經營科學 第15卷 第1號
1998年 5月

수요가 불확실한 경우의 장소입지 결정모형 연구*

이상진**

A Study of Facility Location Model Under Uncertain Demand*

Sang Jin Lee**

ABSTRACT

The facility location problem considered here is to determine facility location sites under future's uncertain demand. The objective of this paper is to propose a solution method and algorithm for a two-stage stochastic facility location problem, utilizing the Benders decomposition method.

As a two-stage stochastic facility location problem is a large-scale and complex to solve, it is usually attempted to use a mean value problem rather than using a stochastic problem. Thus, the other objective is to study the relative error of objective function values between a stochastic problem and a mean value problem. The simulation result shows that the relative error of objective function values between two problems is relatively small, when a feasiblity constraint is added to a facility location model.

1. 서 론

선형계획문제를 이용하여 공급입지를 결정하고자 할 때, 시간이 지남에 따라 공급입지와 수요지간의 수송비용 등 목적함수의 파라미터 뿐만 아니라 우변상수인 수요지에서의 미래의 수요가 변화할 가능성이 많다. 미래의 수요가 결정적(deterministic)이라면 공급입지결정에 필요한 모든 정보가 계획시점에 이용가능하기 때문에 2단계 동적선형계획문제로 형성하여 입지를 결정할 수 있을 것이다. 그러나 미래의 수요가 불확실하다면 이를 고려하지 않고 입지를 결정했을 경우 여러 가지 문제가 발생할 수 있다. 결정적인 수요예측값으로 결정된 입지가 건설된 이후, 다음 단계에서 수요가 예측값보다 크게 변화한다면 입지폐쇄(closing), 재입지(relocating), 또는 규모변동(resizing)을 해야 하기 때문이다. 만약 이러한

* 이 논문은 1996년도 한국학술지흥재단의 공목과제 연구비에 의하여 연구되었음.
** 국방대학원 국방관리처 부교수

경우가 발생하여도 수반되는 비용이 상대적으로 작다면 각 단계에서 결정적 선형계획법을 이용하여 입지를 결정한다 하더라도 별 문제가 되지 않을 것이다. 현재의 입지를 미래에 쉽게 변동하기에는 비용이 과다하게 소요되거나 혹은 건설기간이 상당한 경우, 공급입지결정은 신중하여 질 수 밖에 없으며 이 경우 확률적 선형계획(stochastic LP)모형[2,8]을 활용할 필요가 있다.

불확실성을 고려한 경우 모든 정보가 계획시점에 다 이용가능하지 않기 때문에 일부 불확실한 파라미터는 확률변수로 고려하여 확률적 선형계획문제로 형성할 수 있다. 이 경우 미래시점까지 결정을 연기할 수 없는 변수만을 오직 현재 1단계에서 계획하고 나머지 변수들은 미래의 더 나은 정보가 이용가능한 2단계까지 결정이 연기될 것이다. 공급입지결정모형에서 공급입지는 현재 1단계에서 결정되어져야 하나 공급입지로부터 수요지까지의 수송할당량(공급량)은 미래의 수요나 변동비용이 알려진 2단계에서 의사결정을 행할 수 있다. 수요량이라는 정보는 시간이 지남에 따라 이용가능하기 때문에 불확실한 수요하의 공급입지결정문제는 2단계 확률적 선형계획문제로 형성할 수 있다. 2단계 확률적 LP모형에서 공급입지는 미래 수요가 불확실한 경우라도 현재 1단계에서 결정해야 하나 나머지 수송 할당변수는 2단계에서 결정한다.

입지를 확률적 선형계획문제로 형성하면 문제가 대규모화 되기 때문에 기존의 혼합정수계획 알고리즘으로는 문제를 해결할 수 없으며 대규모의 혼합정수계획문제의 해를 구하기 위하여 벤더즈 분해기법[1,3,9]을 활용할 수 있다. 분해기법은 그 해결과정이 복잡하고 계산 시간이 상당히 소요되는 등의 문제점으로 실무자들은 확률적 선형계획문제를 회피하고 대신 결정적 선형계획문제 혹은 민감도 분석을 통해 변화하는 환경의 영향력을 평가하고 있다.[5,8,10] 즉, 불확실한 파라미터인 수요량 대신 이의 기대값을 구하여 결정적 선형계획문제의 우변상수로 활용하고 있다. 기대값을 이용한 기대값 문제(mean val-ue problem)는 규모가 단순화되어 해를 구하기에 아주 용이하지만 이 해가 최적해가 아닐 수 있다. 일반적 확률적 선형계획문제와 기대값 문제의 최적값간의 오차에 대한 관계와 성질(property)에 대해서는 Madansky [10]와 Birge[5] 등의 연구가 있다. 이들 연구는 일반적인 확률적 선형계획문제와 기대값 문제의 최적값간의 관계를 연구하고 있으며, 또한 실험문제에 대한 컴퓨터 실행을 수행하지 않고 있어 오차차이에 대한 실행결과를 보여주지 못하고 있다.

이 논문의 목적은 첫째, 수요가 불확실한 경우의 최적의 공급입지 결정을 위한 확률적 선형계획문제의 최적해를 구하는 과정을 분해기법을 통해 유도하고 이의 알고리즘을 제시하고자 한다. 둘째, [5,8,10]에서 제시한 일반적인 확률적 선형계획문제와 기대값 문제의 최적값과의 오차 관계를 공급입지결정의 혼합정수계획문제에 적용한 경우에 대하여 연구하고자 한다. 수요가 불확실한 경우의 공급입지 결정은 혼합정수계획문제를 활용하는데, 이 경우 입지변수로 정수를 사용함으로 일반적인 확률적 선형계획문제의 오차관계와는 다른 성질이 있다. 마지막으로, 파라미터의 변화에 따른 민감도 분석을 실시하고자 한다. 변동비용과 고정비용과의 비율차이[1,12]와 총수요량과 총공급량의 비율차이가 알고리즘의 성과와 공급입지결정에 어떠한 영향을 미치는 지를 알아보기 위해 컴퓨터 실험을 실시하고자 한다.

이 논문의 2절에서는 분해기법을 적용한 최적해를 유도하는 과정과 알고리즘을 살펴보고 3절에서는 기대값 문제와 확률적 선형계획문제의

최적값 차이의 오차에 대한 관계를 살펴본다. 4절에서는 실험문제에 대하여 민감도 분석 즉, 변동비용과 고정비용의 비율차이와 총수요량과 총공급량의 비율차이에 대한 시뮬레이션을 실시하며 마지막으로 5절에는 결론이다.

2. 수학적 모형과 해법

2.1. 수학적 모형

기본적인 공급입지모형에서 수요가 불확실한 경우에는 우변상수가 확률변수가 되며 이 경우의 공급입지문제는 다음과 같이 수학적으로 2단계 확률적 선형계획문제로 형성할 수 있다. 이 모형은 참고문헌 [11, pp. 208-209]의 모형과 유사하나 수요가 불확실함으로 여기에 따른 확률변수(random variable)가 추가되었다.

