

와류입자법에 의한 비정상 박리흐름의 전산 (I)

- 경계요소법과 정방형 실린더 주위의 와류강도 -

Computation of Unsteady Separated Flow Using the Vortex Particle Method (I)

- Boundary Element Method and Vortex Strength Around the Square Cylinder -

박 외 철*

Woe-Chul Park

(1998년 4월 11일 접수, 1998년 9월 30일 채택)

ABSTRACT

The vortex particle method, which includes viscous effects, consists of diffusion of boundary vorticity and creation of the vortex particles, convection, particle strength exchange, and particle redistribution. Accuracy of the boundary element method is very important since it creates the particles around the body at every time step. A boundary element method based on source panel was investigated as part of computation of unsteady separated flows by using the vortex particle method. The potential flows were computed around a circular cylinder and a square cylinder. The results around the circular cylinder were compared with the exact solution, and the distribution of vorticity, in particular near the sharp corners of the square cylinder, is scrutinized for different number of panels.

1. 서 론

항공기나 가스터빈의 날개, 수력기계의 회전차 주위의 흐름과 같이, 높은 레이놀즈수의 비정상 박리흐름에 의한 물체의 진동과 항력의 계

산, 항공기의 양력상실 모사^{1,2)} 등 안전성 해석과 설계에 와류법^{3,4)}이 사용된다. 와류법은 반복적으로 물체주위에서 생성한 와류입자(또는 이산와류)를 하류로 이동시켜 이들 입자로 유동장을 표현하는 Lagrange법의 일종이다. 와류입자

* 부경대학교 공과대학 산업시스템안전공학부

는 경계적분법 또는 패널법이라고도 하는 경계 요소법(boundary element method)^{5,6)}을 사용하여 생성하므로, 경계요소법은 와류법에 있어서 대단히 중요하다. 특히 점성와류입자법⁷⁾은 수백 만개의 와류입자로 유동장을 표현하므로 입자생성에 높은 정밀도가 요구된다.

점성와류입자법은 벽면 와도(vorticity)의 확산과 입자생성, 대류, 와류강도 교환, 입자 재배열로 구성되어 있다. 본 연구는 점성와류입자법에 의한 비정상 박리흐름의 전산의 일부로서, 연구의 목적은 첫째 경계요소법의 정확성과 패널 개수의 영향을 조사하고 둘째 실린더의 모서리에서 와류강도가 무한대로 되는 비현실적인 문제점을 해결하는 것이다. 기존의 경계요소법을 와류입자법에 적합하도록 수정한 다음 완전해가 존재하는 원형 실린더와 와류입자법을 적용할 정방형 실린더에 대하여 계산하였다. 원형 실린더에 대한 계산 결과를 완전해와 비교하여 수치법의 정확성을 확인한 다음 정방형 실린더의 패널수에 따른 물체 표면의 와류강도를 비교하였다.

2. 수치법

균일유동장에 잠겨있는 물체주위의 유속은

$$U = \nabla \phi \dots\dots\dots (1)$$

이고, 물체표면에서는 수직방향과 접선방향의 속도가 0이므로

$$U \cdot n = 0, U \cdot t = 0 \dots\dots\dots (2)$$

이다. 그리고 물체로부터 멀리 떨어진 곳은

$$U = U_0 \dots\dots\dots (3)$$

이다.

Fig. 1과 같이 균일유동장의 유속이 x방향 속도성분 U_0 뿐일 때 정방형 실린더 주위의 임의의 점 P(x, y)에서의 속도 포텐셜은 균일유속과 패널 및 자유와류입자의 포텐셜의 합

$$\phi(x, y) = U_0 x + \sum_{j=1}^{N_p} \phi_j - \sum_{k=1}^{N_f} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \theta_k \dots\dots\dots (4)$$

이 된다. 우변의 둘째 항은 각 패널의 속도 포텐셜, 마지막 항은 자유와류입자의 포텐셜이고, θ_k 는 자유와류입자의 각도를 나타낸다.

