

자유단의 스프링 상수와 부가 말단질량이 종동력을 받는
Timoshenko 외팔보의 안정성에 미치는 영향

Influence of Spring Constant and Tip Mass at Free End on Stability of
Timoshenko Cantilever Column subjected to a Follower Force

손 종 동*

Jong-Dong Son

(1998년 6월 29일 접수, 1998년 11월 17일 채택)

ABSTRACT

On the stability of the Timoshenko cantilever column subjected of a compressive follower force, the influences of the moment of inertia of the tip mass at the free end and the characteristics of a translational spring at the free end of the column are studied. The equations of motion and boundary conditions of system are established by using the d'Alembert virtual work of principle. On the evaluation of stability of the column, the effect of the shear deformation and rotatory inertia is considered in calculation. The moment of inertia of the tip mass at the free end of the column is changed by adjusting the distance c , from the free end of the column to the tip mass center. The free end of the column is supported elastically by a translational spring. For the maintenance of the good stability of the column, it is also proved that the constant of the translational spring at the free end must be very large for the case without a tip mass while it must be small for the case with a tip mass. Therefore, it is found that the shape of the tip mass and the characteristic of the spring at the free end are very effective elements for the stability of the column when the columns subjected to a compressive follower force are designed.

1. 서 론

자동차, 항공 및 우주산업의 발달과 함께 비보

존력을 받는 탄성체의 안정성 문제가 대단히 중요한 연구과제로 관심을 모으고 있다. 탄성계의 탄성안정 기초이론은 Euler¹⁾에 의하여 연구되었

* 동명대학

으며, Euler는 탄성계에 작용하는 외력을 모두 보존력으로 생각하여 계의 안정성을 연구하였다. 1883년 Greenhill²⁾이 축하중과 비틀림을 받는 축의 탄성 안정 문제를 정적방법으로 연구하는 과정에서 Euler의 정적 방법에 의심을 갖게 되었으며, 그이후 Euler의 정적방법은 탄성계의 안정성을 검토함에 있어서 모든 경우에 적합하지 않음이 Ziegler³⁾에 의하여 지적되었다. Ziegler는 Greenhill이 연구한 축하중과 비틀림을 받는 축의 탄성안정 문제를 다시 연구하였으며, Euler의 정적방법이 적용되지 않음은 계에 작용하는 외력이 보존력이 아니라 비보존력이기 때문이라고 주장하였다. 1952년 Beck는 자유단에 압축 종동력이 작용하는 균일단면을 일단 고정 타단 자유인 기둥(이하 Beck기둥이라 한다.)의 임계플러터 하중(critical flutter load)을 동적 안정성 판별에 의하여 계산 하였다⁴⁾. Beck가 임계 플러터 하중, 즉 기둥이 안정을 잃는 좌굴하중은 Euler의 좌굴하중보다 8배 이상의 큰 값이었다.

Beck기둥의 안정성에 관한 연구는 계속되어 Nemat-naser⁵⁾ Kounadis와 Katsikadelis⁶⁾들은 기둥의 전단변형과 회전관성이 Beck기둥의 임계플러터 하중을 감소시킴을 보고하였고, Deineko와 Leonov⁷⁾들은 Beck기둥의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다. Kounadis⁸⁾는 압축 종동력을 받는 Timoshenko보의 안정성에 미치는 집중질량과 그 관성모우멘트의 영향을 계산하였다. 그러나 이들이 연구한 집중질량의 영향은 실제 계에서 거의 찾아볼 수 없으며, 또한 집중질량의 관성모우멘트는 존재하지 않는다.

최근에 와서 Bhat와 Wagner⁹⁾, Kulkarni¹⁰⁾ Flax¹¹⁾ 등은 중심이 보의 끝과 일치하지 않는 말단질량이 부착된 균일단면 외팔보의 고유횡단진동수에 관해서 연구하였다.

연료탱크를 부착한 비행기의 날개나 미사일은 실제로 이러한 모델을 가지며, 인공위성의 운반로켓도 같은 유형이다. Beck 기둥의 안정성에 관한 연구는 계속되어 윤·김¹²⁾은 말단 질량의 관성 모우멘트와 고정단의 스프링 특성이 Beck기둥의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다. 말단 질량의 관성모우멘트의 영향을 명확히 하기 위하여 말단질량의 크기를 고정시키고 말

단질량의 무게중심을 기둥의 자유단으로 부터 조정하여 그 관성 모우멘트를 변화시키면서 기둥의 임계플러터 하중과 임계플러터 진동수를 계산하였다. 또 윤·진¹³⁾은 말단질량을 가진 Beck기둥과 등분포 접선 종동력을 받는 균일단면의 일단고정 타단자유인 Leipholz기둥의 운동방정식을 기둥단면의 회전관성과 전단변형을 고려하여 유한요소법을 사용하여 유도하였다.

본 논문에서는 보의 전단변형과 회전관성의 영향을 고려하고 Timoshenko 전단계수 K' 는 Cowper¹⁴⁾ 공식으로 결정하여 보의 자유단을 탄성구속하는 병진스프링 상수가 계의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다.

2. 이론해석

Fig. 1의 계는 외팔보의 자유단이 병진스프링으로 탄성지지된 일단고정 타단자유의 Timoshenko 외팔보이고, 그 자유단에는 부가말단질량이 부착되고 또 비보존적 압축종동력이 작용하는 탄성계이다. 부가말단질량의 중심은 외팔보의 자유단으로 부터 c 만큼 떨어져 있으며, 이 c 값의 크기에 따라서 자유단에 관한 부가말단질량 관성모우멘트가 증감한다.