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i\in I} f_i y_i + E_\omega[\min \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}] \\ &\text{s.t.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1) \\ &\qquad \textstyle\sum_{i\in I} x_{ij} \ge d_j(\omega) \quad \forall j\in J \\ &\qquad \textstyle\sum_{j\in J} x_{ij} \le s_i y_i \quad \forall i\in I \\ &\qquad x_{ij}\ge 0,\ y_j \in \{0,1\}, \forall i\in I,\ j\in J \end{aligned}$$

여기서 $i(i=1,\cdots,m)$와 $j(j=1,\cdots,n)$는 각각 예상공급입지와 수요지를 의미한다. c_{ij}는 각각 공급입지 i로 부터 수요지 j까지 수송할 때의 변동비를 의미하며 f_i의 값은 예상공급입지 i에 입지를 건설할 때의 고정비용이다. c_{ij}, f_i와 s_i의 값은 공급입지를 결정하는 시점에 알려져 있으나, 우변상수 중 수요지에서의 수요 $d_j(\omega)$는 공급입지 결정시점에 불확실하며 확률변수 ω는 확률공간(probablility space) Ω에 의해 정의된다. 입지 i가 공급지로 결정된다면 이산변수 y_i의 값은 1이 될 것이고 그렇지 못하다면 이 값은 0이 될 것이다. 첫 번째 제약조건식은 각 수요지에서의 불확실한 수요량을 충족시켜야 한다는 것이고, 두번째 제약조건식은 공급지 i에 설비를 건설한다면 공급지 i에서의 공급량은 s_i이하이며 공급지 i에 설비를 건설하지 않는다면 공급량은 0이라는 것이다. 문제 (1)에서 해를 언제나 구할 수 있는 것은 아니며 총수요량이 총공급량보다 작거나 같아야 문제 (1)은 실행가능하다.

문제 (1)에서 수요량만이 불확실함으로 확률변수는 $\omega = \{d_j\}$ 뿐이다. 이 확률변수는 특정 확률밀도함수에 따라 연속확률분포를 이룰 수 있고 혹은 확률질량함수에 따라 이산확률분포를 이룰 수 있다. 이 논문에서는 다음 (2)와 같이 이산확률변수로 고려하여 문제를 형성하도록 한다. 이산확률분포를 가정하고 문제 형성을 하면 너무 제한적이 되어 연속확률분포를 이루는 문제를 해결할 수 없을 것이라는 우려가 있을 수 있다. 그러나 실제 적용문제의 상당수가 이산확률분포를 가정하고 있고, 또한 무엇보다도 연속확률분포를 가정한 경우라도 문제해법에 있어 근사기법(approximation scheme)[4,13]이나 샘플링기법(sampling technique)[7]과 같이 결국은 문제를 이산화시켜서 해를 구하기 때문에 이산화시키더라도 연속확률변수를 고려할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i\in I} f_i y_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\cdot c_{ij}\cdot x_{ij}(\omega) \\ &\text{s.t.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2) \\ &\qquad \textstyle\sum_{i\in I} x_{ij}(\omega) \ge d_j(\omega) \quad \forall j\in J,\ \forall\omega\in\Omega \\ &\qquad \textstyle\sum_{j\in J} x_{ij}(\omega) \le s_i y_i \quad \forall i\in I,\ \forall\omega\in\Omega \\ &\qquad x_{ij}(\omega)\ge 0,\ y_j \in \{0,1\}, \forall\omega\in\Omega, \forall i\in I, \forall j\in J \end{aligned}$$

문제 (2)에서 수요량의 확률변수인 dj에는 시나리오 $\omega(\omega=1,\cdots,L)$가 L개 발생할 수 있으며 이들 각각의 시나리오의 발생확률은 $p(\omega)$이다. 이들 시나리오 발생확률의 합은 항상 1이다. 시나리오를 고려할 경우 문제의 규모가 상당히 커지게 된다. 수요량이 결정적인 경우, 문제의 크

기는 의사결정변수가 m+(m · n)개이며 제약조건식의 수는 비음 및 정수조건식을 제외하고 m+n개이다. 반면에 수요량이 불확실한 경우, 의사결정변수는 m+(m · n · L)개이며 제약조건식의 수도 (m+n) · L개로 늘어난다. 여기서 L은 이산학률변수의 개수 혹은 연속확률분포일 경우에는 표본의 개수이다. 예를 들어, 확률변수에 대한 샘플링을 1000개로 하면 제약조건식과 의사결정변수의 수가 결정적 LP모형보다 거의 1000배 가까이 증가하게 되어 대규모의 문제가 된다. 확률적 LP문제는 결정적 LP문제보다 수요확률변수에 대한 샘플링의 수 즉, 표본의 크기에 비례하여 문제의 규모가 커지게 된다.

2.2. 분해해법

대규모의 문제를 풀기 위해서 완화기법(relaxation method)의 하나인 벤더즈 분해기법을 활용할 수 있다. 벤더즈 분해기법의 아이디어를 장소입지문제의 2단계 확률적 선형계획문제에 적용하면 다음과 같다. 1단계 입지변수를 결정하는 주문제(master probblem)와 2단계 시나리오에 따른 할당변수를 결정하는 하위문제들(subproblems)로 구분한다. 먼저 1단계 의사결정변수인 y_i를 특정한 값으로 고정하여 이 고정된 값으로 하위문제의 우변상수를 수정한다. 수정된 하위문제의 최적해와 쌍대값을 구하며, 쌍대값을 이용하여 새로운 제약조건식을 만들어 주문제에 첨가한다. 첨가된 주문제를 풀어 이전의 고정된 입지변수값보다 더 나은 값을 얻는다. 새로이 고정된 값으로 하위문제의 우변상수를 수정하고 하위문제를 풀어 쌍대값을 구하며 이를 이용하여 주문제에 새로운 제약조건식을 첨가한다. 이와 같은 절차를 알고리즘의 종료조건이 충족될 때까지 계속 반복한다.

벤더즈 분해기법을 적용하여 주문제와 하위문제를 유도하여 보자. 문제 (2)에서 1단계 공급입지변수 y_i^*를 고정하면 다음의 하위문제 (3)으로 유도할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \textstyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\cdot c_{ij}\cdot x_{ij}(\omega) \\
\text{s.t.}\quad & & (3) \\
& \textstyle\sum_{i\in I} x_{ij}(\omega) \ge d_j(\omega) \qquad \forall j\in J,\ \forall\omega\in\Omega \\
& \textstyle\sum_{j\in J} x_{ij}(\omega) \le s_i y_i^* \qquad \forall i\in I,\ \forall\omega\in\Omega \\
& x_{ij}(\omega)\ge 0,\ \forall\omega\in\Omega, \forall i\in I, \forall j\in J
\end{aligned}
$$

문제 (3)에는 정수조건이 없으므로 선형계획문제가 되며 또한 하위문제는 시나리오 L개 만큼의 또 다른 하위문제들로 분리할 수 있다. 왜냐하면 문제 (3)에서 각각의 시나리오별로 하위문제들이 서로 독립적으로 존재하고 있기 때문에 문제 (3)은 분해가 가능하다.

문제 (3)에서 장소입지변수 y_i^*의 값이 고정되면 문제 (3)이 실행가능(feasible)할 수 있고 실행불가능할 수도 있다. 어느 특정 반복(iteration)에서 문제 (3)이 실행불가능한 경우, 주문제에 실행가능 절단면(feasibility cut)을 주문제에 제약조건식으로 추가하여 y_i^*를 구함으로 다음번 반복에서 문제 (3)이 실행불가능하지 않도록 한다. 실행가능 절단면을 구하기 위해 복잡한 벤더즈 분해기법의 절차를 활용하여 구하는 방법보다는, 어떤 시나리오 하에서도 수요량의 총합이 공급량의 총합보다 작거나 같다면 언제나 실행가능하다는 성질을 직접적으로 이용할 수 있다. 문제 (3)이 실행가능하기 위해서는 장소입지변수 y_i가 다음의 집합내에 포함되어져야 한다.

$$R = \{y_i \mid \textstyle\sum_{i\in I} s_i y_i \ge \sum_{j\in J} d_j(\omega),\ \omega=1,\cdots,L\} \quad (4)$$

(4)의 조건은 각 시나리오에서 수요량의 총합은 공급량의 총합보다 작거나 같아야 한다는 것

이다. 집합 (4)에서 좌변의 제약조건식이 어떤 시나리오 하에서나 같으므로 이 조건식은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\sum_{i\in I} s_i y_i \geq \max[\{\sum_{j\in J} d_j(\omega)\},\ \omega=1,\cdots,L] \quad (5)$$

제약조건식 (5)를 문제 (2)에 부가하면 문제 (2)는 항상 실행가능하게 된다. 또한 분해해법에 있어 유도할 주문제에 부가하게 되면 주문제에서 결정한 공급입지변수로 하위문제의 우변상수를 수정하여 최적해를 구할 때, 하위문제는 언제나 실행가능하게 된다.

