韓國經營科學會誌
第23卷 第4號
1998年 12月

ATM 다중화 장치에 적용된 추계적 유체흐름 모형의 근사분석*

윤영하** · 홍정식*** · 홍정완**** · 이창훈**

An Approximate Analysis of a Stochastic Fluid Flow Model Applied to an ATM Multiplexer*

Y. H. Yoon** · J. S. Hong*** · J. W. Hong**** · C. H. Lie**

■ Abstract ■

In this paper, we propose a new approach to solve stochastic fluid flow models applied to the analysis of cell loss of an ATM multiplexer. Existing stochastic fluid flow models have been analyzed by using linear differential equations. In case of large state space, however, analyzing stochastic fluid flow model without numerical errors is not easy. To avoid this numerical errors and to analyze stochastic fluid flow model with large state space, we develope a new computational algorithm. Instead of solving differential equations directly, this approach uses iterative and numerical method without calculating eigenvalues, eigenvectors and boundary coefficients. As a result, approximate solutions and upper and lower bounds are obtained. This approach can be applied to stochastic fluid flow model having general Markov chain structure as well as to the superposition of heterogeneous ON-OFF sources. It can be extended to Markov process having non-exponential sojourn times.

1. 서 론

추계적 유체흐름 모형(stochastic fluid flow Model, 이하 SFF 모형) 모형은 가변 비트율(variable bit rate) 특성을 갖는 트래픽 모형화에 많이 사용된다. 이 모형에서는 트래픽의 비트율(bit rate)

* 본 연구는 한국통신 통신망 연구소와 서울산업대학교의 재정적 지원에 의해 수행되었음.
** 서울대학교 산업공학과
*** 서울산업대학교 산업공학과
**** 한성대학교 산업공학과

이 몇 개의 이산화된 비트율로 나타내지고, 이렇게 이산화된 비트율이 연속시간 마코프 연쇄(CTMC)를 따르게 된다. 이렇게 CTMC에 의해 결정된 비트율로 트래픽이 유체(fluid)처럼 발생되는 모형이 SFF 모형이다.

ATM 방식은 일정한 크기의 셀(53 byte)을 전송 단위로 하기 때문에, ATM 망에 사용되기 위한 트래픽 모형은 셀을 단위로 하는 모형이어야 한다. 셀을 단위로 하는 모형의 대표적인 경우가 MMPP (Markov Modulated Poisson Process) 모형인데, 이 모형은 셀의 도착률이 CTMC를 따르고, CTMC의 각 상태에서의 셀 도착이 포아송 과정으로 이루어지는 모형이다[8]. 여기서 포아송 도착에 의한 셀 도착의 변동을 셀 수준의 변동이라 하고, 도착률의 변동을 버스트(burst) 수준의 변동이라 한다. 따라서 MMPP 모형은 셀 변동과 버스트 수준의 변동을 동시에 고려할 수 있는 모형이다. 그러나 어느 정도의 지연(Delay)을 허용하는 트래픽의 경우, 셀 지연의 QoS(Quality of Service)를 만족할 수 있는 버퍼크기는 다중화 장치의 용량에 비례해서 늘어나기 때문에, B-ISDN 상황에서의 다중화 장치의 용량을 고려한다면, 셀 수준의 변동은 그다지 중요한 요소가 아니다. 예를 들어 0.01초의 지연을 허용하고, 다중화 장치의 용량이 100Mbps인 경우 지연을 만족시키기 위한 버퍼크기는 1M가 되고, 이를 셀 수(53 byte)로 환산하면, 2358개의 셀이 된다. 여기에 100개의 트래픽 원이 일정한 시간마다 셀을 보낸다고 가정하면, 다중화 되었을 때의 셀 수준의 변동을 흡수하기 위한 버퍼 크기는 많아야 100개뿐이다. 이런 경우가 아니라 하더라도 버퍼가 충분히 큰 경우, 다중화 장치의 성능은 셀 수준의 변동보다는 버스트 수준의 변동에 더 많은 영향을 받게 된다. 특히 버스트 수준의 변동이 매우 심한 비디오 트래픽의 경우 셀 수준의 변동은 그다지 중요한 요소가 되지 못한다.

SFF 모형에 대한 분석은 주로 ON-OFF 소스가 중첩된 모형에 대해 많이 이루어지고 있다[1]-[7]. Anick[1]은 동질의(homogeneous) ON-OFF 소스가 중첩된 모형에 대해 분석을 하였고, Igelnik[3]는 2개 클래스(class)의 ON-OFF 소스가 중첩된 모형에 대해, 그리고 Coffman[4]은 동질 ON-OFF 소스의 중첩 모형을 일반화된 출생-사망(Birth-Death) 모형으로 확장하여 분석을 하였다. ON-OFF 소스가 중첩된 모형의 경우, 중첩된 소스의 수와 클래스의 수가 증가하게 되면, 유체의 입력률에 대한 마코프 연쇄의 상태(state) 수가 폭발적으로 증가하기 때문에, 정확한 분석보다는 해의 상한과 하한을 구하는 근사 방법을 사용하였다[2, 5 ,7]. Baiocchi[2]는 이질(heterogeneous) ON-OFF 소스의 중첩 모형에 대해 해의 상한과 하한을 구하는 방법을 제시하였고, Quian[5]은 다차원 마코프 연쇄를 1차원으로 축소해서 해를 구하는 방법을 제시하였다. Guilbert[7]는 Beneš의 공식을 유체흐름 모형에 대해 일반화하여 해의 상한을 구하는 방법을 제시하였다.

Yang[10]은 MMDP(Markov Modulated Deterministic Process) 모형을 분석하는 방법을 제시하고 있다. MMDP는 연속시간 마코프 연쇄에 의해 셀의 도착률이 결정되고, 결정된 도착률의 상태에서 셀 도착이 확정적으로 이루어지는 경우로 SFF 모형의 이산화 모형으로 볼 수 있다. SFF 모형에서는 유체의 입력률의 상태(state) 수가 문제의 크기를 결정하지만, MMDP의 방법론은 버퍼크기까지 문제크기에 영향을 주기 때문에, 버퍼가 커지는 경우, 효율적인 방법이 되지 못한다.