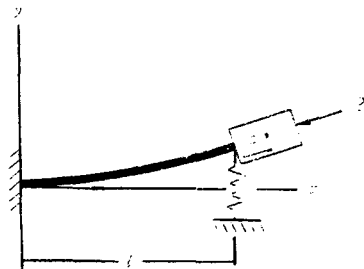


Fig. 1 Elastically restrained Timoshenko cantilever column carried a tip mass and subjected to a compressive follower force

이 비보존적 탄성계의 임계플러터의 하중과 임계플러터 진동수를 구하기 위하여 계의 평형 위치에서 충분히 작은 횡변위를 줌으로써 교란된 운동이 일어나는 동적안정성 문제로 해석한다. 외팔보의 전단변형과 회전관성을 고려하면 외팔보의 굽힘모우멘트 $M(x, t)$ 와 변형되지 않

은 외팔보의 축에 수직인 전단력 $Q(x, t)$ 는 다음과 같다.

$$M(x, t) = -EI\varphi'(x, t) \dots\dots\dots (1a)$$

$$Q(x, t) = K' AG [ey'(x, t) - \varphi(x, t)] \quad (1b)$$

$$e = 1 - P/(K' AG) \dots\dots\dots (2c)$$

여기서 EI 는 굽힘 강성계수, $y(x, t)$ 는 외팔보의 전횡변위, $\varphi(x, t)$ 는 외팔보의 단면의 회전각이다. 중동력 P 가 작용하지 않는다면 식(1a,b)는 Timoshenko보의 굽힘모우멘트와 전단력¹⁵⁾의 식에 일치된다.

Fig. 1의 비보존적 탄성계의 운동방정식을 유도하기 위하여 앞에서 언급한 변위에 기인하는 가상일(virtual work)의 원리와 d'Alembert의 원리를 응용하면¹⁶⁾

$$\sum_{i=1}^n (F_i - m_i \ddot{u}_i) \delta u_i = 0 \dots\dots\dots (2)$$

여기서 F_i 는 작용외력이고 m 은 기둥의 단위 길이당 질량이며 δu_i 는 가상변위이다. 보에 작용하는 힘을 변형에너지(strain energy)로 부터 유도되는 보존력과 그렇지 않은 비보존력으로 나누면 식(2)의 첫항은

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta u_i &= -\delta V + \sum_{k=1}^n P_k \cdot \delta q_k \\ &= \int_0^l EI\varphi'' \delta \varphi dx + \int_0^l K' AGy'' \delta y dx \\ &\quad - \int_0^l K' AG\varphi' \delta y dx + \int_0^l K' AGy' \delta \varphi dx \\ &\quad - \int_0^l K' AG\varphi \delta \varphi dx - [EI\varphi']_0^l \delta \varphi \\ &\quad - [K' AGy']_0^l \delta y + [K' AG\varphi]_0^l \delta y \\ &\quad - C_T y(l, t) \delta y(l, t) \\ &\quad - \int_0^l P\ddot{y} \delta y dx - P y'(0, t) \delta y(0, t) \dots\dots (3) \end{aligned}$$

여기서 V 는 보의 변형에너지이고 q_k 는 일반 좌표이다. 평행축 정리를 도입하면 보의 자유단에서 말단질량의 관성모우멘트는, $J_c + M_i c^2$ 이 되므로 식(2)의 둘째항은

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{u}_i \cdot \delta u_i &= \int_0^l m \ddot{y} \delta y dx \\ &\quad + \int_0^l \rho I \ddot{\varphi} \delta \varphi dx + M_i \ddot{y}(l, t) \delta y(l, t) \end{aligned}$$

$$+ (J_c + M_i c^2) \ddot{\varphi}(l, t) \delta \varphi(l, t) \dots\dots\dots (4)$$

가 된다.

식(3)과 식(4)를 식(2)에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^l (\rho A \ddot{y} - K' AGy'' + K' AG\varphi' + Py'') \delta y dx &+ \int_0^l (\rho I \ddot{\varphi} - EI\varphi'' + K' AG\varphi - K' AGy') \delta \varphi dx \\ &+ [K' AG\varphi(0, t) - K' AGy'(0, t) + Py'(0, t)] \delta y(0, t) \\ &- [EI\varphi'(0, t)] \delta \varphi(0, t) \\ &+ [K' AGy'(l, t) - K' AG\varphi(l, t) + M_i \ddot{y}(l, t) + C_T y(l, t)] \delta y(l, t) \\ &+ [EI\varphi'(l, t) + (J_c + M_i c^2) \ddot{\varphi}(l, t)] \delta \varphi(l, t) \\ &= 0 \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

으로 정리된다.

식(5)로 부터 다음의 미분방정식(6a,b)와 경계 조건의 식(7a,b,c,d)를 얻는다.

$$\rho I \ddot{\varphi} - EI\varphi'' + K' AG\varphi - K' AGy' = 0 \dots\dots\dots (6a)$$

$$m \ddot{y} - K' AGy'' + K' AG\varphi' + Py'' = 0 \dots\dots\dots (6b)$$

$x=0$ 에서

$$y(0, t) = 0 \dots\dots\dots (7a)$$

$$\varphi(0, t) = 0 \dots\dots\dots (7b)$$

$x=l$ 에서

$$EI\varphi'(l, t) + (J_c + M_i c^2) \ddot{\varphi}(l, t) = 0 \dots\dots (7c)$$

$$Q(l, t) + Py'(l, t) + m_i y'(l, t) + C_T y(l, t) = 0 \dots\dots\dots (7d)$$

식(6a)를 x 에 대하여 미분하여 식(6a,b)를 다시 정리하면 식(8a,b)를 얻는다.

$$EI\varphi''' - \rho I \dot{\varphi}' + m \dot{y} + Py'' = 0 \dots\dots\dots (8a)$$

$$K' AG(y'' - \varphi') - m \ddot{y} - Py'' = 0 \dots\dots (8b)$$

식(1b)를 이용하여 식(7a,b,c,d)를 정리하면 식(9a,b,c,d)를 얻는다.