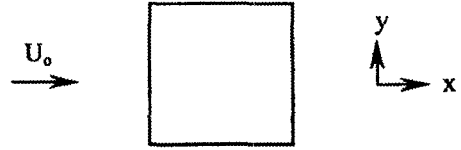


Fig. 1 A square cylinder immersed in a uniform flow

와류입자법에서는 식(2)와 식(4)로부터 물체 표면에 위치한 각 패널의 와류강도를 계산하고, 이를 물체근처 유체중의 와류입자에 확산함으로써 새로운 와류입자가 생성하게 된다. 본 연구에서는 경계층의 박리에 의한 와류흡입이 없는 경우, 즉, 식(4)의 우변 마지막 항이 없는 흐름에 대하여 원형실린더 주위의 포텐셜 흐름을 정확하게 계산한 바 있는 Chow⁶⁾의 소스패널법을 와류입자법에 적합하도록 수정하여 사용하였다.

물체의 표면을 N_p 개의 소스 패널로 구성된 다각형이면 패널 i에서의 속도 포텐셜은

$$\phi_i = U_0 x_i + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\lambda_j}{2\pi} \int \ln rd \xi_j \dots\dots\dots (5)$$

로 쓸 수 있다(Fig. 2 참조).

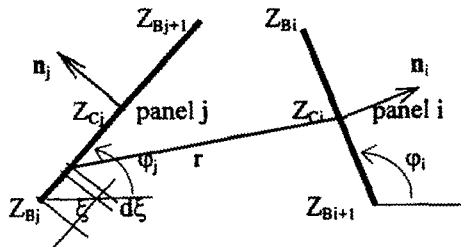


Fig. 2 Panel notation

식(5)를 식(2)의 첫째 경계조건에 대입하면

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\lambda_j}{2\pi} A_{ij} = -U_0 \cos \theta_i, \quad i=1, N_p \dots\dots\dots (6)$$

가 된다. 이 식의 좌변 첫째 항은 패널 자체의 소스에 의한 수직방향 속도성분이다. A_{ij} 는

$$A_{ij} = 0.5 \sin(\theta_i - \theta_j) \log [1 + (\Delta s^2 + 2a\Delta s)/r^2] - \cos(\theta_i - \theta_j) [\tan^{-1}((\Delta s + a)/b) - \tan^{-1}(a/b)] \dots\dots\dots (7)$$

이고, 여기서

$$a = -(x_{Ci} - x_{Bj}) \cos \theta_j - (y_{Ci} - y_{Bj}) \sin \theta_j$$

$b = (x_{C_i} - x_{B_j}) \sin \theta_j - (y_{C_i} - y_{B_j}) \cos \theta_j$ 이다. Chow는 패널의 중심점이 물체의 표면에 접하도록 하였으나, 이 경우에는 각 패널의 경계점의 위치 계산이 복잡하다. 본 연구에서는 물체의 둘레를 등간격으로 나누어 패널의 경계점으로 하고 두 경계점의 중간을 패널의 제어점으로 하였다.

식(6)은 미지수 λ 에 대한 선형방정식

$$\mathbf{A} \lambda = \mathbf{B} \dots\dots\dots (8)$$

이 된다. 여기서 행렬식 \mathbf{A} 는 패널의 위치, 즉, 물체의 형상에 따라 결정되고, \mathbf{B} 는 균일유동의 유속과 패널 중심의 위치로부터 계산된다. 외류입자법에서는 반복되는 외류입자의 생성에서 수치오차가 누적될 가능성이 크므로 식(8) 중에서 마지막 식을

$$\sum_{j=1}^{N_p} \lambda_j = 0 \dots\dots\dots (9)$$

으로 대치함으로써 모든 패널의 순환의 합이 0이 되도록 하였다.

식(8)과 식(9)로 각 패널의 소스강도 λ 를 계산한 다음 물체 표면의 접선방향 속도는

$$V_s = t_i \cdot \nabla \phi_i = \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{2\pi} C_{ij} + U_o \cos \theta_i \dots\dots\dots (10)$$

로 계산한다. 여기서 $i=j$ 일 때

$$C_{ij} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

이고, $i \neq j$ 이면

$$C_{ij} = -0.5 \cos(\theta_i - \theta_j) \log [1 + (\Delta s^2 + 2a \Delta s) / r^2] - \sin(\theta_i - \theta_j) [\tan^{-1}((\Delta s + a)/b) - \tan^{-1}(a/b)] \dots\dots\dots (12)$$

이다. a 와 b 는 위의 A_{ij} 의 경우와 같다.