문제 (3)이 실행가능한 경우에는 주문제에서 더 나은 장소입지변수를 구할 수 있도록 최적절단면(optimality cut)을 주문제에 추가한다. 최적절단면을 유도하는 단계의 하나로 하위문제를 다음과 같이 쌍대문제로 변환하여 보자.

$$\max \sum_{j\in J}\sum_{\omega\in\Omega} d_j(\omega)\lambda_j(\omega) + \sum_{i\in I}\sum_{\omega\in\Omega} s_i y_i^{*} \alpha_i(\omega)$$
$$\text{s.t.} \qquad (6)$$
$$\lambda_j(\omega) + \alpha_i(\omega) \leq p(\omega)\cdot c_{ij},\ \forall i,j,\omega$$
$$\alpha_i(\omega) \leq 0,\ \lambda_j(\omega)\text{는 부호 제한 없음},\ \forall i,j,\omega$$

주문제에 제약조건식 (5)를 추가하면 하위문제인 (3)은 언제나 실행가능하게 된다. 문제 (2)는 다음 동등한 문제 (7)로 재형성할 수 있다.

$$\min_{y\in R}\{\sum_{i\in I} f_i y_i + \min\{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\cdot c_{ij}\cdot x_{ij}(\omega) \mid \sum_{i\in I} x_{ij}(\omega) \geq d_j(\omega), \sum_{j\in J} x_{ij}(\omega) \leq s_i y_i^{*},\ x_{ij}(\omega)\geq 0,\ \forall i,j,\omega\}\} \quad (7)$$

하위문제의 원문제가 실행가능이라면 쌍대정리에 의해 하위문제의 쌍대문제도 실행가능이다. 하위문제가 최적값을 갖게 되면 LP의 강쌍대정리에 의하여 쌍대문제 (6)도 같은 최적값을 갖게 된다. 쌍대정리에 대한 논의를 통해서 문제 (7)는 다음 (8)과 같이 완전히 동등한 문제로 재형성할 수 있다.

$$\min_{y\in R}\{\sum_{i\in I} f_i y_i + \max\{\sum_{j\in J}\sum_{\omega\in\Omega} d_j(\omega)\lambda_j(\omega) + \sum_{i\in I}\sum_{\omega\in\Omega} s_i y_i^{*}\alpha_i(\omega) \mid \lambda_j(\omega) + \alpha_i(\omega) \leq p(\omega)\cdot c_{ij},\ \alpha_i(\omega) \leq 0, \forall i,j,\omega\}\} \quad (8)$$

문제 (8)의 내부 최대화 문제의 제약조건집합을 고려해보자.

$$P=\{(\lambda_j(\omega),\alpha_i(\omega)) \mid \lambda_j(\omega)+\alpha_i(\omega)\leq p(\omega)\cdot c_{ij},\ \alpha_i(\omega)\leq 0, \forall i,j,\omega\} \quad (9)$$

문제 (7)의 하위문제가 언제나 실행가능하기 때문에 쌍대문제도 실행가능이다. 즉, 집합 P는 유한개의 꼭지점(extreme points: 정점)을 가진 집합이 되며 이 꼭지점들은 $(\lambda_j^k(\omega),\ \alpha_i^k(\omega), k=1,\cdots,K)$으로 표현할 수 있다. 문제 (8)의 내부 최대화문제 최적해는 이 유한개 꼭지점중 하나가 된다. 이 성질을 이용하여 문제 (8)을 다음 문제 (10)과 같이 표현할 수 있다.

$$\min_{y\in R}\{\sum_{i\in I} f_i y_i + \max\{\sum_{j\in J}\sum_{\omega\in\Omega} d_j(\omega)\lambda_j^k(\omega) + \sum_{i\in I}\sum_{\omega\in\Omega} s_i y_i \alpha_i^k,\ \forall k\}\} \quad (10)$$

문제 (10)은 결과적으로 다음 문제 (P^k)와 동등하다는 것을 알 수 있다.

$$\min\ \theta$$
$$\text{s.t.} \qquad (P^k)$$
$$\theta \geq \sum_{i\in I} f_i y_i + \sum_{j\in J}\sum_{\omega\in\Omega} d_j(\omega)\lambda_j^k(\omega) + \sum_{i\in I}\sum_{\omega\in\Omega} s_i y_i \alpha_i^k(\omega),\ k=1,\cdots,K,$$

$$\sum_{i \in I} s_i y_i \geq \max[(\sum_{j \in J} d_j(\omega)),\ \omega=1,\cdots,L]$$
$$y_j \in \{0,1\},\ \forall i \in I,\ \forall j \in J$$

문제 (P^k)는 "완전 주문제(full master problem)"라 부르며 제약조건식 중 첫 번째는 최적절단면, 두 번째는 실행가능 제약조건식이다. 문제 (P^k)를 풀 때의 최적해는 "실행가능한 문제" (2) (여기서 문제 (2)에 (5)의 제약 조건식이 추가된 문제를 "실행가능한 문제"로 칭한다)를 풀 때의 최적해와 같다. 그러나, 집합 P에서 유한개의 꼭지점을 한꺼번에 모두 알아내기가 어려우며 특히 집합 P의 꼭지점이 아주 많다면 한꺼번에 이 모두를 도출해 내는 것은 거의 불가능하다. 즉, 문제 (P^k)의 첫 번째 제약식($\theta \geq \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J}\sum_{\omega \in \Omega} d_j(\omega)\lambda_j^k(\omega) + \sum_{i \in I}\sum_{\omega \in \Omega} s_i y_i^* \alpha_i^k(\omega)$, $k=1,\cdots,K$)들이 처음부터 명확하게 모두 나타나지 않기 때문에 이들 제약 조건식은 알고리즘을 반복할 때마다 하나씩 유도해 내어야만 한다.

2.3. 알고리즘

문제 (P^k)의 최적해를 구하기 위해 K개의 꼭지점을 모두 구하여야 하는 것은 아니다. 최적해를 구하기 위해 K번의 반복보다 적은 수의 반복으로 최적해를 구할 수 있다. 그러면 언제 이 알고리즘을 종료할 것인지의 조건을 구해야 한다. 종료조건으로는 상한한계값(UB)이 하한한계값(LB)과 ε(Epsilon)을 합한 값보다 작거나 같다는 것을 사용할 수 있다. 여기서 매회 반복마다 수요확률변수를 무작위 샘플링으로 추출한다면 벤더즈 분해기법에서 결정적인 문제에 사용했던 이 종료조건을 이용할 수는 없다.[8] 매회 반복마다 수요확률변수를 독립적으로 추출하지 않고 첫째 반복에서 무작위로 추출한 샘플을 매 반복마다 같은 샘플(common sample)로 사용한다면 종료조건($UB \leq LB + \varepsilon$)을 활용할 수 있다. 이 논문의 목적은 표본의 갯수가 다양한 경우의 실험결과를 비교하는 것이기 때문에 비교의 목적상 같은 샘플을 사용한 경우를 가정한다. 때문에 종료조건으로 위의 종료조건을 사용할 수 있다.