$x=0$ 에서

$$y(0, t) = 0 \dots\dots\dots (9a)$$

$$\varphi(0, t) = 0 \dots\dots\dots (9b)$$

$x=l$ 에서

$$EI\varphi'(l, t) + (J_c + M_c c^2)\ddot{\varphi}(l, t) = 0 \quad \dots\dots (9c)$$

$$Q(l, t) + Py'(l, t) + M_c \ddot{y}(l, t) + C_T y(l, t) = 0 \quad \dots\dots (9d)$$

식(8a,b)와 식(9a,b,c,d)는 가상일의 원리와 Hamilton¹²⁾의 원리를 적용해서 유도한 미분방정식과 경계조건의 식에 잘 일치되며, 식(8a,b)로부터 다음 운동방정식을 얻는다.

$$E y'''' - \rho \left(\frac{1}{K' G} + \frac{e}{E} \right) \ddot{y} + \frac{P}{EI} y'' - \frac{m}{EI} \dot{y} + \frac{\rho^2}{K' EG} y = 0 \quad \dots\dots (10)$$

그런데 종동력 P에 의해서 발생하는 전단력은 외팔보의 변형된 축선에 수직함은 사실이다. 그러나, 전단변형에 기인하는 전단각 ($y' - \varphi$)은 대단히 작으므로 축력이 전단력에 미치는 효과와 마찬가지로 종동력이 전단력에 미치는 효과도 축의 굽힘에 의한 단면의 회전각에 대해서만 생각하면, $Py' \approx P\varphi$ 로 둘 수 있다.

그러나 $K'AGy' \approx K'AG\varphi$ 로 둘 수 없음은 P에 비하여 G는 대단히 크기 때문이다. 그러므로 식(8b)의 Py'' 항을 $P\varphi''$ 로 고쳐쓰면

$$K'AG(y'' - \varphi'') - m\ddot{y} - P\varphi'' \approx 0 \quad \dots\dots (11)$$

이 되고 식(11)과 식(8a)를 이용하여 식(10)을 정리하면 다음과 같다.

$$y'''' - \rho \left(\frac{1}{K' G} + \frac{1}{E} \right) \ddot{y} + \frac{m}{EI} \dot{y} + \frac{P}{EI} y'' + \frac{\rho^2}{K' EG} y = 0 \quad \dots\dots (12)$$

여기서

$$I^* = \frac{I}{1 + \frac{P}{K'AG}} \quad \text{이다.}$$

외팔보의 운동방정식(12)의 해를

$$y(x, t) = v(x)e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1} \quad \dots\dots (13)$$

라고 가정하여, 식(13)을 식(12)에 대입하고, 무차원 독립변수

$$\tau = \frac{x}{l}, \quad (0 \leq \tau \leq 1) \quad \dots\dots (14)$$

를 도입하면, 식(12)는

$$\frac{d^4 v(\tau)}{d\tau^4} + \beta^2 \frac{d^2 v(\tau)}{d\tau^2} - \zeta v(\tau) = 0 \quad \dots\dots (15)$$

의 무차원화된 식이 된다. 여기서

$$\beta^2 = \frac{\rho \omega^2 l^2}{K' G} + \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} + \frac{Pl^2}{EI^*} \quad \dots\dots (16a)$$

$$\zeta = \frac{m\omega^2 l^4}{EI^*} \left(1 - \frac{\rho^2 \omega^2 l^2}{mK' G} \right) \quad \dots\dots (16b)$$

이다. 또

$$Q(x, t) = Q(x)e^{i\omega t}$$

$$\varphi(x, t) = \varphi(x)e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1} \quad \dots\dots (17)$$

$$\varphi'(x, t) = \varphi'(x)e^{i\omega t}$$

이라 두고, 경계조건의 식(19a,b,c,d)에 식(13)과 식(17)을 대입하고 식(14)에 의하여, 다음과 같이 무차원화된 경계조건의 식을 얻는다.

$\tau = 0$ 에서

$$v(0) = 0 \quad \dots\dots (18a)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \dots\dots (18b)$$

$\tau = 1$ 에서

$$(EI/l)\varphi'(1) - \omega^2(J_c + M_c c^2)\varphi(1) = 0 \quad \dots\dots (18c)$$

$$Q(1) + (P/l)v'(1) - \omega^2 M_c v(1) + C_T v(1) = 0 \quad \dots\dots (18d)$$

식(15)의 해는 $v = C e^{\lambda \tau}$ 의 형태이고, $e^{\pm \lambda_1} = \cosh \lambda_1 \pm i \sin \lambda_1$, $e^{\pm \lambda_2} = \cos \lambda_2 \pm i \sin \lambda_2$ 의 관계로부터 그 일반해는

$$v(\tau) = C_1 \cosh \lambda_1 \tau + C_2 \sinh \lambda_1 \tau + C_3 \cos \lambda_2 \tau + C_4 \sin \lambda_2 \tau \quad \dots\dots (19)$$

가 되고, 여기서

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\beta^4 + 4\zeta)^{\frac{1}{2}} + (-1)^n \beta^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2 \quad \dots\dots (20)$$