한편, 외류입자법에서 입자생성에 사용하는 외류강도 γ 는 패널 단위길이당 순환으로,

$$\gamma = 2V_s \dots\dots\dots (13)$$

이다. 물체 표면의 압력계수 C_p 는

$$C_p = 1 - (V_s / U_o)^2 \dots\dots\dots (14)$$

로 정의된다. V_s 는 물체표면의 접선속도, U_o 는 자유흐름 유속(균일유속)이다.

3. 결과 및 토의

본 연구에 사용한 매개변수의 값은 Table 1

과 같다. U_o 는 균일흐름의 x방향 유속, R 는 원형 실린더의 반지름, S 는 정방형 실린더의 변의 길이로 편의상 각각 1.0으로 하였다. 본 연구는 많은 계산시간을 요하지 않으므로 모든 계산을 배정도(double precision)로 하고, 개인용 컴퓨터에서 계산하였다.

Table 1 Values of the parameters investigated

	circular cylinder	square cylinder
U_o	1.0	1.0
R	1.0	-
S	-	1.0
N_p	8, 16, 32	32, 64, 96, 128, 160, 192

3.1 원형 실린더

원형 실린더에 대한 계산결과를 이미 알려져 있으나 수정한 소스패널법을 검증하기 원형 실린더 주위의 포텐셜 흐름을 계산하였다. 세가지 패널수 $N_p=8, 16, 32$ 에서 모두 각 패널 중심의 접선방향 속도가 완전해 $-2U_o \sin \theta$ 와 정확하게 일치하였다. Fig. 3은 $N_p=16$ 일 때 표면의 접선속도를 비교한 것으로 완전해와 일치함을 알 수 있다.

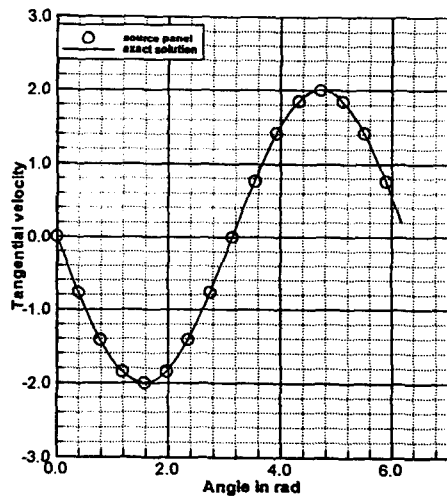


Fig. 3 Comparison of tangential velocity on the circular cylinder

Table 2는 패널이 8개일 때 식(14)로 계산한

원형실린더 표면의 압력계수 C_p 를 완전해와 비교한 것이다. 8개의 패널로 계산한 결과도 정확함을 알 수 있다.

Table 2 Comparison of C_p on the circular cylinder

angle in rad	exact solution	computation
0	1.0000	1.0000
0.7854	-1.0000	-1.0000
1.5708	-3.0000	-3.0000
2.3562	-1.0000	-1.0000
3.1416	1.0000	1.0000
3.9270	-1.0000	-1.0000
4.7124	-3.0000	-3.0000
5.4978	-1.0000	-1.0000

3.2 정방형 실린더

정방형 실린더 주위의 포텐셜 흐름에 패널수 $N_p=32, 64, 96, 128, 160, 192$ 로 하여 각 패널의 와류강도를 계산하였다. 와류입자법에서 새로운 와류입자의 생성에 사용되는 와류강도 γ 는 식 (13)과 같이 접선속도의 2배이다. 계산결과, 모든 경우에 와류강도 분포는 x축에 대칭이었고, 네 모서리 부근을 제외하고는 패널수에 따른 와류강도의 변화는 크지 않았다. 또 패널의 와류강도의 합은 $O(10^{-13})$ 으로 Kelvin의 정리를 만족하였다.