본 연구에서는 기존의 SFF 모형의 분석방법과는 다른 접근방법을 사용하여 SFF 모형의 근사해와 해의 상한과 하한을 구하는 방법에 대해 다루고자 한다.

본 연구는 다음과 같이 이루어져 있다. 2절에서는 기존의 SFF 모형의 분석방법에 대해 간단한 소개를 하고, 3절에서는 SFF 모형의 새로운 접근방법에 대해 다룬다. 그리고 4절은 3절에서 제시한 접근방법을 이용하여 분석하는 과정을 다루고, 5절은 4절의 분석을 이용한 실험예제가 제시되어 있다.

2. SFF 모형의 분석

SFF 모형에서의 버스트 수준의 변동은 보통 연속시간 마코프 연쇄로 모형화 된다. 즉 셀 도착률이 마코프 연쇄에 의해 결정되고, 이 마코프 연쇄에 의해 결정된 도착률에 의해 트래픽이 유체(fluid)처럼 다중화 장치에 입력되게 된다. 따라서 트래픽의 도착률 상태(state)는 다중화 장치의 서비스 용량을 기준으로 도착률이 서비스 용량을 넘어서는 상태와(Overload State) 서비스 용량보다 작은 상태(Underload State)로 나누어 볼 수 있다. 서비스 용량을 넘어서는 상태에서는 서비스 용량을 초과하는 부분은 버퍼에 쌓이게 되고, 버퍼가 꽉 찬 경우 서비스 용량을 초과하는 만큼 손실이 일어나게 된다. 도착률이 서비스 용량보다 작은 상태인 경우, 버퍼에 셀이 있으면 초과되는 서비스 용량만큼 버퍼가 비워지게 되고, 버퍼에 셀이 없으면 버퍼는 계속 비어있게 된다.

도착률의 상태 수를 N, 도착률 상태 i에서의 도착률을 A_i, 다중화장치의 서비스 용량을 C, 그리고, 도착률의 상태변화를 나타내는 $N\times N$ 행렬(Infinitesimal Generator Matrix)을 Q, i번째 대각요소가 $(A_i - C)$인 $N\times N$ 대각행렬을 D, 그리고 $F(x)$와 $F_i(x)$를 다음과 같이 정의하면, 식 (1)과 같은 미분방정식을 유도할 수 있다[1]-[6], [12]-[17].

$$F(x) = (F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ \cdots,\ F_N(x))$$

$$F_i(x) = \lim_{t\to\infty} \Pr\{\text{시점 } t \text{에서 도착률의 상태가 } i \text{이고, 버퍼상태가 } x \text{ 이하일 확률}\}$$

$$\frac{d}{dx}F(x)D = F(x)Q \qquad (1)$$

여기서 QD^{-1}의 고유값을 z_i, 고유벡터를 ϕ_i라 하면, 위 미분방정식의 해는 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다[1]-[6].

$$F(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i \exp(z_i x)\phi_i \qquad (2)$$

위 식의 계수 a_i의 값은 무한버퍼를 가정하는 경우, 다음과 같은 경계조건을 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_i(0) &= 0, \quad \text{for } A_i - C > 0 \\ a_i &= 0, \quad \text{for } z_i > 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

도착률이 C보다 큰 경우, 버퍼에 셀이 증가하기 때문에, 버퍼가 비어있을 확률은 0이 되고, 두 번째 조건은 이 시스템이 안정화될 수 있는 조건이다. 고유값이 0보다 큰 경우, a_i가 0이 아니면, x값이 증가하면 $F(x)$값이 발산하게 된다. 따라서 0보다 큰 고유값에 대응되는 계수 a_i는 0이 되어야 한다.

그리고 버퍼크기가 B로 유한인 경우, 도착률이 C보다 클 때는 버퍼가 비어 있을 수 없고, 도착률이 C보다 작을 때는 버퍼가 꽉 차 있을 수 없기 때문에, 위의 경계조건은 다음과 같이 수정된다.

$$\begin{aligned} F_i(0) &= 0, \quad \text{for } A_i - C > 0 \\ F_i(B) &= \pi_i, \quad \text{for } A_i - C < 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

여기서 π_i는 상태 i에 있을 안정상태 확률이다.

경계조건을 이용하여 계수 a_i를 계산하는 경우, 무한버퍼인 경우는 OL(OverLoad) 상태의 수만큼의 선형방정식을 풀어야 하는 반면, 버퍼가 유한인 경우는 도착률의 상태 수만큼의 선형방정식을 풀어야 하기 때문에, 일반적으로 무한 버퍼를 가정하고 미분방정식의 해를 구한다. 버퍼가 유한인 시스템이라 하더라도, 버퍼크기가 상당히 큰 경우, 무한 버퍼를 가정해도 비교적 정확한 값을 얻을 수 있고, 무한버퍼를 가정하는 경우 오버플로우(overflow) 확률을 유한버퍼인 경우보다 더 높게 평가하기 때문에 해의 상한을 제시할 수 있다. 그리고 고유값이나 고유벡터를 구할 때도, 무한버퍼를 가정

하는 경우, 음의 고유값과 그에 대응하는 고유벡터만 구하면 되기 때문에, 유한버퍼 시스템에 비해 계산량이 상당히 줄어들게 된다.

SFF 모형을 분석하기 위해서는 고유값과 고유벡터, 그리고 경계계수 a_i를 효율적으로 계산할 수 있어야 한다. 특히 고유값과 고유벡터는 행렬 Q가 특수한 형태가 아니거나, 행렬크기가 큰 경우 계산하기 매우 어렵다. 그러나 ON-OFF 소스가 중첩된 모형의 경우, 고유값과 고유벡터를 매우 쉽게 구할 수 있다. A-M-S 모형이라 불리는 동질 ON-OFF 소스의 중첩(superposition)모형이나[1], 이질 ON-OFF 소스의 중첩모형의 경우 고유값과 고유벡터를 쉽게 구할 수 있다[2, 3].