이다. 또 λ_1 과 λ_2 의 관계는 다음과 같다.

$$\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = \beta^2, \quad \lambda_1^2 \times \lambda_2^2 = \zeta \quad \dots\dots (21)$$

경계조건의 식(18a,b,c,d)에 나타나는 전단력 $Q(\tau)$ 와 외팔보의 단면의 회전각 $\varphi(\tau)$, 그리고 굽힘모우멘트 $M(\tau)$ 는 식(1a,b)와 식(11)로부터 다음과 같이 유도된다. 여기서 $\varphi(\tau)$ 는 굽힘에 의해서만 발생하는 단면의 회전각이다.

$$Q(\tau) = - \frac{\frac{EI}{l^3}}{1 - \frac{\rho \omega^2 l}{K' AG}} [v'''(\tau)]$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta^2 v'(\tau) \dots\dots\dots (22) \\
 M(\tau) = & -\frac{EI^*}{I^2} \left[v''(\tau) + \frac{\rho \omega^2 I^2}{K' AG} v(\tau) \right] \dots\dots\dots (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(\tau) = & \frac{\frac{1}{l}}{1 + \frac{P}{K' AG}} \left[v'(\tau) - \frac{l}{K' AG} \cdot Q(\tau) \right] \dots\dots (24)
 \end{aligned}$$

이제, 다음과 같은 무차원 매개변수식을 도입하고

$$\begin{aligned}
 \alpha = \frac{c}{l}, \quad s = \frac{2l}{k}, \quad \varepsilon = \frac{E}{G}, \quad \mu = \frac{M_t}{ml}, \\
 K_T = \frac{C_T l^3}{EI}, \quad \gamma = \frac{J_c}{ml^3}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho A \omega^2 l^4}{EI}, \dots\dots\dots (25) \\
 \theta = \frac{1}{1 - \frac{16\varepsilon \Omega^2}{K' s^4}}, \quad P_L = \frac{P}{P_E}
 \end{aligned}$$

식(19)~식(24)와 경계조건의 (19a,b,c,d)에 의하여 정리하면 다음 4개의 선형제차대수방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^4 b_{jk} C_k = 0, \quad j=1, 2, 3, 4 \dots\dots\dots (26)$$

대수방정식의 식(26)이 뜻을 갖는 해를 갖기 위해서는 그 계수행렬의 행렬식이 영(zero)이 되어야 한다

$$\det(b_{jk}) = 0 \dots\dots\dots (27)$$

행렬식(27)을 전개하면 압축중동력을 받는 비보존적 탄성계 Fig. 1에 대한 진동수 방정식이 된다.

3. 수치해석 및 고찰

행렬식(27)은 무차원 중동력 P_L 과 진동수 Ω^2 의 변수를 갖는다. 그러므로 충분히 작은 값 P_L 을 선택하여 식(27)을 만족시키는 Ω^2 을 구하면, 외팔보의 횡진동의 제 1, 2차 모-드에 해당되는 진동수를 얻게 된다. P_L 을 점차 증가시키면 제 1, 2차 진동수는 점점 가까워져서 겹쳐지게 되는데, 그때의 P_L 이 임계플러터하중 P_{Lcr} 이 된다.

P_L 이 P_{Lcr} 보다 작을 때에는 1, 2차 모-드의 진동수가 실수이지만, P_L 이 P_{Lcr} 보다 크게 되면 이들 진동수는 공액복소수가 되어서 무의미하게 되고 계는 안정을 잃게 된다. 플러터는 $P_L = P_{Lcr}$ 에서 시작되어 외팔보의 횡진동 진폭은 지수적으로 증가하여 불안정한 진동으로 되고, 좌굴이 일어난다.

본 수치해석에서는 서로 영향을 끼치는 매개변수 K_T, ρ, ξ, η 들의 값에 대한 하중매개변수 P_{Lcr} , 즉 무차원 임계플러터하중을 구하여 계의 안정성을 규명하였다.

외팔보 자유단의 병진스프링 상수를 여러가지로 바꾸어 계산하여 그 결과를 비교하였다. 외팔보의 자유단과 부가말단질량의 중심 사이의 거리를 조절하여 질량과 그 관성모우멘트의 크기를 증감시켰다.

외팔보의 전단변형과 회전관성을 고려하여 계산하였으며, 그들의 영향이 현저하게 나타나도록 외팔보의 세장비 S 를 64로 하였다. Poisson의 비는 0.3으로 했으며, Timoshenko의 전단계수는 Cowper¹⁴⁾의 공식으로 계산하였다.

3.1 부가말단질량과 그 관성모우멘트가 변화하는 경우

외팔보의 횡단면은 원형단면으로 하고 부가말단질량도 원형단면이며 외팔보단면의 4배가 되는 것을 일례로하여 계산하였다. 단면적을 πr^2 , 부가말단질량의 횡단면 반경을 a 라고 하면

$$\begin{aligned}
 I = \frac{\pi r^4}{4}, \quad k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{r}{2}, \quad m = \rho \pi r^2 \\
 M_t = 2\rho \pi ca^2, \quad J_c = \frac{\pi}{6} \rho c a^2 (3a^2 + 4c^2) \dots\dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

가 되고, 여기서 ρ 는 외팔보 재료의 밀도, ρ_t 는 부가말단질량의 밀도, k 는 외팔보단면의 회전반경, m 은 외팔보의 단위 길이당 질량, M_t 는 부가말단질량, J_c 는 부가말단질량중심 c 에 대한 관성모우멘트이다.