이제 하한한계값과 상한한계값을 어떻게 구하는지 살펴보자. 먼저 하한한계값이 결정되는 과정을 살펴보자. ($\lambda_j^0(\omega)$, $\alpha_i^0(\omega)$)을 집합 P의 실행가능 영역안에 있는 한 점으로 정의하자. 이 점이 꼭 꼭지점이어야 하는 것은 아니며 실행가능 영역내의 어느 점이라도 가능하다. 그렇다면 쌍대문제 (6)으로부터 다음과 같은 결과를 유도할 수 있다.

$$\sum_{j \in J}\sum_{\omega \in \Omega} d_j(\omega)\lambda_j^0(\omega) + \sum_{i \in I}\sum_{\omega \in \Omega} s_i y_i^* \alpha_i^0(\omega) \leq \max\{\sum_{j \in J}\sum_{\omega \in \Omega} d_j(\omega)\lambda_j^k(\omega) + \sum_{i \in I}\sum_{\omega \in \Omega} s_i y_i^* \alpha_i^k(\omega),\ \forall k\} \quad (11)$$

이 결과를 이용하면 제약조건식 ($\theta \geq \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J}\sum_{\omega \in \Omega} d_j(\omega)\lambda_j^0(\omega) + \sum_{i \in I}\sum_{\omega \in \Omega} s_i y_i \alpha_i^0(\omega)$)에서 θ의 값이 다음번 반복에서의 문제 ($P^1$)의 제약조건식 ($\theta \geq \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J}\sum_{\omega \in \Omega} d_j(\omega)\lambda_j^1(\omega) + \sum_{i \in I}\sum_{\omega \in \Omega} s_i y_i \alpha_i^1(\omega)$)에서의 θ의 값보다 작거나 같다는 것을 알 수 있다. 이제 문제 (P^1)의 최적해를 ($\theta^1, y_i^1, \forall i$)라고 하자. 그러면 이에 상응한 하한한계값은 $LB^1=\theta^1$가 되는데 왜냐하면 문제 (P^1)의 제약조건식들은 문제 (P^K)의 제약조건식들의 부분집합이기 때문이다. 즉, k번째 반복시 하한한계값($LB^k=\theta^k$)은 k번째 최적절단면이 첨가된 주문제를 풀 때의 최적값과 같다.

상한한계값을 구하기 위해 공급입지변수 y_i는 고정하고 하위문제를 풀어 최적 할당변수를 결정하자. 공급입지변수 y_i를 y_i^1로 고정하면 문

제 (2)의 해공간(solution space)이 제한되는 것을 제외하고는 하위문제는 문제 (2)와 동일하기 때문에 하위문제에 대한 최적값과 입지를 건설하는 비용의 합계는 필요로 하는 상한한계값이 된다. 매 반복에서 상한한계값은 이 값들 중에서 최소값이 되는데 즉, k번째 반복에서의 상한한계, UB^k = min $[UB^{k-1}, \sum_{i\in I} f_i y_i^k + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\cdot c_{ij}\cdot x_{ij}^k(\omega)]$이 된다.

벤더즈 분해기법에 의해 유도된 알고리즘의 흐름은 다음과 같다.

단계 1: 초기화(initialization)과정
투입자료인 색인값(index)을 정리한다. $k=0$, $LB^k=-\infty$, $UB^k=\infty$. 예상공급입지변수(y_i) 중에서 몇 개의 입지를 건설할 것인지 초기값을 설정한다. 여기서 $y_i^k=1$, $\forall i$로 한다.

단계 2: 하위문제(subproblem)의 풀이
고정된 장소입지변수값(y_i^k)으로 하위문제 (3)의 우변상수를 수정하여 각각의 하위문제를 푼다. $k=k+1$. 하위문제들의 쌍대값($\lambda_j^k(\omega)$, $\alpha_i^k(\omega)$)을 이용하여 최적절단면을 구하고 상한한계값(UB^k)을 결정한다.

단계 3: 주문제(master problem)의 풀이
유도된 최적절단면을 주문제에 첨가하고 주문제를 풀어 이전보다 나은 장소입지변수(y_i^k)를 결정한다. 주문제의 최적해가 하한한계값(LB^k)이다.

단계 4: 종료조건 검사
종료조건을 충족시켰는지 시험하고(즉, $UB^k \geq LB^k + \varepsilon$) 충족되지 않았다면 다시 2단계로 되돌아 간다. 충족되었다면 최적해($y_i^*=y_i^k, x_{ij}^*(\omega)=x_{ij}^k(\omega)$)와 최적값($\theta^*=\theta^k$)을 구한다.

3. 확률적 선형계획문제와 기대값 문제의 최적값

장소입지결정에 있어 확률적 선형계획문제로 형성하게 되면 문제가 대규모화되어 분해기법중의 하나를 이용하여야 문제를 해결할 수 있다. 분해기법은 그 해결과정이 복잡하고 컴퓨팅 시간이 상당히 소요되는 등의 문제점이 있어 실무자들은 확률적 선형계획문제를 회피하는 경향이 있다. 이들은 불확실한 파라미터 대신 이의 기대값을 우변상수로 한 결정적 선형계획문제로 수요의 영향력을 평가하고 있다. 불확실한 수요 확률변수의 기대값을 우변상수로 한 다음의 기대값 문제를 고려하자.

$$\min \sum_{i\in I} f_i y_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\cdot x_{ij} \quad (12)$$
$$\text{s.t.}$$
$$\sum_{i\in I} x_{ij} \geq \overline{d_j} \quad \forall j\in J$$
$$\sum_{j\in J} x_{ij} \leq s_i y_i \quad \forall i\in I$$
$$x_{ij}\geq 0,\ y_j \in \{0,1\},\ \forall i\in I, \forall j\in J$$

여기서 $\overline{d_j} = E_\omega[d_j(\omega)] = (1/L)\cdot(\sum_{\omega\in\Omega} d_j(\omega))$이다. 기대값 문제 (12)에서 총 수요량이 총공급량보다 작거나 같다면(즉, $\sum_{i\in I} s_i y_i \geq \sum_{j\in J}\overline{d_j}$), 이 문제의 해($\overline{y_i}$)가 실행가능할 것이며 이의 최적값을 EV(12)로 칭한다. 그런데 이 해에 의하여 입지결정을 하면 다음 단계에서 어떤 시나리오의 수요량 변화는 충족시키지 못할 수가 있다. 즉, 다음 단계에서의 수요량이 기대값보다 훨씬 큰 경우의 시나리오에서는 총공급량이 총수요량보다 작을 수가 있으며(즉, $\sum_{i\in I} s_i y_i < \sum_{j\in J} d_j(\omega)$, for some ω), 이 경우 기대값 문제 (12)의 해($\overline{y_i}$)를 이용하여 하위문제 (3)을 풀면 하위문제가 실행불가능인 경우가 발생할 수

있다. 하위문제가 실행가능하기 위해서는 제약조건식 (5)를 문제 (12)에 추가하면 된다.

$$\begin{aligned}&\min \textstyle\sum_{i\in I} f_i y_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\cdot x_{ij}\\ &\text{s.t.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (13)\\ &\textstyle\sum_{i\in I} x_{ij} \geq \overline{d_j} \quad \forall j\in J\\ &\textstyle\sum_{j\in J} x_{ij} \leq s_i y_i \quad \forall i\in I\\ &\textstyle\sum_{i\in I} s_i y_i \geq \max[(\sum_{j\in J} d_j(\omega)),\ \omega=1,\cdots,L]\\ &x_{ij}\geq 0,\ y_j \in \{0,1\},\ \forall i\in I, \forall j\in J\end{aligned}$$