3. SMP(Semi-Markov Process)의 관점에서 본 SFF 모형

SMP는 상태전이가 이산시간 마코프 연쇄를 따르고, 각 상태(state)에서 머무르는 시간이 일반분포인 경우의 마코프 과정이다. SMP는 보통 상태전이시점에서의 임베디드(embedded) 마코프 연쇄를 이용하여 분석이 된다. 이 절에서는 SMP의 관점에서 SFF 모형을 분석하는 방법에 대해 다룬다.

SFF 모형은 연속시간 마코프 연쇄를 따르는 경우로, 각 상태에서 머무르는 시간이 지수분포인 SMP의 특수한 형태라 할 수 있다. 본 연구에서는 각 상태에서 머무르는 시간이 지수분포인 경우만 다룬다.

[용어정의]

t_n ~ 도착률의 n 번째 상태전이 시점

$X(t)$ ~ 시점 t에서의 도착률의 상태

$Y(t)$ ~ 시점 t에서의 버퍼상태

$p_{i,j} = \Pr[X(t_{n+1}^+) = j \mid X(t_n^+) = i]$

$e_i = \lim_{n\to\infty} \Pr[X(t_n^+) = i]$

$F_i(x) = \lim_{n\to\infty} \Pr[X(t_n^-) = i,\ Y(t_n^-) \le x]$

$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \cdots, F_N(x))$

$H_i(x) = \lim_{n\to\infty} \Pr[X(t_n^+) = i,\ Y(t_n^+) \le x]$

$H(x) = (H_1(x), H_2(x), \cdots, H_N(x))$

$h(x) = \frac{d}{dx} H(x)$

$1/\gamma_i$ ~ 상태 i에서의 평균 체류시간

$d_i = A_i - C$

$w_i = \gamma_i / d_i$

Λ ~ 대각선 요소가 γ_i인 대각행렬

D ~ 대각선 요소가 d_i인 대각행렬

W ~ 대각선 요소가 w_i인 대각행렬

P ~ (i, j) 요소가 $p_{i,j}$인 전이행렬

$H(x)$는 도착률의 상태전이 직후의 버퍼상태에 대한 확률을 나타내고, $F(x)$는 도착률의 상태전이 직전의 상태확률을 나타내기 때문에, 안정상태에서는 다음과 같은 관계식이 성립하게 된다.

$$H(x) = F(x)P \tag{5}$$

그리고 안정상태에서 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

(1) 상태 i의 도착률이 다중화 장치의 서비스 용량보다 작은 경우

상태 i의 셀 도착률이 다중화 장치의 서비스 용량보다 작기 때문에 버퍼 상태는 감소하게 되고 버퍼가 유한이기 때문에 $F_i(x)$를 계산하기 위하여 다음의 3가지의 상황을 고려해야 한다.

● 상태 i로의 전이 직후의 상태가 x이하인 경우

이 경우는 상태 i를 떠날 때의 버퍼 상태가 x 이하가 된다.

● 상태 i로의 전이 직후의 상태가 B인 경우

상태 i로의 전이 직후의 상태가 B일 확률은 $[e_i - H_i(B^-)]$가 되고, 이 경우 상태 i에서 $(B-x)$

이상의 셀 감소가 이루어져야 한다. 셀 감소율이 $(-d_i)$이기 때문에, $(B-x)$ 이상의 셀 감소가 이루어지기 위해서는 상태 i에서 $(B-x)/(-d_i)$ 시간 이상 체류해야 한다. 이 체류확률이 $e^{w_i(B-x)}$가 된다.

- 상태 i로의 전이 직후의 상태가 x보다 크고 B보다 작은 경우

상태 i로의 전이 직후의 상태가 u인 경우, 상태 i를 떠나기 직전의 버퍼 상태가 x이하가 되기 위해서는 $(u-x)/(-d_i)$ 이상 체류해야 한다. 따라서 이 체류확률은 $e^{w_i(u-x)}$가 된다.

위의 세 가지 상황에 조건을 주어 식을 나타내면, 다음과 같다.

$$F_i(x) = H_i(x) + \int_x^B h_i(u)e^{w_i(u-x)}du + [e_i - H_i(B^-)]e^{w_i(B-x)} \quad (6)$$

(2) 상태 i의 셀 도착률이 다중화 장치의 서비스 용량을 초과하는 경우

상태 i의 셀 도착률이 다중화 장치의 서비스 용량을 초과하기 때문에 버퍼에 셀이 쌓이게 되고, 상태 i를 떠날 때의 버퍼상태가 x 이하가 되기 위해서는 2 가지 경우만 고려하면 된다.

- 상태 i로의 전이 직후의 버퍼상태가 0인 경우

버퍼상태가 0인 경우, 상태 i를 떠날 때의 버퍼상태가 x이하가 되기 위해서는 상태 i에서의 체류시간이 x/d_i시간 이하이어야 한다. 체류시간이 x/d_i이하일 확률은 $(1-e^{-w_i x})$가 된다.

- 상태 i로의 전이 직후의 버퍼상태가 0보다 크고 x이하인 경우

상태 i로의 전이 직후의 버퍼상태가 u인 경우, 체류시간이 $(x-u)/d_i$이하이어야 하고, 이 확률은 $(1-e^{-w_i(x-u)})$가 된다. 그리고 상태 i로의 전이 직후의 버퍼상태가 x이상인 경우, 상태 i를 떠날 때의 버퍼상태가 x이하가 될 수 없다.

