가 발생하지 않으며, 20에서 40사이의 레이놀즈 수에서 정상상태의 박리가 발생하고 40이상에서는 후류에 진동이 발생하는 것을 알았다. 유체공학과 환경공학 등에서 관심이 많은 입자나 액적 등은 구형이라고 가정할 수 있으며 이 구 주위의 정상 및 비정상 상태의 유동에 대한 고찰은 입자의 거동에 관한 많은 자료를 제시해줄 수 있을 것이다.

본 연구에서는 수치해석기법의 검증을 위하여 구 주위의 레이놀즈 수가 50, 75, 100인 비압축성 점성 유동을 해석하였다. 먼저 완전한 구 표면에 6416개의 삼각격자를 생성한 뒤 반경방향으로 40개의 격자점을 적층하여 250224개의 프

리즘을 생성하였다. Fig. 12는 구 표면과  $z=0$ 인 단면에서의 격자를 보여준다.

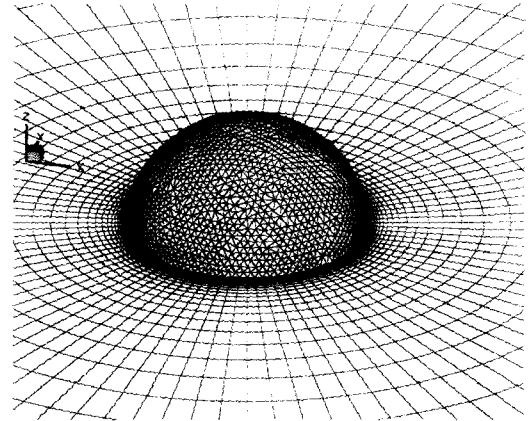


Fig. 12 Prismatic grid around sphere,  $n_{poin}=128400$ ,  $n_{pri}=250224$

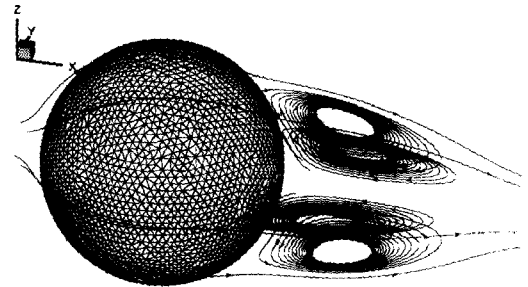


Fig. 13 Streamlines to show the recirculating wake behind a sphere at  $Re_D=100$

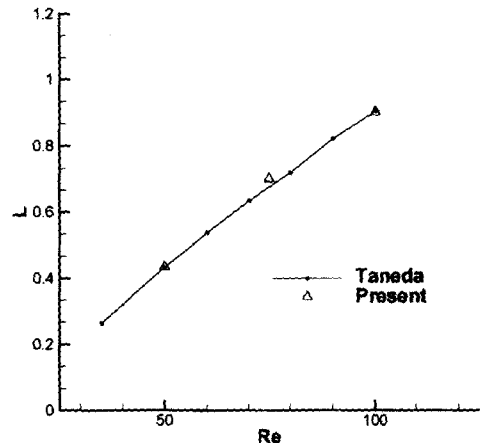


Fig. 14 Comparison of the variation of eddy length



구 표면에서 고리모양의 박리와(vortex ring)가 생성되고 구 후미에서는 Fig. 13에서 볼 수 있는 것 처럼 와동이 벽면에 부착되어 있다. 그리고 수치해석으로 구한 후류와의 길이를 Fig. 14에서 Taneda의 실험치와 비교하였다. Fig. 11은 구 주위의 유동에 대하여 수렴특성을 보여주며, 펜티엄(300Mhz) PC에서 177분이 소요되었다. 수치계산은 실수 8바이트를 사용하였고 CFL은 100이었다.