문제 (13)은 언제나 실행가능이며 이 문제의 해를 이용하여 하위문제 (3)을 풀면 하위문제 모두가 실행가능하다. 문제 (13)은 문제 (12)에 제약조건식 (5)가 추가되어 해공간이 제한됨으로 (13)의 최적값이 (12)의 최적값보다 크거나 같다.(EV(13) ≥ EV(12)) 문제 (13)은 쌍대정리에 의해 다음 (13)과 같이 동등한 문제로 변환될 수 있다.

$$\begin{aligned}&\min\{\textstyle\sum_{i\in I} f_i y_i + \max\{\sum_{j\in J} E_\omega[d_j(\omega)]\lambda_j +\\ &\qquad\qquad\qquad \textstyle\sum_{i\in I} s_i y_i^* \alpha_i \mid\\ &\quad y\in R\ \lambda_j + \alpha_i \leq c_{ij},\ \alpha_i \leq 0, \forall i,j\}\}\ (14)\end{aligned}$$

기대값 문제는 확률적 선형계획문제보다 규모가 간단하여 해를 찾기에 용이하지만 문제의 해($\overline{y_i}$)가 확률적 문제의 최적해와는 차이가 날 수 있다. "실행가능한 문제" (2)의 최적값(이를 SP(2)라 하자)과 기대값 문제 (13)의 최적값과의 차이에 대한 오차(error)가 상대적으로 작다면 기대값 문제 (13)의 해를 확률적 문제 (2)의 해 대신 사용할 수 있을 것이다. 이제 SP(2)와 EV(13)과의 관계를 살펴보자. 2.2절 분해기법에서의 쌍대정리에 대한 논의를 통해 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}SP(2)=&\textstyle\sum_{i\in I} f_i y_i^k+\sum_{\omega\in\Omega} [\max \sum_{j\in J} d_j(\omega)\lambda_j^k(\omega)\\ &\quad + \textstyle\sum_{i\in I} s_i y_i^k \alpha_i^k(\omega),\ \forall k\}]\\ \geq& \textstyle\sum_{i\in I} f_i y_i^k + \sum_{\omega\in\Omega} [\{\sum_{j\in J} d_j(\omega)\lambda_j^k(\omega)\\ &\quad + \textstyle\sum_{i\in I} s_i y_i^k \alpha_i^k(\omega)\}],\ k=1,\cdots,K \qquad (15)\end{aligned}$$

하위문제들 각각의 꼭지점에서의 목적함수값 중 최대값을 L개 구할 수 있고 이들을 모두 합한 뒤, 이 값을 $\sum_{i\in I} f_i y_i^*$ 와 합한 것이 (15)식의 첫 번째의 좌변값이다. 이 좌변값은 쌍대정리에 의해 "실행가능한 문제" (2)의 최적값 (EV(15))과 동등하다. 첫 번째 식의 좌변이 두 번째 식보다 크거나 같다는 것은 약쌍대정리에 의해 설명이 된다. 식 (15)와 식 (14)를 이용하여 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}SP(2)\geq&\textstyle\sum_{i\in I} v_i \overline{y_i} + \max\ [\sum_{j\in J} E_\omega[d_j(\omega)]\lambda_j^k\\ &\quad + \textstyle\sum_{i\in I} s_i \overline{y_i}\alpha_i^k,\ \forall k]\\ =&\ EV(13)\end{aligned}$$

"실행가능한 문제" (2)의 최적값과 기대값 문제 (13)의 최적값은 위와 같은 관계가 존재하며 이를 이용하여 다음과 같은 상대오차(relative error)를 구할 수 있다.

상대오차 = (SP(2)-EV(13))/SP(2)

이 상대오차가 아주 작다면 기대값 문제의 최적해를 확률적 선형계획문제의 최적해로 대체하여 사용할 수 있을 것이다.

4. 실험문제와 실험결과

이 실험에 사용된 실험 문제는 장소입지문제 [1,12]에서 실험문제를 생성하는 방식과 유사하게 생성되었다. 수요가 불확실한 경우, 공급입지

결정모형에서 파라미터의 변화와 무작위 샘플링의 표본갯수에 따라서 공급입지의 개수, 최적해에 도달하기까지의 반복회수, 표본수에 따른 최적값 등이 변화할 수 있기 때문에 이들 파라미터의 영향력을 살펴보고자 한다. 그래서 하나의 실험문제를 대상으로 표본수와 파라미터의 변화에 따른 민감도 분석을 실시하였다. 이 문제는 예상공급입지 8개, 수요지를 6군데로 하였는데, 확률변수를 고려하지 않는다면 공급입지계획문제로는 작은 규모의 문제이지만 수요량의 확률변수를 몇 개 추출하느냐에 따라 대규모의 문제가 된다.

입지모형의 결정적인 파라미터인 공급입지 설치비용 f_j, 단위당 수송비용 c_{ij}, 각 공급입지의 최대 공급량 s_i는 각각의 상한값(u)과 하한값(l) 사이의 일양분포에서 추출하였다. 일양분포 앞의 수자는 하한값이며 뒤의 수자는 상한값이다.

f_j = uniform[100,200]

c_{ij} = uniform[1,20]

s_i = uniform[10,30]

각 수요지의 수요량은 불확실하며 이들 각각은 일양분포를 이루는 것으로 가정하였다.

$d_1(1)$ = uniform[10,20]

$d_2(2)$ = uniform[5,20]

$d_3(3)$ = uniform[15,25]

$d_4(4)$ = uniform[0,20]

$d_5(5)$ = uniform[10,20]

$d_6(6)$ = uniform[10,30]

이 문제를 "기본문제"라 칭하고 무작위 표본의 수를 (1)10개(L=10), (2)100개(L=100), (3)1000개(L=1000)의 세가지로 구별하여 각 (1)(2)(3)에 대해 5회의 시뮬레이션을 seed를 달리하여 실시하였다.(즉, 기본 문제에 대하여 15회의 시뮬레이션을 실시하였다) 기본문제에 대한 파라미터의 변화를 고려한 두 문제를 더 형성하여 각각 "변동문제1"과 "변동문제2"로 칭하였다.

변동문제1은 다른 파라미터는 고정한 채 고정비용과 변동비용의 비율을 변화시킨 것이다. [1,12]에 따르면 공급입지의 수에 영향을 미치는 것이 고정비용과 변동비용과의 비율차이인데 이 차이에 따른 공급입지의 수와 반복회수 등의 알고리즘 성과에 대한 영향력을 조사하기 위하여 변동문제1을 구성하였다. 기본문제에서는 고정비용과 변동비율이 0.065(평균변동비용/평균고정비용)인데 반해 변동문제1에서는 비율을 0.675로 하여 15회의 시뮬레이션을 실시하였다.

변동문제2는 다른 파라미터는 고정한 채 총공급량과 총수요량의 비율을 변화시킨 것이다. 총공급량과 총수요량의 비율의 차이에 따라 공급입지의 수와 반복회수가 차이가 날 것인바 이들 비율의 영향력을 조사하기 위해 변동문제2를 구성하였다. 여기서 총공급량은 예상공급입지 8개가 모두 건설됐을 경우의 공급량을 모두 합한 값이다. 총공급량과 총수요량의 비율차이는 표본의 수에 따라 달라지기 때문에 다음 <표 1>로 정리하였다. 변동문제2의 고정비용 대 변동비용 비율은 기본문제와 같이 0.065이다.