$$\begin{aligned}
 4\pi r^2 = \pi a^2 \text{라 두면 식(27)의 } \mu \text{와 } \gamma + \mu a^2 \text{은} \\
 \mu = \left(\frac{\rho_t}{\rho}\right) \left(\frac{2c}{l}\right) \left(\frac{\pi a^2}{\pi r^2}\right) = 4p\xi \dots\dots\dots (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma + \mu \alpha^2 &= \frac{\mu}{12} (\xi^2 + 3x^2) + \mu \alpha^2 \\ &= p\xi \left(\frac{4\xi^2}{3} + x^2 \right) \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

가 되고, 여기서 $p = \rho_t / \rho$, $\xi = 2c/l$, $x^2 = (a/l)^2 = 0.01562$ 이다. 또 c 는 부가말단질량의 중심의 축방향 평행이동 거리, 즉 외팔보의 자유단에서 부가말단질량의 중심까지의 거리로서 계의 중요한 인자이다. 식(27)에 식(29)와 식(30)을 대입하면, 식(27)은 부가말단질량의 길이의 매개변수 ξ 의 함수가 되어 부가말단질량의 관성모멘트 변화가 외팔보의 안정성에 미치는 영향을 ξ 에 따라 계산할 수가 있다.

Fig. 2에서 $\xi = 0$, $K_T = 0.1$, $p = 0.1$ 일때의 P_{Lcr} 은 7.63이다. 이 값은 Beck⁴⁾의 8.126보다 약 6.10% 낮은 값으로, 이러한 차이가 생김은 외팔보의 전단변형과 회전관성의 영향이다.

Timoshenko의 전단계수 K' 의 값이 작을수록 그 영향이 더욱 커지며, $K' = 0.186$ 인 I형단면의 외팔보에서는 P_{Lcr} 의 값이 5.689이므로 Beck의 8.126에 비하여 약 30%이상 감소되었다.

물론 외팔보의 세장비에 의해서도 차이가 생김은 잘 알려진 사실이다.

식(27)에 $\xi = 0$, $K' = 0.65$, $s = 100$ 을 대입하여 계산하면 $P_{Lcr} = 7.902$ 가 되어 Kounadis, 入江⁶⁾들의 $P_{Lcr} = 7.805$ 에 충분히 근사하며 약 2%의 차이를 가진다. 또 $\xi = 0$, $K' = E/4G = 0.65$, $s = 100$ 을 식(27)에 대입하면 $P_{Lcr} = 7.662$, $\Omega^2_{cr} = 115$ 가 되어 Nemat-Nasser⁵⁾의 $P_{Lcr} = 7.4$ 에는 약 6%, Sundararamaiah의 $P_{Lcr} = 0.796$ 에는 0.8%의 차이로 접근한다.

Nemat-Nasser⁵⁾의 P_{Lcr} 곡선으로 부터 $P_{Lcr} = 7.4$ 를 추정했으며, 또 K' 의 정확한 수치를 알 수 없었으므로 위의 6% 차이는 약간의 유동성이 있다고 생각된다.

Fig. 2의 P_{Lcr} 은 ξ 가 증가됨에 따라 급격히 감소되는데, 이것은 곧 ξ 가 증가됨에 따라 부가말단질량의 관성모멘트가 Timoshenko 보의 안정성에 미치는 영향이 점점 커짐을 의미한다. 본 논문의 Fig. 2에서는 $\xi = 1$ 이상에서 이들 두 곡선이 교차될 것으로 예상된다. 이 두 곡선이 교차되는 이유는 ξ 가 증가함에 따라 p 가 클수록

외팔보의 안정성에 미치는 그 부가질량의 수평관성력의 영향이 커지고, 관성모우멘트의 영향의 증가폭이 감소함으로 p 가 큰 곡선의 기울기가 완만해지기 때문이다.

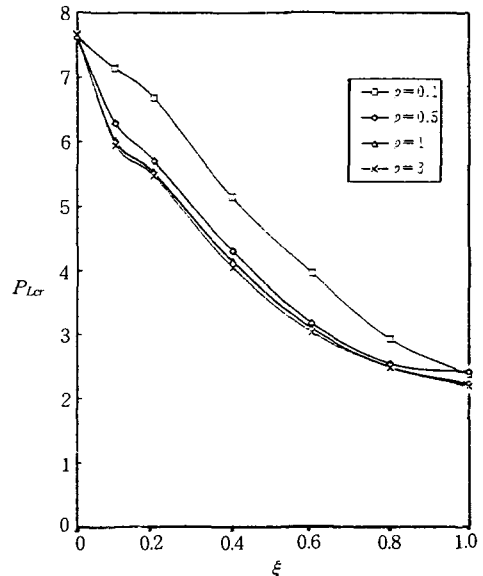


Fig. 2 Variation of P_{Lcr} versus ξ for p . A tip mass and its moment of of inertia are all variable according to a magnitude of ξ . $K' = 0.89$, $s = 64$, $K_T = 0.1$

따라서 Anderson⁷⁾의 연구에서 p 의 값이 클수록 그 P_{Lcr} 곡선의 기울기는 완만해지고, 이 곡선들의 교차점은 ξ 의 작은 값에서 나타남을 알 수 있다.

본 논문에서 이 곡선들의 교차점이 $\xi = 1$ 근방 또는 그 이상에서 나타남은 외팔보의 전단변형과 회전관성이 외팔보의 안정성에 미치는 부가말단질량의 수평관성력의 영향을 감소시키고, 그 관성모우멘트의 영향을 증대시키기 때문이라고 할 수 있다.