Fig. 4는 $N_p=32, 64, 160, 192$ 에 대하여 각 패널의 와류강도를 비교한 것이다. 표면거리는 실린더의 후면 중심을 기준으로 반시계 방향의 둘레로서 표면거리가 1.5일 때 전면 위쪽 모서리, 2.5일 때 전면 아래쪽 모서리가 된다. 모서리 근처를 제외하고는 와류강도에 큰 차이가 없다. 같은 크기의 정방형 실린더에서 패널수가 많을수록 모서리에 가까운 곳에 패널이 위치하게 되는데 패널수 N_p 가 증가할수록, 즉, 모서리에 근접할수록 와류강도가 증가함을 볼 수 있다. 이것은 포텐셜 흐름에서 모서리의 접선속도는 이론적으로 무한대인 것과 일치한다.

모서리 부근의 와류강도 변화를 더 자세히 관찰하기 위해 위의 4가지 패널수 중에서 패널의 중심점 위치가 서로 일치하는 곳이 많은 세 가지의 패널수 $N_p=32, 96, 160$ 의 모서리 부근의

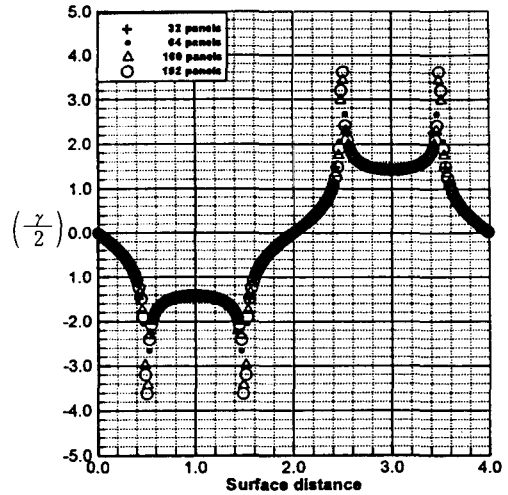


Fig. 4 Comparison of vortex strength around the square cylinder

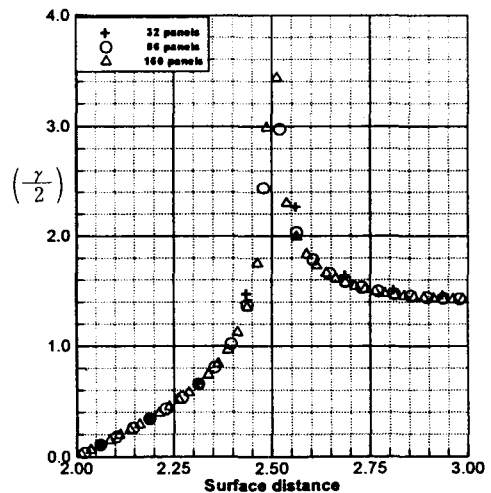


Fig. 5 Comparison of vortex strength near the corner of the square cylinder

와류강도를 Fig. 5에 비교하였다. 패널수에 따라 모서리 부근의 와류강도에 차이가 있음을 볼 수 있고, 패널수가 증가하면 모서리(표면거리 2.5)에서 와류강도가 무한대로 접근하므로 모서리 근처에 위치한 패널의 순환(와류강도 γ 와 패널 길이 l_s 의 곱)이 무한대가 된다. 이것은 Kutta 조건을 만족하지 않고 실제유체의 흐름에서는 비현실적이다. 이를 방지하기 위해 모서리 대신

등급새를 주거나 모서리를 잘라낸 실린더를 고려할 수 있으나 와류입자법에서 비활(no slip) 경계조건의 처리가 대단히 복잡하게 된다.

Table 3는 패널수에 따른 모서리 주위 동일 위치에서의 와류강도를 비교한 것이다. N_p 가 192인 경우에는 패널 중심점의 위치가 서로 일치하는 점이 많지 않으므로 비교에서 제외하였다. 패널수가 증가하면 모서리(표면거리 2.5)에 가까운 위치에서는 와류강도가 감소하는 경향을 볼 수 있다. 위의 Fig. 5에서와 본 바와 같이 모서리에서의 와류강도가 무한대로 접근하는 것은 Kutta조건을 만족하지 못하므로, N_p 증가에 따른 모서리 근처에서 와류강도가 감소하는 것은 N_p 가 클수록 계산결과가 더 정확함을 의미한다.