이 실험문제의 최적해를 구하기 위해 GAMS 386/486 PC용 Version 2.25x를 프로그램으로 사용하였다. 문제를 분해하였을 때 선형계획문제를 풀기 위하여 LP패키지로 BDMLP를 사용하고, 혼합정수계획문제를 풀기 위해서는 MIP패키지로 ZOOM을 사용하였다.[2,6] 실험문제들은 686PC (266MHz, 32Mega RAM)에서 실행되었으며 ε의 값은 1로 고정한 후에 3가지 문제에 대해 실험을 한 결과는 다음 <표 2>-<표 4>에 정리되어 있다.

각 문제에서 표본의 크기에 따라 5번의 시뮬레이션은 작은 수이지만, 컴퓨터 실행결과는 입

<표 1> 총공급량과 총수요량의 비율

문제유형	표본수	총공급량	비율(총수요량/총공급량)*
기본문제	10	346.04	0.847, 0.840, 0.841, 0.852, 0.849
	100	346.04	0.891, 0.889, 0.891, 0.892, 0.891
	1000	346.04	0.895, 0.895, 0.895, 0.896, 0.895
변동문제1	10	346.04	0.847, 0.840, 0.841, 0.852, 0.849
	100	346.04	0.891, 0.889, 0.891, 0.892, 0.891
	1000	346.04	0.895, 0.895, 0.895, 0.896, 0.895
변동문제2	10	150.69	0.369, 0.366, 0.366, 0.371, 0.370
	100	150.69	0.388, 0.387, 0.388, 0.388, 0.388
	1000	150.69	0.390, 0.390, 0.390, 0.390, 0.390

* 이값은 Seed수의 변화에 따른 비율을 나타냄.(즉, seed가 no seed, 100, 1000, 500, 50일 때의 비율임)

<표 2> 기본문제의 실행결과

표본수	Seed	EV (12)	Sol(12)	EV (13)	Sol(13)	SP(2)	Sol(2)	반복회수	시간
10	no	825.2	2,4,6,8	959.1	1,2,4,7,8	966.8	2,4,6,7,8	3	0.68
	100	942.6	2,4,6,7,8	1000.2	1,2,4,7,8	1011.1	1,2,4,7,8	2	0.54
	1000	877.4	2,4,7,8	1099.6	1,2,4,6,7,8	1104.4	2,4,5,6,7,8	3	0.76
	500	929.9	1,2,4,8	999.9	1,2,4,7,8	1008.2	1,2,4,7,8	3	0.81
	50	976.6	2,4,6,7,8	1139.3	2,4,5,6,7,8	1149.6	1,2,4,6,7,8	4	1.09
100	no	887.2	2,4,7,8	1103.2	1,2,4,6,7,8	1112.0	1,2,4,6,7,8	2	4.00
	100	897.6	2,4,7,8	991.9	1,2,4,7,8	1001.9	1,2,4,7,8	2	4.18
	1000	896.1	2,4,7,8	992.3	1,2,4,7,8	1001.3	1,2,4,7,8	2	4.24
	500	893.4	2,4,7,8	1104.4	1,2,4,6,7,8	1112.6	1,2,4,6,7,8	2	4.32
	50	895.4	2,4,7,8	1105.2	1,2,4,6,7,8	1119.0	2,4,5,6,7,8	3	5.68
1000	no	917.5	1,2,4,8	1109.9	1,2,4,6,7,8	1118.6	1,2,4,6,7,8	2	59.64
	100	917.0	1,2,4,8	1110.2	1,2,4,6,7,8	1119.4	1,2,4,6,7,8	2	58.42
	1000	915.0	1,2,4,8	1108.7	1,2,4,6,7,8	1117.4	1,2,4,6,7,8	2	61.31
	500	915.9	1,2,4,8	1108.6	1,2,4,6,7,8	1117.3	1,2,4,6,7,8	2	63.28
	50	917.6	1.2.4.8	1109.4	1,2,4,6,7,8	1118.0	1,2,4,6,7,8	2	62.23

* EV(12)와 EV(13)은 문제(12)와 (13)의 최적값이며 Sol은 문제의 최적해를 의미하며 1단계에서 건설해야 할 입지를 표시함.

** 시간은 분 단위임.

지의 수와 알고리즘의 성과에 대한 패턴을 보여주고 있다. 3개문제에 대한 실행결과를 통해 다음을 관찰할 수 있다.

첫째, 확률적 선형계획문제의 최적해는 표본의 크기가 크면 클수록 최적값의 변동의 폭이 적고 최적해가 안정되어 감을 관찰할 수 있는데, 이는 Higle과 Sen[9]의 연구와도 일치된 결과이다. 8개 예상공급입지에서의 수요확률변수가 연속확률분포를 이루고 있기 때문에 "실행가능한 문제" (2)의 정확한 최적해를 구하기는 어렵다. 하지만 연속확률분포를 이루고 있다 하더라도 표본의 크기를 크게 하면 할수록 추정된 목적함

<표 3> 변동문제1의 실행결과

표본수	Seed	EV (12)	Sol(12)	EV (13)	Sol(13)	SP(2)	Sol(2)	반복회수	시간
10	no	7477.4	2,4,6,8	7680.6	1,2,4,6,7,8	7694.4	1,2,4,6,7,8	3	0.74
	100	8670.4	2,4,6,7,8	8831.8	1,2,4,6,7,8	8849.9	1,2,4,6,7,8	2	0.57
	1000	8190.3	2,4,6,7,8	8361.8	1,2,4,6,7,8	8380.6	1,2,4,6,7,8	2	0.56
	500	8619.8	2,4,6,7,8	8782.5	1,2,4,6,7,8	8789.8	1,2,4,6,7,8	2	0.60
	50	9030.5	2,4,6,7,8	9185.0	1,2,4,6,7,8	9200.0	1,2,4,6,7,8	2	0.51
100	no	8312.4	2,4,6,7,8	8485.2	1,2,4,6,7,8	8503.9	1,2,4,6,7,8	2	3.98
	100	8378.4	2,4,6,7,8	8545.5	1,2,4,6,7,8	8562.7	1,2,4,6,7,8	2	4.20
	1000	8405.6	2,4,6,7,8	8576.0	1,2,4,6,7,8	8591.7	1,2,4,6,7,8	3	5.76
	500	8345.8	2,4,6,7,8	8513.0	1,2,4,6,7,8	8530.2	1,2,4,6,7,8	3	5.64
	50	8396.8	2,4,6,7,8	8565.9	1,2,4,6,7,8	8582.5	1,2,4,6,7,8	3	5.94
1000	no	8468.3	2,4,6,78,	8637.3	1,2,4,6,7,8	8655.7	1,2,4,6,7,8	2	62.37
	100	8487.5	2,4,6,7,8	8656.0	1,2,4,6,7,8	8675.5	1,2,4,6,7,8	2	61.26
	1000	8438.9	2,4,6,7,8	8608.1	1,2,4,6,7,8	8626.5	1,2,4,6,7,8	2	60.38
	500	8614.0	1,2,4,6,7,8	8614.0	1,2,4,6,7,8	8632.2	1,2,4,6,7,8	2	63.68
	50	8632.9	1,2,4,6,7,8	8632.9	1,2,4,6,7,8	8651.8	1,2,4,6,7,8	2	64.06