위의 두 가지 상황에 조건을 주어 식을 나타내면, 다음과 같다.

$$F_i(x) = H_i(0)(1-e^{-w_i x}) + \int_0^x h_i(u)[1-e^{-w_i(x-u)}]du \quad (7)$$

(3) 상태 i의 셀 도착률이 다중화 장치의 서비스 용량과 같은 경우

이 경우 버퍼상태의 변화가 일어나지 않기 때문에 $F_i(x)$와 $H_i(x)$는 같게 된다.

$$F_i(x) = H_i(x) \quad (8)$$

위의 식 (6), (7)을 x에 대해 미분한 식과 (8)식을 이용하면, 다음과 같은 선형 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dx}F(x)W^{-1} = F(x)(P-I) \quad (9)$$

$W^{-1} = \Lambda^{-1}D$의 관계식을 이용하면, 식 (9)는 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$\frac{d}{dx}F(x)\Lambda^{-1}D = F(x)(P-I) \quad (10)$$

위 식에서 $F(x)$를 $\boldsymbol{F}(x)\Lambda$로 치환하고, $\Lambda(P-I) = Q$의 관계식을 이용하면, 식 (1)과 동일한 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{F}(x)D = \boldsymbol{F}(x)Q \quad (11)$$

임의 시점에서 관측한 경우의 버퍼상태의 분포함수를 $\boldsymbol{F}(x)$로 정의하면, 도착률의 상태전이시점에서 관측한 버퍼상태의 분포함수를 $F(x)$라 하

면, 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$F(x) = \boldsymbol{F}(x)\,\Lambda \tag{12}$$

따라서 전이시점에서의 버퍼상태의 분포함수가 주어지면, 위의 관계식을 이용하여 임의 시점에서의 버퍼상태의 분포함수로 변환시킬 수 있다.

4. SFF 모형의 근사해와 해의 상한과 하한

전이시점에 시스템의 상태를 관측하는 경우, n번째 전이시점에서의 버퍼상태의 분포함수가 주어지면, $(n+1)$번째 전이시점에서의 버퍼상태의 분포함수를 계산할 수 있다. 따라서 전이회수를 계속 증가시키면 안정상태의 버퍼상태의 분포함수를 계산할 수 있게 된다. 그러나 이 방법에 의해서는 정확한 해를 구하는 것은 실제로 불가능하다. 본 연구에서는 SFF 모형을 수치적으로 분석하기 위해, 몇 개의 점에서 분포함수 값을 계산하고, 이 몇 개의 점을 선형으로 연결한 함수를 분포함수로 근사화 한다. 그리고 이렇게 근사화된 분포함수를 이용해서 다음 단계의 분포함수를 유도해 낸다. 이 방법을 계속 반복하면, 수렴된 값을 얻을 수 있다. 그리고 분포함수를 계단함수(step function)로 정의하여 분포함수의 상한과 하한을 계산할 수 있다.

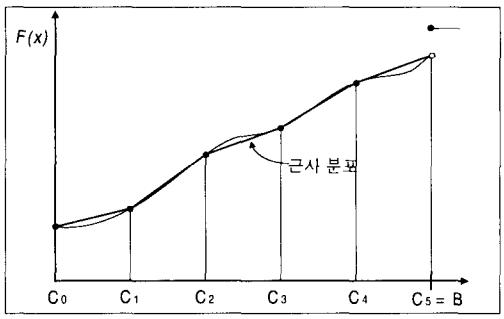
(1) 근사해 계산 방법

먼저 버퍼상태의 범위를 아래와 같이 n개의 구간으로 나눈다.

구간 분할 : (c_0, c_1), (c_1, c_2), $\cdots$, (c_{n-1}, c_n),

$$c_0 = 0,\ c_n = B^-$$

a번째 전이시점에서의 분포함수를 $F^{(a)}(x)$라 하자. 먼저 $F^{(a)}(c_k)\,(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$값을 계산하고. a번째 전이시점에서의 분포함수를 $(c_k, F^{(a)}(c_k))$ 점들을 직선으로 연결한 함수라 하자[그림 1]. 이렇게 근사화된 분포함수를 이용하면, 다음 단계의 분포함수를 계산할 수 있다. $F^{(a+1)}(c_k)\,(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$의 값은 다음과 같이 구해진다. 여기서는 편의상 $F^{(a+1)}(x)$를 $F(x)$라고 쓴다.



[그림 1] 분포함수 $F(x)$의 선형 근사화

먼저 k번째 구간에서의 근사화된 분포의 기울기를 $m_i(k)$라 하면, $m_i(k)$는 아래와 같이 계산된다.

$$m_i(k) = \frac{H_i(c_k) - H_i(c_{k-1})}{c_k - c_{k-1}} \tag{13}$$

A_i가 C보다 작은 경우는 다음과 같이 $F(c_k)$가 계산된다.

$$F_i(c_k) = H_i(c_k) + \int_{c_k}^{c_n} h_i(u)\, e^{w_i(u-c_k)}\, du + [e_i - H_i(c_n)]\, e^{w_i(c_n - c_k)} \tag{14}$$

이 식은 식 (13)에서 정의한 $m_i(k)$를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$F_i(c_k) = H_i(c_k) + \sum_{j=k+1}^{n} m_i(j) \int_{c_{j-1}}^{c_j} e^{w_i(u-c_k)}\, du + [e_i - H_i(c_n)]\, e^{w_i(c_n - c_k)} \tag{15}$$

위의 식의 적분부분을 계산해주면, 아래의 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_i(c_k) = H_i(c_k) + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{m_i(j)}{w_i}[e^{w_i(c_j - c_k)} - e^{w_i(c_{j-1} - c_k)}] + [e_i - H_i(c_n)]e^{w_i(c_n - c_k)} \quad (16)$$

그리고 A_i가 C보다 큰 경우는 다음과 같이 $F(c_k)$가 계산된다.

$$F_i(c_k) = H_i(0)(1 - e^{-w_i c_k}) + \int_0^{c_k} h_i(u)[1 - e^{-w_i(c_k - u)}]du \quad (17)$$

$m_i(k)$를 이용하여 계산하면, 아래와 같이 나타내지고,

$$F_i(c_k) = H_i(0)(1 - e^{-w_i c_k}) + \sum_{j=1}^{k} m_i(j) \int_{c_{j-1}}^{c_j} [1 - e^{-w_i(c_k - u)}]du \quad (18)$$

위 식의 적분부분은, 아래의 식과 같이 나타내진다.

$$F_i(c_k) = H_i(0)(1 - e^{-w_i c_k}) + \sum_{j=1}^{k} m_i(j)(c_j - c_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k} \frac{m_i(j)}{w_i}[e^{-w_i(c_k - c_j)} - e^{-w_i(c_k - c_{j-1})}] \quad (19)$$

마지막으로 A_i와 C가 같은 경우, $F_i(c_k) = H_i(c_k)$가 된다.