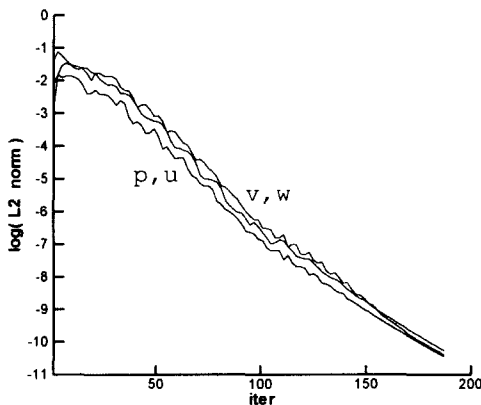


Fig. 15 Convergence rates for incompressible laminar flow around a sphere,  $Re_p=100$

#### 4. 결론

비정렬 혼합격자를 사용한 비압축성유동 해석 기법을 개발하였으며, 비점성의 채널 유동, 3차원 원주 주위 및 구 주위의 점성유동을 해석하여 정확도와 수렴성을 보였다. 프리즘을 벽면 근처에 적응함으로써 종횡비가 크면서 찌그러짐이 없는 격자를 생성할 수 있으며 격자의 모서리 수를 줄여 계산의 효율을 높일 수 있었다. 앞으로 난류 모델을 도입함으로써 이 해석 기법의 활용성을 높일 수 있을 것이다.

#### 참고문헌

[1] Pirzadeh, S., "Three-Dimensional Unstructured Viscous Grids by the Advancing Layer Method," AIAA J., Vol.34, No.1 (1996), pp.43-49

[2] Barth, T.J., "Numerical Aspects of Computing Viscous High Reynolds Number Flows on Unstructured Meshes," AIAA paper 91-0721 (1991)

[3] Michal, T. and Johnson, J., "A Hybrid Structured/Unstructured Grid Multi-Block Flow Solver for Distributed Parallel Processing," AIAA paper 97-1895 (1997)

[4] Soetrismo, M. Imlay, S.T., Robert, D.W., "A Zonal Implicit Procedure for Hybrid Structured-Unstructured Grids," AIAA paper 94-0645 (1994)

[5] Nakahashi, K., "Adaptive-Prismatic-Grid Method for External Viscous Flow Computations," AIAA paper 93-3314 (1993)

[6] Kallinderis, Y., Khawaja, A., McMorris, H., "Hybrid Prismatic/Tetrahedral Grid Generation for Complex Geometries," AIAA paper 93-0669 (1993)

[7] Karman, S., "SPLITFLOW: A 3D Unstructured Cartesian/Prismatic Grid CFD Code for Complex Geometries," AIAA paper 95-0343 (1995)

[8] Coirier, W.J. and Jorgenson, C.E. "A Mixed Volume Grid Approach for the Euler and Navier-Stokes Equations," AIAA pper 96-0762 (1996)

[9] Strang, W.Z., "Cobalt User's Manual," WL/FIMC WPAFB, OH 45433 (1995)

[10] Chorin, A.J., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," Math. Comp., Vol.22, No.104, (1968), pp.745-762

[11] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solver, Parameter Vectors and Difference Scheme," J. of Comp. Phys., Vol.43, (1979), pp.357-372

[12] Rogers, S.E., and Kwak, D, "Steady and Unsteady Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations." AIAA J., Vol.29, No.4 (1991), pp.603-610

[13] Taylor, L.K., "Unsteady Three-dimensional Incompressible Algorithm Based on Artificial Compressibility," Ph.D. Disserta-

- tation, Mississippi State Univ. (1991)
- [14] Anderson, W.K., Private Communication, (1997)
- [15] Barth, T.J., "A 3-D Unwind Euler Solver for Unstructured Meshes," AIAA paper 91-1548 (1991)
- [16] Sharov, D., and Nakahashi, K., "Reordering of 3-D Hybrid Unstructured Grids for Vectorized LU-SGS Navier-Stokes Computations," AIAA-97-2102 (1997)
- [17] Barth, T.J., "Aspects of Unstructured Grids and Finite-Volume Solvers for the Euler and Navier-Stokes Equations," AGARD Report R-787 (1992)
- [18] Frink, N.T., "Recent Progress Toward a Three-Dimensional Unstructured Navier-Stokes Solver," AIAA paper 94-0061 (1994)
- [19] Coutanceau, M., and Bouard, R., "Experimental Determination of the Main Features of the Viscous Flow in the Wake of a circular Cylinder in Uniform Translation," J. Fluid Mech., Vol.79, No.2, (1977), pp231-256
- [20] Taneda, S., "Experimental Investigation of the Wake behind a Sphere at Low Reynolds Numbers," J. Phys. Soc. Japan Vol.11, (1956), pp1104-1108