<표 4> 변동문제2의 실행결과

표본수	Seed	EV (12)	Sol(12)	EV (13)	Sol(13)	SP(2)	Sol(2)	반복회수	시간
10	no	689.6	4,6	692.8	4,8	694.0	4,8	15	3.4
	100	748.3	4,6,8	748.3	4,6,8	751.5	4,6,8	13	2.93
	1000	722.8	4,8	728.9	4,6,8	733.1	4,6,8	14	3.18
	500	740.3	6,7,8	740.3	6,7,8	741.4	6,7,8	12	2.72
	50	761.8	4,6,8	761.8	4,6,8	765.0	4,6,8	13	2.95
100	no	729.0	4,8	730.9	6,7,8	731.6	6,7,8	12	23.91
	100	732.4	6,7,8	732.4	6,7,8	751.5	4,6,8	11	21.91
	1000	734.1	4,8	735.8	4,6,8	737.7	6,7,8	10	19.92
	500	735.0	4,6,8	735.0	4,6,8	736.1	6,7,8	14	27.91
	50	736.1	4,8	736.4	4,6,8	738.9	6,7,8	14	27.90
1000	no	739.8	4,8	740.2	6,7,8	741.1	6,7,8	10	196.42
	100	740.9	4,6,8	740.9	4,6,8	742.2	6,7,8	11	217.10
	1000	738.1	4,8	739.2	4,6,8	740.5	6,7,8	11	218.36
	500	738.3	4,8	738.8	6,7,8	739.6	6,7,8	11	217.81
	50	739.2	4,8	739.8	6,7,8	740.6	6,7,8	12	245.70

수값은 확률적 선형계획문제의 정확한 목표함수 값과 일치한 값을 얻을 수 있으며, 추정된 최적해는 정확한 최적해와 일치하게 된다. 무작위 표본의 크기가 10개일 때 기본문제와 변동문제3의 경우 최적해는 seed에 따라 상당히 다르지만, 표본의 크기가 1000개가 될 경우 모든 문제에 있어 최적해는 일치한다. 즉, 표본의 크기가 크면 클수록 모든 문제의 최적해가 일치하게 된다. 또한 최적값의 경우도 표본의 크기가 작으면 변동(variation)의 폭이 증가하는데 비해 표본의 크기가 클수록 변동의 폭이 감소함을 다음 <표 5>에서 관찰할 수 있다.

각 문제에서 표본의 크기가 10개인 경우 표준편차가 75.9, 576, 26.8인데 비해, 표본의 크기가 1000개인 경우에는 표준편차가 0.9, 19.6, 0.95로 표본크기가 10개인 경우보다 변동의 폭이 현저하게 작아짐을 알 수 있다. 즉, 표본의 크기가 클수록 최적해를 구하는데 시간은 많이 소요되지만 최적해와 최적값이 안정되어 간다는 것을 관찰할 수 있다.

둘째, 각 파라미터의 변화에 따라 개설해야 할 공급입지의 수와 알고리즘의 반복회수에 있어 차이가 발생함을 관찰할 수 있다. 변동문제1은 기본문제와 변동문제2에 비해 평균변동비용/평균고정비용의 비율에 있어 변동비용을 높여 조사한 것인데, 이 비율이 높아짐에 따라개설해야 할 입지의 수가 다른 문제들보다 많다는 것을 알 수 있다. 이 사실은 [12]의 연구에서도 보여준 바와 같이 입지건설의 고정비용이 크면 클수록 개설할 수 있는 입지수가 줄어들 수밖에 없다는 것을 반영하고 있다. 변동문제2는 기본문제와 변동문제1에 비해 총수요량/총공급량의 비율을 높여서 조사한 것이다.(<표 1> 참조) 총공급량에 대한 총수요량의 비율이 낮아질수록 여러 군데의 예상공급입지중 최소한의 입지에서 총수요량을 충족시켜 줄 수 있으므로 다른 문제들에 비해 공급입지의 수가 줄어들게 된다. 또한 예상입지 8개중 최소한의 입지만이 선택됨으로 선택할 경우의 수가 많아져서 최적해를 발견하는데 반복회수가 증가하게 된다. 즉, 기본문제와 변동문제1에서는 반복회수가 2-4회인데 반해 변동문제2에서는 반복회수가 10-15회로 증가함을 알 수 있다.

마지막으로 기대값 문제 (13)의 최적값은 기대값 문제 (12)의 최적값에 비해 확률적 선형계획문제 최적값과의 상대오차가 상당히 작다는 것을 관찰할 수 있다. <표 6>은 각 문제의 기대값 문제와 확률적 문제의 최적값 사이의 오차를 정리한 것으로 "오차1"은 기대값 문제 (12)와 확률적 문제의 최적값과의 상대오차를, "오차2"는 기대값 문제 (13)과 확률적 문제의 최적값과의 상대오차를 의미한다.

<표 6>을 살펴보면 표본의 크기가 1000개이며 기본문제인 경우, 기대값 문제 (12)와 확률적 문제의 최적값간의 상대오차는 평균 약 18%인

<표 5> 확률적 LP 최적값의 평균과 기대값

표본수	기본문제		변동문제1		변동문제2	
	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차
10	1048.0	75.9	8583.0	576.0	737.0	26.8
100	1069.4	61.9	8554.2	36.6	792.2	7.4
1000	1118.1	0.9	8648.3	19.6	740.8	0.95

<표 6> 각 문제에서의 최적값들의 상대오차 (단위: %)

표본수	Seed	기본문제		변동문제1		변동문제2	
		오차1	오차2	오차1	오차2	오차1	오차2
10	no	0.1464	0.0080	0.0282	0.0018	0.0063	0.0017
	100	0.0677	0.0108	0.0203	0.0020	0.0043	0.0043
	1000	0.2055	0.0043	0.0227	0.0022	0.0141	0.0057
	500	0.0776	0.0082	0.0202	0.0017	0.0015	0.0015
	50	0.1506	0.0090	0.0184	0.0016	0.0042	0.0042
100	no	0.2022	0.0079	0.0225	0.0022	0.0036	0.0036
	100	0.1041	0.0100	0.0215	0.0020	0.0254	0.0254
	1000	0.1050	0.0091	0.0217	0.0018	0.0049	0.0026
	500	0.1970	0.0074	0.0216	0.0020	0.0015	0.0015
	50	0.1926	0.0123	0.0216	0.0019	0.0038	0.0034
1000	no	0.1797	0.0078	0.0217	0.0021	0.0018	0.0012
	100	0.1808	0.0082	0.0217	0.0022	0.0018	0.0018
	1000	0.1812	0.0078	0.0217	0.0021	0.0032	0.0018
	500	0.1802	0.0078	0.0222	0.0021	0.0018	0.0011
	50	0.1792	0.0076	0.0217	0.0022	0.0019	0.0011

데 반해, 확률적 문제와 기대값 문제 (13)과의 상대오차는 0.78%에 불과하다. 표본의 크기와 문제유형에 상관없이 확률적 문제와 기대값 문제 (13)과의 최적값에 대한 상대오차는 확률적 문제와 기대값 문제 (12)와의 상대오차보다 모든 경우에 있어 작다는 것을 관찰할 수 있다. 상대오차가 이와 같이 1%보다 작은 경우, 기대값 문제의 최적해를 확률적 LP문제의 최적해로 대체할 수 있는 가능성이 높아질 것이다.(최적해로의 대체 기준에 대한 논의는 참고문헌 [8, pp.24-27]을 참조하라.) 기대값 문제 (13)의 상대오차가 작은 것은 제약조건식 (5)를 추가하였기 때문으로, 이 식의 추가는 해공간을 제한시켜 최적값의 상승을 가져오고, 결과적으로 기대값 문제 (13)의 최적값이 확률적 문제의 최적값에 더 접근하게 만들었다. 그러나 변동문제2에 있어 상대오차가 차이가 나지 않는 것은 총공급량이 총수요량보다 상대적으로 아주 많아서 제약조건식의 (5)의 추가가 해공간에 별 영향을 미치지 않았기 때문이다.