Fig. 3은 $p = 1$ 일때의 K_T 의 크기가 계의 안정성에 미치는 영향을 ξ 의 값에 대하여 수치해석한 결과이다.

부가말단질량의 관성모우멘트의 영향을 K_T 의 값의 크기에 따라서 관찰하면 P_{Lcr} 은 $\xi = 0.1$ 에서는 큰 차이가 없으나, ξ 값이 증가함에 따라

차이를 나타내고 있으며, $K_T=10, K_T=20, K_T=30$ 에서는 $\xi=0.4$ 근방에서 P_{Lcr} 가 급격히 감소함을 보여주고 있다. 따라서 임계플러터하중 P_{Lcr} 는 K_T 값에 많은 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

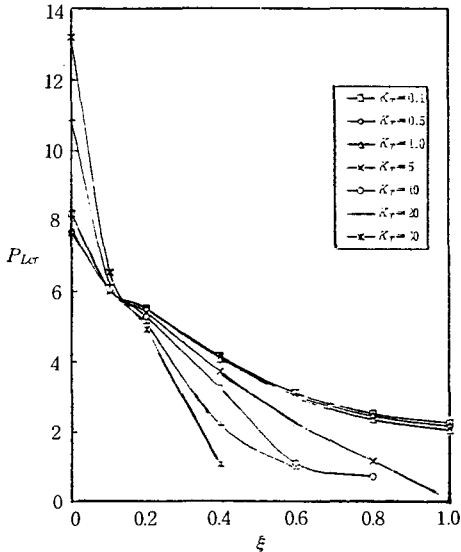


Fig.3 Variation of P_{Lcr} versus ξ for K_T . A tip mass and its moment of inertia are all variable according to a magnitude of ξ .
 $K' = 0.89, s=64, \rho=1$

3.2 부가말단질량이 일정하고 그 관성모멘트 γ 가 변화하는 경우

계의 안정성에 미치는 부가말단질량의 관성 모멘트의 영향을 명확히 구명하기 위하여 부가말단질량의 크기 즉, μ 를 일정한 값으로 유지하고 관성모멘트 γ 를 변화시키는 것이다. 그렇게 하기 위하여 먼저 다음과 같이 매개변수 μ 를 유도한다.

μ 를 일정한 값으로 유지하고, γ 를 증감시키기 위하여 다음과 같이 매개변수 η 를 유도했다.

$$M_t = 2 \rho \cdot \pi \cdot c a^2 = 2 \rho \cdot \pi \left(\frac{a}{\sqrt{\eta}} \right)^2 \eta c$$

$$= 2 \rho \cdot \pi \cdot a_1^2 c_1 = \text{const.} \dots \dots \dots (31)$$

여기서, $a_1 = \frac{a}{\sqrt{\eta}}$ 이고, $c_1 = \eta c$ 이다.

매개변수 η 는 부가말단질량을 일정하게 유지하면서 외팔보의 자유단으로부터 부가말단질량의 무게중심거리를 변화시켜서 부가말단질량의 형상을 바꾸어준다. 즉, 식(31)에서 η 를 특정값 c 에 곱하여 부가말단질량의 무게 중심거리를 조정하며 동시에 a 를 $\sqrt{\eta}$ 로 나누어서 부가말단질량의 반경을 조정한다. 그러면, p 의 각 값에 대하여 $\mu=p$ 가 되도록 c 를 결정하면, 식(29)로부터

$$4 \xi = \left(\frac{\pi a^2}{\pi r^2} \right) \left(\frac{2c}{l} \right) = 1 \dots \dots \dots (32)$$

이므로 $c=l/8$ 이 된다. 식(29)와 식(30)에서 c 는 ηc 로, a 는 $(a/\sqrt{\eta})$ 로 치환되고, $c=l/8$ 을 대입하여 정리하면

$$\mu = p \dots \dots \dots (33)$$

$$\gamma + \mu a^2 = \frac{p}{12} \left[\left(\frac{\eta}{4} \right)^2 + \frac{3a^2}{\eta} + \left(\frac{\eta}{8} \right)^2 \times 12 \right] \dots \dots \dots (34)$$

가 되어 식(27)을 η 의 함수로 계산할 수 있다. 여기서 $p=1$ 이면 $\mu=1$ 이 되어 외팔보의 질량과 부가말단질량의 크기가 서로 같으며, $\eta=1$ 일때 부가말단질량의 길이 $2c$ 는 $l/4$ 이다.

Table 1은 식(34)에 의하여 계산한 부가말단 질량의 관성모멘트 값이다. η 의 값에 따른 그 크기를 비교하였다. 여기서 $\eta \rightarrow 0$ 이면 $\gamma + \mu a^2 \rightarrow \infty$ 이지만 $\eta=0$ 이면 식(34)는 불능이 된다. 그러나, 엄밀히 말하면 $\eta=0$ 에서는 질량이 0이 아닌 부가말단질량을 정의할 수 없으므로 $\eta=0$ 은 본 연구의 범위가 아니다.

Table 1 Values of moment of inertia of the tip mass for a magnitude of η . $D=0.3112 \times \rho / 12$

η	$(\gamma + \mu a^2) / D$	η	$(\gamma + \mu a^2) / D$	η	$(\gamma + \mu a^2) / D$	η	$(\gamma + \mu a^2) / D$
0.01	4.476	0.4	0.264	0.9	0.831	1.4	1.903
0.05	0.897	0.5	0.327	1.0	1.0	1.5	2.178
0.1	0.457	0.6	0.418	1.1	1.196	1.6	2.473
0.2	0.262	0.7	0.531	1.2	1.412	1.8	3.119
0.3	0.234	0.8	0.667	1.3	1.648	2.0	3.842

p 의 각 값에 대하여 η 를 0.05에서 2까지 증가시키면서 P_{Lcr} 를 수직해석한 것이다.