이 방법의 경우 $F_i(c_k)$의 계산 복잡도가 $O(n)$이 되고, n개의 값을 평가해야 하기 때문에 $O(n^2)$이 필요하다. 그리고 도착률의 상태 수를 N이라 하면, 1번 반복(iteration)하는데, 필요한 계산의 복잡도는 $O(n^2N)$이 된다.

(2) 구간 크기가 모두 같은 경우

구간크기를 $\Delta = B/n$이라 하면,

$c_k = k\Delta$,

$$m_i(j) = \frac{H_i(j\Delta) - H_i((j-1)\Delta)}{\Delta} \quad (20)$$

가 되고, $\omega_i = w_i\Delta$, $p_i = e^{\omega_i}$로 놓으면, 식 (16)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.(수식 전개의 편의상 $F_i(k\Delta)$, $H_i(k\Delta)$를 $F_i(k)$, $H_i(k)$로 쓰기로 한다.

$$F_i(k) = H_i(k) + p_i^{n-k}[e_i - H_i(B^-)] + \frac{1}{\omega_i}\sum_{j=k+1}^{n}[H_i(j) - H_i(j-1)][p_i^{j-k} - p_i^{j-k-1}] \quad (21)$$

위 식의 Σ 부분을 다음과 같이 정의하면,

$$S_i(k) = \sum_{j=k+1}^{n}[H_i(j) - H_i(j-1)][p_i^{j-k} - p_i^{j-k-1}] \quad (22)$$

$S_i(k)$와 $S_i(k-1)$의 관계식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} S_i(k-1) &= \sum_{j=k}^{n}[H_i(j) - H_i(j-1)][p_i^{j-k+1} - p_i^{j-k}] \\ &= (p_i - 1)[H_i(k) - H_i(k-1)] + p_i\sum_{j=k+1}^{n}[H_i(j) - H_i(j-1)][p_i^{j-k} - p_i^{j-k-1}] \\ &= (p_i - 1)[H_i(k) - H_i(k-1)] + p_i S_i(k) \end{aligned} \quad (23)$$

위의 관계식을 이용하면, 다음과 같이 $S_i(k)$를 순차적으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &S_i(n) = 0 \\ &S_i(k) = (p_i - 1)[H_i(k+1) - H_i(k)] + p_i S_i(k+1) \\ &\qquad k = n-1, n-2, \cdots, 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$\omega_i = w_i\Delta$, $p_i = e^{-\omega_i}$로 놓으면, 식 (25)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_i(k) = H_i(0)(1-p_i^k) + \sum_{j=1}^{k}[H_i(j)-H_i(j-1)] - \frac{1}{\omega_i}\sum_{j=1}^{k}[H_i(j)-H_i(j-1)][p_i^{k-j} - p_i^{k-j+1}] \quad (25)$$

위 식에서 $\sum_{j=1}^{k}[H_i(j)-H_i(j-1)]$ 부분은 $[H_i(k) - H_i(0)]$가 된다. 그리고 두 번째 Σ 부분을 다음과 같이 정의하면,

$$S_i(k) = \sum_{j=1}^{k}[H_i(j)-H_i(j-1)][p_i^{k-j} - p_i^{k-j+1}] \quad (26)$$

아래와 같은 관계식을 유도할 수 있다.

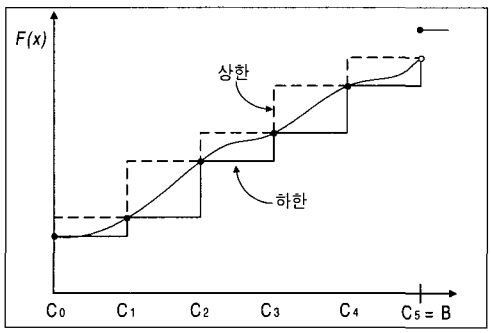
$$\begin{aligned} S_i(k+1) &= \sum_{j=1}^{k+1}[H_i(j)-H_i(j-1)][p_i^{k-j+1} - p_i^{k-j+2}] \\ &= p_i\sum_{j=1}^{k}[H_i(j)-H_i(j-1)][p_i^{k-j} - p_i^{k-j+1}] \\ &\quad + (1-p_i)[H_i(k+1) - H_i(k)] \\ &= p_i S_i(k) + (1-p_i)[H_i(k+1) - H_i(k)] \end{aligned} \quad (27)$$

위의 관계식을 이용하면, $S_i(k)$는 다음과 같이 순차적으로 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} &S_i(0) = 0 \\ &S_i(k) = p_i S_i(k-1) + (1-p_i)[H_i(k) - H_i(k-1)] \\ &\qquad k = 1, 2, 3, \cdots, n \end{aligned} \quad (28)$$

위와 같은 순환식을 사용하는 경우, 상태 i의 n개의 분포함수 값을 평가하는데, 필요한 계산의 복잡도는 $O(n)$이 된다. 따라서 N개의 상태에 대해서 계산하는 경우의 계산의 복잡도는 $O(nN)$이 된다.

(3) $F(x)$의 상한(upper bound)과 하한(lower bound) 계산



[그림-2] 분포함수 $F(x)$의 상한

분포함수 $F(x)$의 상한과 하한은 [그림-2]와 같은 계단함수(step function)로 나타낼 수 있다. $F(x)$의 상한과 하한의 분포함수는 이산분포의 형태를 띠게 된다. 이와 같은 분포를 가정하는 경우, 구간의 양끝에서 확률값이 정의되고, 나머지 부분에서는 0이 된다. 구간크기가 모두 같은 경우의 상한과 하한을 계산하는 방법에 대해 알아본다.