결과적으로 패널수가 많을 수록 와류강도의 계산이 더 정확한 반면에 패널 중심점이 모서리에 더 가까이 위치하게 되어 그 점의 와류강도가 비현실적으로 크게 되는 것이다. 그러므로 본 연구에서는 패널수를 96으로 하고, 각 패널의 와류강도는 패널수가 160일 때의 값을 사용하였다. 이 방법으로 모서리를 잘라내는 것과 같은 효과를 가지면서도 모서리에 등급새를 주거나 모서리를 잘라내는 데 비해 많은 장점을 얻을 수 있었다. 즉, 정밀하게 와류입자를 생성하고, 입자의 대류에 소요되는 계산시간을 대폭 줄이며, 모서리에서의 경계조건 처리의 어려움을 피할 수 있게 되었다.

Table 3 Comparison of vortex strength at the same points of the square cylinder

surface distance	Vortex strength ($r/2$)		
	$N_p=32$	$N_p=96$	$N_p=160$
2.0625	0.21332	0.21348	0.21342
2.1875	0.68062	0.67888	0.67822
2.3125	1.32650	1.30962	1.30578
2.4375	2.95182	2.74456	2.70834
2.5625	4.53128	4.06002	3.98458
2.6875	3.28918	3.16750	3.14496
2.8125	3.02038	2.94334	2.92892
2.9375	2.92902	2.86538	2.85346

4. 결 론

와류입자법에서 새로운 와류입자의 생성에 사용하는 소스패널법을 원형 실린더와 정방형 실린더 주위의 포텐셜 흐름에 적용한 결과 다음의 결론을 얻었다.

- 1) 원형 실린더의 접선속도와 압력계수가 완전해와 일치하여 사용한 경계요소법은 정확하였다.
- 2) 원형 실린더와 정방형 실린더의 모든 계산에서 Kelvin의 정리를 만족하였다.
- 3) 정방형 실린더의 패널수가 32에서 192까지 증가함에 따라 더 정확한 와류강도를 얻을 수 있었으나 모서리의 와류강도는 무한대가 되는 문제점을 확인하였다.
- 4) 패널수를 96으로 하고 각 패널의 와류강도는 패널수가 160일 때의 값을 사용함으로써 정밀도를 높이고, 계산시간을 단축하며, 모서리에서의 경계조건 처리를 쉽게 할 수 있었다.

기 호 설 명

- C_p : 압력계수
- \mathbf{n} : 수직방향 단위벡터
- N_p : 패널개수
- N_v : 와류입자 개수
- r : 거리
- l_s : 패널길이
- \mathbf{t} : 접선방향 단위벡터
- \mathbf{U} : 속도벡터 (U, V)
- U_0 : 자유흐름 유속
- V_s : 접선속도
- Z : 복소좌표($x+iy$) (Fig. 2)
- γ : 와류강도(vortex strength)
- λ : 소스강도(source strength)
- ϕ : 속도 포텐셜
- θ : 패널 중심점의 각도
- φ : 패널의 경사각

참 고 문 헌

- 1) R.P. Spalart, "Simulation of Rotating Stall by the Vortex Method", AIAA Paper 84-0343.

- 2) C.G. Speziale, F. Sisto and S. Jonnavithula, "Vortex Simulation of Propagating Stall in a Linear Cascade of Airfoils", J. Fluid Engng., Trans. ASME, Vol. 108, pp. 304~312.
 - 3) P.D. Koumoutsakos, "Direct Numerical Simulations of Unsteady Separated Flows Using Vortex Methods", Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, 1993.
 - 4) W.C. Park and H. Higuchi, "Numerical Investigation of Wake Flow Control by a Splitter Plate", KSME Int'l J., Vol. 12, No. 1, pp. 123~131, 1998.
 - 5) J.L. Hess and A.M.O. Smith, "Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies", Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, pp. 1~138, 1966.
 - 6) C.Y. Chow, An Introduction to Computational Fluid Mechanics, John Wiley & Sons, pp. 134~146, 1979.
 - 7) F.M. Pepin and A. Leonard, "High-resolution Simulation of the Flow Past an Impulsively Started Cylinder Using a Discrete Vortex Method", J. Fluid Mechanics, Vol. 296, pp. 1~38, 1995.
-