이 때 $K_T=0.1$ 로 하여 부가말단질량의 관성

모우멘트의 영향을 검토하였다.

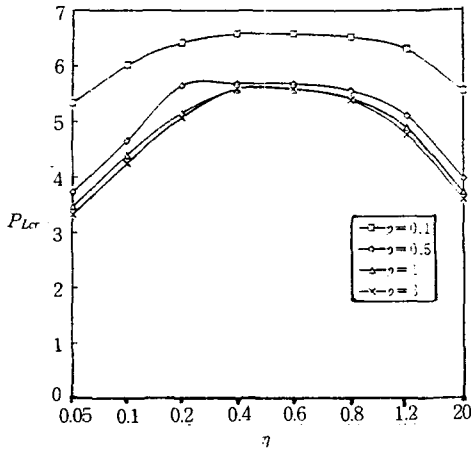


Fig. 4 Variation of P_{Lcr} versus η for p . A tip mass is constant while its moment of inertia is variable according to a magnitude of η .
 $K' = 0.89, s = 64, K_T = 0.1$

Fig. 4에서는 부가말단질량의 관성모우멘트가 가장 작은 $\eta = 0.45$ 부근에서 P_{Lcr} 이 가장 크고, 관성모우멘트가 가장 큰 $\eta = 0.05$ 에서 P_{Lcr} 의 값은 가장 작다. 또 부가말단질량의 관성모우멘트의 크기가 거의 같은 $\eta = 0.1$ 과 $\eta = 1.2$ 의 P_{Lcr} 는 거의 같은 값을 나타낸다. 이 현상은 곧 부가말단질량의 관성모우멘트가 계의 안정성에 지배적인 영향을 미치고 있음을 뜻한다. 또 p 의 값이 클수록 η 값에 따른 P_{Lcr} 의 변화폭이 크게 나타나는 것은, p 가 클수록 부가말단질량의 관성 모우멘트가 Timoshenko 보의 안정성에 미치는 영향은 더욱 현저함을 알 수 있다. $p = 0.1$ 에서 $\eta = 0.05$ 의 P_{Lcr} 는 5.33, $\eta = 0.5$ 의 P_{Lcr} 는 3.73으로서 약 30%, $p = 1$ 의 곡선에서는 약 35%가 감소되었다. 그러므로 p 의 값이 클수록 부가말단질량의 관성모우멘트가 P_{Lcr} 에 미치는 영향이 더 커진다는 뚜렷한 현상이다.

Fig. 5에서는 계의 안정성에 미치는 K_T 의 영향을 도시한 것이다. $p = 1$ 에서 $\eta = 0.05$ 일때의 P_{Lcr} 가 $\eta = 0.4$ 의 P_{Lcr} 에 비하여 $K_T = 0.1$ 에서 약 38%, $K_T = 1.0$ 에서 39%, $K_T = 10$ 에서 59% 증가하였다. K_T 의 작은 값에 비하여 K_T 값이 클수록 부가말단질량의 관성모우멘트 값의 영향이 크게

나타남을 알 수 있다. 그러므로 K_T 의 작은 값에서는 계의 안정성이 부가말단질량의 관성모우멘트보다 부가말단질량의 크기와 K_T 의 값에 주된 영향을 받고, K_T 의 큰 값에서는 계의 안정성이 부가말단질량의 관성모우멘트 값의 크기와 K_T 의 값에 주된 영향을 받고 있다.

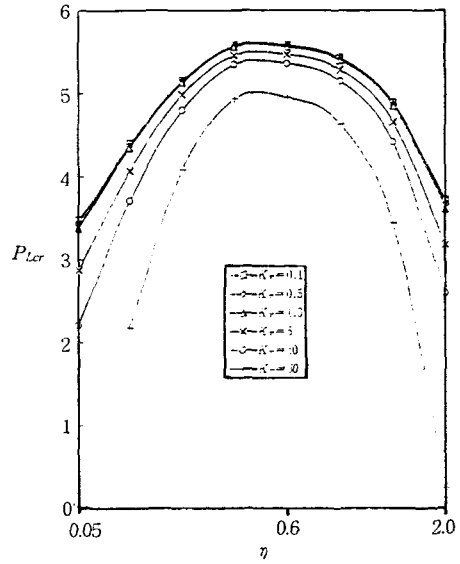


Fig. 5 Variation of P_{Lcr} versus η for K_T . A tip mass is constant while its moment of inertia is variable according to a magnitude of η .
 $K' = 0.89, s = 64, p = 1$

4. 결 론

자유단의 탄성구속과 부가말단 질량이 중동력을 받는 Timoshenko 외팔보에서 자유단의 스프링 특성이 기둥의 안정성에 미치는 영향을 연구하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 부가말단 질량과 관성 모우멘트가 변화하는 경우, 자유단의 병진 스프링 상수는 부가말단 질량 및 그 관성 모우멘트와 연성되어 계의 안정성에 영향을 크게 미쳐서 병진 스프링 상수가 커질수록 임계 플러터 하중은 크게 감소한다.
- 2) 부가말단 질량이 일정하고 관성 모우멘트가 변화하는 경우, 계의 안정성은 부가말단 질량

의 관성 모멘트 값의 크기와 병진 스프링 상수의 값에 주된 영향을 받는다.

- 3) 부가말단 질량이 일정하고 관성 모멘트가 변화하는 경우, 임계 플러터 하중은 관성모멘트에 영향을 받으며, 반비례한다.