상태 i로의 전이 직후의 버퍼상태의 분포함수를 $H_i(x)$라 하면, $H_i(x)$의 상한과 하한분포는 이산분포가 되고, 버퍼상태가 $k\Delta$일 확률은 $H_i(k\Delta) - H_i((k-1)\Delta)$가 된다.

$H_i(x)$의 하한분포의 확률 질량함수

$$P_i(k) = \begin{cases} P_i(0) = H_i(0) \\ H_i(k) - H_i(k-1), \\ \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1 \\ P_i(n) = e_i - H_i(n-1) \end{cases} \quad (29)$$

그리고 상한의 분포는 $P_i(k)$를 $P_i(k+1)$ 값으

로 바꿔주면 된다.

$H_i(x)$ 의 하한분포의 확률 질량함수

$$P_i(k) = \begin{cases} P_i(0) = H_i(1) \\ H_i(k+1) - H_i(k), \\ \qquad\qquad k = 1, 2, \cdots, n-1 \\ P_i(n) = e_i - H_i(n) \end{cases} \tag{30}$$

이렇게 정의된 $H_i(x)$ 의 상한과 하한 분포를 이용하여, $F_i(x)$ 를 반복해서 계산하면 분포함수의 상한과 하한의 수렴된 분포함수를 얻을 수 있다.

먼저 상태 i 의 도착률이 다중화 장치의 서비스 용량보다 작은 경우에 대해 알아보자.

$\omega_i = w_i \Delta$, $p_i = e^{\omega_i}$ 로 정의하면, $F_i(k)$ 는 다음과 같이 계산될 수 있다. 앞 절의 내용과 달라지는 부분은 연속분포함수인 $H_i(x)$ 를 이용하지 않고, 이산분포인 $P_i(k)$ 를 이용한다는 점이다.

$$F_i(k) = \sum_{j=0}^{k} P_i(j) + \sum_{j=k+1}^{n} P_i(j)\, p_i^{j-k} \tag{31}$$

위 식에서 $\sum_{j=0}^{k} P_i(j)$ 는 상한인 경우 $H_i(k+1)$ 이 되고, 하한인 경우 $H_i(k)$ 가 된다.
그리고 뒤쪽의 Σ 부분은 아래의 순환식을 이용하여,

$$S_i(k) = \sum_{j=k+1}^{n} P_i(j)\, p_i^{j-k} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} S_i(k-1) &= \sum_{j=k}^{n} P_i(j)\, p_i^{j-k+1} \\ &= p_i[S_i(k) + P_i(k)] \end{aligned} \tag{33}$$

다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_i(n) = 0$$

$$S_i(k) = p_i[S_i(k+1) + P_i(k+1)]$$

$$k = n-1, n-2, \cdots, 0 \tag{34}$$

상태 i 의 도착률이 다중화 장치의 서비스 용량보다 큰 경우는 다음과 같이 계산될 수 있다. $\omega_i = w_i \Delta$, $p_i = e^{-\omega_i}$ 로 정의하면, $F_i(k)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$\begin{aligned} F_i(k) &= \sum_{j=0}^{k-1} (1 - p_i^{k-j}) P_i(j) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} P_i(j) - \sum_{j=0}^{k-1} P_i(j)\, p_i^{k-j} \end{aligned} \tag{35}$$

위 식에서 $\sum_{j=0}^{k-1} P_i(j)$ 는 상한인 경우 $H_i(k)$ 가 되고, 하한인 경우 $H_i(k-1)$ 이 된다.
그리고 뒤쪽의 Σ 부분은 아래의 순환식을 이용하여,

$$S_i(k) = \sum_{j=0}^{k-1} P_i(j)\, p_i^{k-j} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} S_i(k+1) &= \sum_{j=0}^{k} P_i(j)\, p_i^{k-j+1} \\ &= p_i[S_i(k) + P_i(k)] \end{aligned} \tag{37}$$

다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_i(0) = 0$$

$$S_i(k) = p_i[S_i(k-1) + P_i(k-1)] \tag{38}$$

$$k = 1, 2, 3, \cdots, n$$

이 방법을 사용하는 경우도 앞의 근사화 방법과 마찬가지로 1회 반복하는데 필요한 계산의 복잡도는 $O(nN)$ 이 된다. 분포함수의 관점에서의 상한과 하한은 오버플로우 확률의 관점, 즉 $\overline{F}(x)$의 관점에서 본다면, 분포함수의 상한이 $\overline{F}(x)$의 하한이 되고, 분포함수의 하한이 $\overline{F}(x)$의 상한이 된다.

(4) 셀 손실률 계산식

셀 손실률은 평균 도착률과 평균 손실률의 비율로 정의될 수 있다. 이 경우 셀 손실률 계산식은

다음과 같다.

- 임의 시점에서 시스템을 관측한 경우의 셀 손실률 계산식

$$CLP=\frac{\sum_i \max\{A_i - C,\ 0\}[\pi_i - F_i(B^-)]}{\sum_i A_i \pi_i} \quad (39)$$

- 도착률의 상태전이 시점에서 시스템을 관측한 경우의 셀 손실률 계산식

$$CLP=\frac{\sum_i \max\{w_i,\ 0\}[e_i - F_i(B^-)]}{\sum_i A_i e_i/\gamma_i} \quad (40)$$

위의 셀 손실률을 이용하면, 앞에서 제시한 세 가지 방법을 이용하여, 근사해와 셀 손실률의 상한과 하한을 구할 수 있다.

5. 실험예제

실험은 2개 클래스의 ON-OFF 소스가 중첩된 경우에 대하여 실시하였다. 클래스 i의 ON-OFF 소스의 OFF에서 ON으로의 전이율을 α_i, ON에서 OFF로의 전이율을 β_i, ON 기간동안의 유체의 입력률을 A_i, 그리고 중첩된 ON-OFF 소스의 개수를 M_i라 하고, 다중화 장치의 용량을 C라 하자. 이 경우 총 입력 트래픽의 평균 입력률과 분산, 자동상관계수는 다음과 같이 계산된다.