여기서 기대값 문제 (13) 대신 (12)를 고려하여 보는 것도 의미가 있다. 기대값 문제 (12)의 최적해는 다음 단계에서 어느 특정 시나리오가 발생할 때, 수요를 충족시켜줄 수 없기 때문에 (즉, 몇 개의 하위문제가 실행불가능하게 된다) "실행가능한 문제" (2)의 최적해가 될 수 없다. 하위문제의 실행불가능을 방지하기 위하여 기대값 문제 (13)은 제약조건식 (5)를 추가하여 문제를 해결함으로 다음 단계에서의 모든 시나리오의 수요변화를 충족시켜 줄 수 있다. 따라서

"실행가능한 문제" (2)와 기대값 문제 (13)은 미래 수요가 아주 비정상적으로 크게 발생하는 경우까지 대비하여 장소입지를 결정하게 된다. 즉, 이들 문제는 최악의 시나리오(worst scenario)가 발생할 경우까지 대비하여 입지를 결정한다. "실행가능한 문제" (2)를 고려하는 것은 미래 모든 불확실한 수요를 충족시켜야 할 군의 전시 추진보급소 입지문제나 국가 기반산업 혹은 핵심산업의 입지건설에 있어서는 필요한 것이다. 그러나, 일반 소비재 공장이나 유통센터의 입지를 결정할 때, 미래의 모든 불확실한 이상적 수요(extreme demand)까지 모두 충족해야 한다면 과다한 비용이 지출될 수 있기 때문에 비정상적으로 큰 수요는 고려하지 않고 입지결정을 내리는 경우가 현실적일 것이다. 이 경우 기대값 문제 (13)은 현실적으로 유용하지 못할 수 있으며, 기대값 문제 (12)는 비정상적으로 큰 수요는 충족시키지 못하지만 기대값 문제 (13)의 결과와 비교할 수 있는 민감도 분석의 자료로 유용할 것이다.

5. 결 론

이 연구는 먼저 수요가 불확실한 경우의 최적공급입지 결정을 위한 확률적 선형계획문제의 최적해를 구하는 과정을 제시하고자 하였다. 입지결정을 위한 확률적 선형계획문제는 문제의 규모가 대규모화되고 혼합정수계획문제로 형성되기 때문에 기존의 알고리즘으로는 해결이 어려워 벤더즈 분해기법의 아이디어를 통해 최적해를 구하는데 필요한 성질을 살펴보고 이의 알고리즘을 유도하였다. 확률적 선형계획문제는 최적해를 구하는 과정이 복잡하여 실무자들은 이를 회피하고 불확실한 확률변수 대신 이의 기대값을 사용하는 경향이 있다. 그래서 이 논문은 입지결정을 위한 확률적 선형계획문제와 기대값 문제의 최적값간의 관계를 연구하였다. 또한 공급입지결정과 최적해 산출의 성과(반복회수)에 영향을 미치는 모형의 파라미터에 대한 민감도 분석을 실시하였다. 입지결정과 알고리즘 성과에 영향을 미치는 것으로 변동비용 대 고정비용의 비율, 총수요량 대 총공급량의 비율이 고려될 수 있어 이를 고려한 실험문제를 변동시켜 이 문제들에 시뮬레이션을 실시하였다.

최적해를 유도하는 과정에서 공급입지결정을 위한 확률적 선형계획문제에 어떠한 시나리오하에서도 수요량의 총합이 공급량의 총합보다 작거나 같다는 제약조건식을 추가하게 되면 다음과 같은 결과가 발생하였다. 공급입지결정모형이 늘 실행가능하게 되고 그에 따라 하위문제도 실행가능하게 된다. 또한 이 제약조건식을 추가한 기대값 문제와 확률적 선형계획문제 최적값간의 상대오차는 제약조건식을 추가하지 않은 기대값 문제의 최적값간의 상대오차보다 작다. 기대값 문제의 최적값은 확률적 선형계획문제 최적값보다 언제나 같거나 작게 추정(under-estimate)되고 있으며, 제약식이 추가된 기대값 문제의 최적값은 제약식이 추가되지 못한 기대값 문제의 최적값보다 크거나 같으며 또한 확률적 선형계획문제의 최적값보다는 작거나 같다는 것이다.

시뮬레이션 결과 다음을 확인할 수 있었다. 첫째, 확률적 선형계획문제는 표본의 크기가 크면 클수록 최적값의 변동의 폭이 적고 최적해가 안정되어 간다는 것이다. 둘째, 각 파라미터의 변화에 따라 개설해야 할 공급입지의 수와 알고리즘의 반복회수가 차이가 남을 알 수 있다. 평균변동비용/평균고정비용의 비율이 높아짐에 따라 개설해야 할 입지의 수가 많아지며, 또한 총수요량/총공급량의 비율이 낮아질수록 공급입지

의 수가 줄어들게 되지만 반복회수가 증가하게 됨을 알 수 있다. 마지막으로 실행가능 제약조건식이 추가된 기대값 문제의 최적값은 제약조건식이 추가되지 않은 기대값 문제의 최적값보다 확률적 선형계획문제의 최적값과의 상대오차가 상당히 작다는 것을 시뮬레이션 결과는 보여주고 있다. 그러나 시뮬레이션의 회수가 상대적으로 작아서 이러한 모든 결과를 일반화하기에는 문제가 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] 이상진, "저장능력이 무한대인 장소입지문제에 벤더즈 분해기법과 GAMS의 적용," 「경영과학」, 제12권 제2호(1995.8), pp. 63-75.

[2] 이상진, "A study on solution methods of two-stage stochastic LP problems," 「한국경영과학회지」, 제22권 제1호(1997.3), pp. 1-24.

[3] Benders, J.K., "Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems," *Numerische Mathematic*, 4 (1962), pp. 238-252.

[4] Birge, J.R., and R.J-B. Wets, "Designing approximation schemes for stochastic optimization problems, in particular for stochastic programs with recourse," *Mathematical Programming Study*, 27(1986), pp. 54-102.

[5] Birge, J.R., "The value of the stochastic solution in stochastic linear programs with fixed recourse," *Mathematical Programming*, 24(1982), pp. 314-325.

[6] Brooke, A., D. Kendrick, and A. Meeraus, *GAMS: A User's Guide*, The Scientific Press, Redwood City, CA, 1988.

[7] Dantzig, G.B., and G. Infanger, "Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization," *Technical Report SOL 91-11*, Systems Optimization Laboratory, Stanford University, CA, 1991.

[8] Higle, Julia L. and Suvrajeet Sen, *Stochastic Optimization: A Statistical Method for Large Scale Stochastic LP*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1996.

[9] Geoffrion, A.M. and G.W. Graves, "Multicommodity distribution system design by Benders decomposition," *Management Science*, 20(1974), pp. 822-844.

[10] Madansky, A., "Inequalities for stochastic linear program problems," *Management Science*, 6(1960), pp. 197-204.

[11] Parker, R.G. and R.L. Rardin, *Discrete Optimization*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1988.

[12] Pirkul, H., "The uncapacitated facility location problem with primary and secondary facility requirements," *IIE Transactions*, 21(1989), pp.337-348.

[13] Wets, R.J-B., "Stochastic programming: Solution techniques and approximation schemes," *Mathematical Programming: The state of the art*, Edited by A.Bachem, M. Grötschel and B.Korte, Springer-Verlag, Berlin, 1983.