기 호 설 명

- A : 기둥의 단면적(m^2)
 a : 부가 말단질량의 반경(m)
 c : 기둥의 자유단으로 부터 부가말단질량의 중심거리(m)
 C_T : 병진스프링 상수(N/m)
 E : 기둥재료의 종탄성계수(N/m^2)
 G : 기둥재료의 횡탄성계수(N/m^2)
 I : 기둥단면의 2차 관성모우멘트(m^4)
 J_c : 부가 말단질량의 관성모우멘트($N \cdot m^2$)
 k : 기둥횡단면의 관성지름(m)
 K' : Timoshenko's의 전단계수
 $K_T = C_T l^3 / EI$: 무차원 병진 스프링 상수
 l : 기둥의 길이(m)
 m : 단위 길이당 기둥의 질량($N \cdot S^2/m$)
 M_T : 부가 말단 질량($N \cdot S^2/m$)
 $M(x, t)$: 기둥의 굽힘 모우멘트($N \cdot m$)
 P : 압축 중동력(N)
 p : 밀도비
 $P_E = \pi^2 EI / 4 l^2$: Euler의 좌굴하중(N)
 $P_0 = P l^2 / EI$: 무차원 압축 중동력(N)
 r : 기둥의 반지름(m)
 $s = 2l / k$: 기둥의 세장비
 t : 시간(s)
 $v(x)$: 기둥의 횡진동 진폭(m)
 $v(\tau)$: 무차원 기둥의 횡진동 진폭
 x : 기둥의 축좌표(m)
 $\tau = x / l$: 기둥의 전길이에 대한 x 의비
 $y = (x, t)$: 기둥의 횡변위(m)
 $\alpha = c / l$: 기둥의 전길이에 대한 c 의 비
 $\gamma = J_c / m l^3$: 무차원 부가 말단질량의 관성모우멘트
 $\varepsilon = 2(1 + \nu)$: 기둥의 횡탄성 계수에 대한 종탄성계수비
 η : 부가말단 질량이 일정한 경우 c 변화율

- $\mu = M_t / m l$: 무차원 부가 말단질량
 ν : 기둥재료의 포아송의 비
 $\xi = 2c / l$: 기둥의 전길이에 대한 부가말단 질량의 길이의 비
 ρ : 기둥의 밀도 (Kg/m^3)
 ρ_t : 부가 말단질량 재료의 밀도 kg/m^3
 $\varphi(x, t)$: 기둥 단면의 회전각도(rad)
 ω : 기둥의 원 진동수(rad/s)
 $(\dot{\quad})$: 시간에 대한 미분
 $(\quad)'$: x 또는 τ 에 대한 미분

본 연구는 동명대학 학술연구 조성비로 수행 되었습니다.

참 고 문 헌

- 1) A.E.H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Fourth Ed., pp. 401~405, Dover publications Inc., New york, 1944.
- 2) S. Timoshenko and J.M. Gere, The Theory of Elastic Stability, pp. 156~157, McGraw-Hill Inc., New York, 1961.
- 3) H. Ziegler, Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ingenieur-Archiv, Vol. 20, pp. 49~56, 1952.
- 4) M. Beck, Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential.
- 5) S. Nemat-Nasser, Instability of a Cantilever under follower Force According to Timoshenko Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 34, pp. 484~485, 1967.
- 6) A.N. Kounadis and J.T. Katsikadelis, Shear and Rotatory Inertia Effect on Beck's Column, Journal of sound and Vibration, Vol. 49, pp. 171~178, 1976.
- 7) K.S. Deineko and M. Iu. Leonov, The Dynamic Method Investigating the Stability of a Bar in Compression, PMM., Vol. 19, pp. 738~744, 1955.
- 8) A.N. Kounadis, Stability of Elastically Restrained Timoshenko Cantilevers with At-

- tached Masses Subjected to a Follower Force, *Journal of Applied Mechanics* Vol. 44, pp. 731~736, 1977.
- 9) B. Rama Bhat and H. Wagner, Natural Frequencies of a Uniform Cantilever with a Tip Mass Slender in the Axial Direction, *J. Sound and Vibration*, Vol. 45, pp. 304~307, 1976.
- 10) B. Rama Bhat and M. Avinash Kulkarni, Natural Frequencies of a Cantilever with Slender Tip Mass, *AIAA Journal* Vol. 14, pp. 536~537, 1976.
- 11) A.H. Flax, Comment on "Natural Frequencies of a Cantilever with Slender Tip Mass", *AIAA Journal*, Vol. 16, pp. 94~96, 1978.
- 12) 윤한익, 김광식, "고정단의 스프링상수가 말단질량을 가진 Beck's Column의 안정성에 미치는 영향", *대한기계학회 논문집*, 제9권.
- 13) 윤한익, 진종태, "말단질량을 가진 Beck's and Leipholz's Column의 안정방정식", *동의대학교 산업기술연구지*, 제3권, pp. 103~118, 1989.
- 14) 노광춘, 박영필, "중동력을 받는 첨단질량을 갖는 외팔보의 안정성에 관한 실험적 연구", *대한기계학회논문집*, 제10권, 제2호.
- 15) S. Timoshenko and J. M. Gere, *ibid*, pp. 132~135.
- 16) L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, pp. 239~244, McGraw-Hillinc. New-York, 1925.
- 17) G.L. Anderson, J.D. Vasilakis and J.J. Wu, The Influence of Tip Mass Offset on the Stability of Beck's Column. *J. Sound and Vibration*, Vol. 62, pp. 475~480, 1979.
-