- 평균 : $m = m_1 + m_2$

$$m_1 = M_1\frac{\alpha_1 A_1}{\alpha_1+\beta_1} \qquad m_2 = M_2\frac{\alpha_2 A_2}{\alpha_2+\beta_2}$$

- 분산 : $V = V_1 + V_2$,

$$V_1 = M_1\frac{\alpha_1\beta_1 A_1^2}{(\alpha_1+\beta_1)^2} \qquad V_2 = M_2\frac{\alpha_2\beta_2 A_2^2}{(\alpha_2+\beta_2)^2}$$

- 자동상관계수 :

$$a(t) = \frac{V_1 e^{-(\alpha_1+\beta_1)t} + V_2 e^{-(\alpha_2+\beta_2)t}}{V_1+V_2}$$

실험은 다음과 같은 파라미터하에서 실시하였고, 세 실험 모두 $M_1 = 20$, $M_2 = 5$로 하였다.

[실험 1] $m_1 = 30$, $m_2 = 60$,
$V_1 = 20$, $V_2 = 80$,
$\alpha_1 + \beta_1 = 1$, $\alpha_2 + \beta_2 = 1$

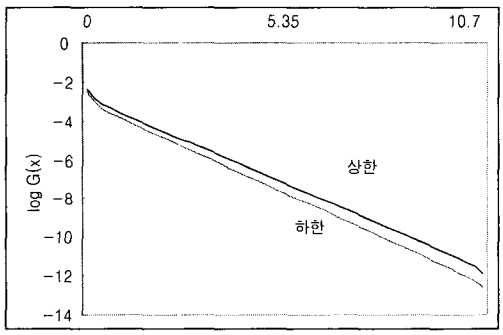
[실험 2] $m_1 = 45$, $m_2 = 45$,
$V_1 = 50$, $V_2 = 50$,
$\alpha_1 + \beta_1 = 1$, $\alpha_2 + \beta_2 = 1$

[실험 3] $m_1 = 60$, $m_2 = 30$,
$V_1 = 80$, $V_2 = 20$,
$\alpha_1 + \beta_1 = 1$, $\alpha_2 + \beta_2 = 1$

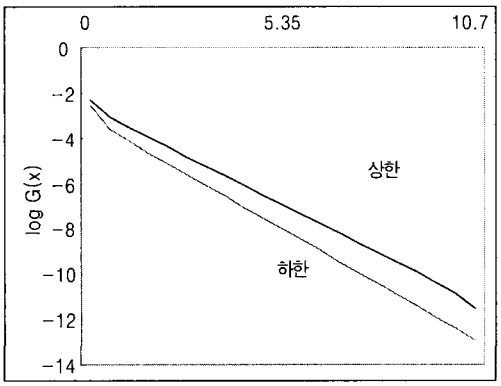
위의 3가지 실험에 대한 ON-OFF 소스의 파라미터는 다음과 같다.

	클래스 1				클래스 2			
	α_1	β_1	A_1	M_1	α_1	β_1	A_1	M_1
실험 1	0.6923	0.3077	2.167	20	0.9	0.1	13.3333	5
실험 2	0.6694	0.3306	3.361	20	0.8901	0.1099	10.111	5
실험 3	0.6923	0.3077	4.333	20	0.9	0.1	6.6667	5

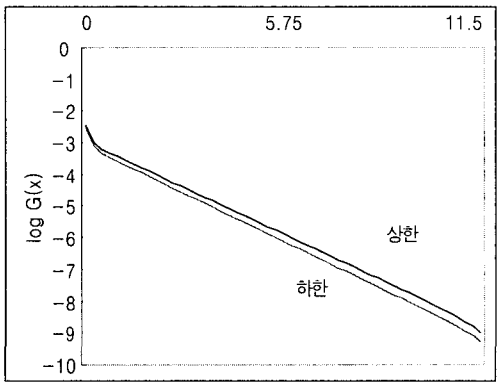
다중화 장치의 용량 C는 각각 107, 113, 115(Mbps)로 하였다. 그리고 버퍼크기는 세 실험 모두 $B = 0.1C$로 하였고 Y 축의 값은 $G(x) = 1 - F(x)$에 대수값을 취하였다. 각 그래프의 가운데 선은 근사분석인 경우이다.



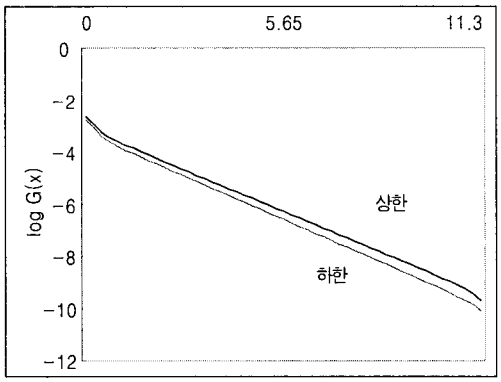
[그림 3] 50개의 구간으로 나눈 경우의 버퍼상태의 분포함수[실험 1]



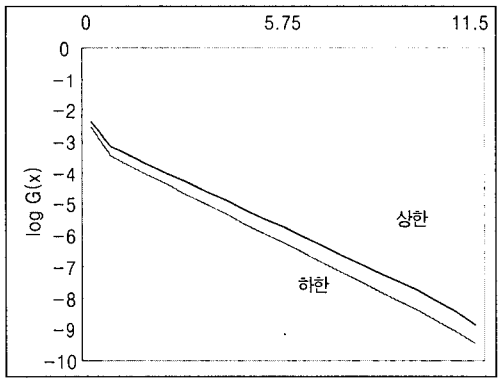
[그림 4] 20개의 구간으로 나눈 경우의 버퍼상태의 분포함수[실험 1]



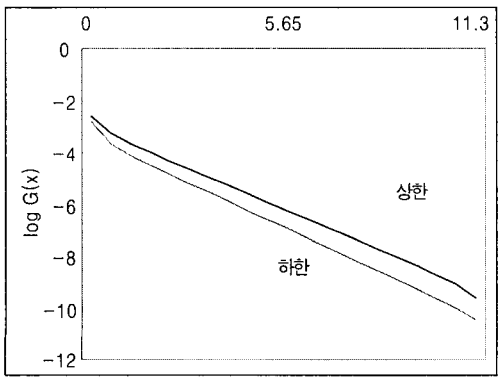
[그림 7] 50개의 구간으로 나눈 경우의 버퍼상태의 분포함수[실험 3]



[그림 5] 50개의 구간으로 나눈 경우의 버퍼상태의 분포함수[실험 2]



[그림 8] 20개의 구간으로 나눈 경우의 버퍼상태의 분포함수[실험 3]



[그림 6] 20개의 구간으로 나눈 경우의 버퍼상태의 분포함수[실험 2]

6. 결 론

본 연구에서는 기존의 SFF 모형의 분석방법과는 다른 접근방법을 사용하여 SFF 모형을 분석하였다. 기존의 SFF 모형은 임의 시점에서 시스템을 관측했을 때의 분포함수에 대한 미분방정식을 유도하여 분석하였지만, 본 연구에서는 도착률의 상태 전이시점에 시스템을 관측한 경우의 버퍼상태에 대한 방정식을 유도하여 분석하였다.

본 연구에서 제시한 방법을 이용하면, 미분방정식을 풀 때 발생하는 수치에러가 거의 발생하지 않

고 고유값, 고유벡터, 그리고 경계조건을 이용하여 계수를 구하는 과정을 거치지 않고도 근사해와 해의 상한, 하한을 구할 수 있다.

본 연구에서 제시한 방법은 SFF 모형의 도착률의 상태전이를 나타내는 마코프 연쇄의 구조가 ON-OFF 소스의 중첩모형과 같은 특수한 형태가 아니라 하더라도 쉽게 분석이 가능하고 이 분석방법을 확장하면, 각 상태에서 머무르는 시간이 지수분포가 아닌 경우의 SMP 모형에 대해서도 적용이 가능할 것이다.

참 고 문 헌

[1] Anick, S., D. Mitra, M.M. Sondhi, "Stochastic Theory of a Data-Handling Systems with multiple sources," *Bell System Tech. J.*, Vol.61, No.8(1982), pp.1871-1894.

[2] Baiocchi, A., N. Blefari-Melazzi, "An Error-Controlled Approximate Analysis of a Stochastic Fluid Flow Model Applied to an ATM Multiplexer with Heterogeneous On-Off Sources," *IEEE/ACM Trans. on Networking*, Vol.1, No.6(1993), pp.628-637.

[3] Igelnik, B., Y. Kogan, V. Kriman, D. Mitra, "A New Computational Approach for Stochastic Fluid Models of Multiplexers with Heterogeneous Sources," *Queueing Systems*, Vol.20(1995), pp.85-116.

[4] Coffman, E.G., B.M. Igelnik, Y.A. Kogan, "Controlled Stochastic Model of a Communication System with Multiple Sources," *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol.37, No.5(1991), pp.1379-1387.

[5] Quian, K., D. McDonald, "An Approximation Method for Complete Solutions of Markov-Modulated Fluid Models," *IEEE INFOCOM* (1995), pp.1406-1411.

[6] Blaabjerg, S., H. Andersson, "Approximating the Heterogeneous Fluid Queue with a Birth-Death Fluid Queue," *IEEE Trans. on Comm.*, Vol.43, No.5(1995), pp.1884-1887.

[7] Guilbert, J., "Overflow Probability Upper Bound for Heterogeneous Fluid Queues Handling General On-Off Sources," *ITC* (1994), pp.65-74.

[8] Baiocchi, A., N.B. Melazzi, M. Listani, "Loss Performance Analysis of an ATM Multiplexer Loaded with High-Speed On-Off Sources," *IEEE J.S.A.C.*, Vol.9, No.3(1991), pp.388-393.

[9] Kosten, L., "Stochastic Theory of a Data-Handling Systems with Group of Multiple Sources," *Performance of Computer Communication Systems*(1984), Ed H. Rudin and W. Bux, Elsevier, Amsterdam, pp. 321-331.

[10] Yang, T., D.H.K. Tsang, "A Novel Approach to Estimating Cell Loss Probability in an ATM Multiplexer Loaded with Homogeneous Bursty Sources," *GLOBECOM* (1992), pp.511-517.

[11] Chan, J.H.S., D.H.K. Tsang, "Bandwidth Allocation of Multiple QOS Classes in ATM Environment," *IEEE INFOCOM*(1994), pp. 360-367.

[12] Heffes, H., D.M. Lucatoni, "A Markov modulated Characterization of Packetized Voice and Data Traffic and Related Statistical Multiplexer Performance," *IEEE J.S.A.C.*, Vol.4(1986), pp.856-868.

[13] Mitra, D., "Stochastic Theory of a Fluid Model of Producers and Consumers Coupled by a Buffer," *Adv. Appl. Prob.* Vol.20(1988), pp.646-676.

[14] Maglaris, B., D. Anastassiou, P. Sen, G. Karlsson, J.D. Robbins, "Performance Mo-

dels of Statistical Multiplexing in Packet Video Communication," *IEEE Trans. on Comm.* Vol.36, No.7(1988), pp.834-844.

[15] Morrison, J.A., "Asymtotic Analysis of a Data-Handling System with Many Sources," *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.49, No.2(1989), pp.617-637.

[16] Sen, P., B. Maglaris, N.E. Rikli, D. Anastassiou, "Models for Packet Switching of Variable-Bit-Rate Video Sources," *IEEE J.S.A.C.*, Vol.7, No.5(1989), pp.865-869.

[17] Stern, T.E., A. I. Elwald, "Analysis of Separable Markov-Modulated Rate Models for Information Handling Systems," *Adv. Appl. Prob.* Vol.23(1991), pp.105-139.