

유한요소법에 의한 열전달 연구

— 4각열원 주위 —

A study of Heat Transfer by the Finite Element Method

— Around Square Heat Source —

장 재 은*

Jae-Eun Jang

(1997년 8월 22일 접수, 1998년 2월 27일 채택)

ABSTRACT

This paper subdivided the interior solid into triangular shape of equal size to calculate the temperature distribution around the square heat source of it, and compared calculated values with measured ones. The result obtained are as follows. 1) It was found that we can calculate the temperature distribution around the square heat source of interior solid by the variational method of the finite element method as the calculated values were almost accord with the measured ones. 2) The temperature distributed were higher when the distances between heat source were farther and lower when those nearer. 3) Vertical surface temperature distribution is remarkably efficient by thermal conductivities.

1. 서론

열전도의 문제는 공학에 있어서 매우 중요한 분야로서 어떤 물체 내부의 온도 분포를 안다면 물체 내외를 이동하는 열량을 계산할 수 있고 이것으로부터 응력의 분포도 알 수 있다.

이에 대한 응용 분야로서 냉난방을 하는 건축물의 외벽, 천정 등의 보호 및 노나 관의 보

호, 증기 발생 기기 및 지하 매설 케이블 또는 송수관 등의 열전도 해석이 이들 설치를 위한 중요한 자료가 된다. 그리고 이들 열적영향의 제성질을 이론적인 해석으로 열전도에 관한 편미분방정식이 Fourier에 의해 제기된 이래 이에 관한 많은 연구가 있었다^{1~3)}. 그러나 열전도의 문제를 해석하는데는 많은 시간과 노력이 들뿐만 아니라 여러 가지 어려운 점이 계산 과정에 있

* 동명전문대학 건축설비과

다⁴⁾. 이를 계산하기 위해 여러 가지 근사해법이 제시되었으나 주어진 조건을 전체 영역에 걸쳐서 만족해야하는 함수를 택해야 하므로 간단한 기하학적 형상과 간단한 경계조건에 관한 문제에만 적용될 수 있는 한계성이 있어 복잡한 경계조건이 주어지는 문제의 적용에는 상당한 어려움이 뒤따른다⁵⁻⁶⁾. 그러나 유한요소법은 하나의 요소내에서 주어진 조건을 만족하는 함수의 집합으로써 전체영역에서 부분 연속인 함수를 택하여 문제를 취급하기 때문에 주어진 복잡한 문제에도 용이하게 적용할 수 있다⁷⁾. 그리하여 1950년대부터 항공산업에 사용된 유한요소법(FEM)이 열전도의 문제에도 Wilson⁸⁾ 등에 의해 개발 및 응용된 이후 프로그로밍상의 범용성이 급속도로 증가되어 왔다⁹⁾. 이러한 특성을 고려하여 본 연구는 유한요소법에 의해 고체 내부 4각열원에 의한 주위 열전도 문제를 수치 해석하여 그 제조조건변화에 대한 열전도 특성을 구하고 이에 관한 실험을 행하여 서로 비교 검토하고 그 결과의 경향을 제시하고자 한다.

2. 이론 해석

정상 열전도에 관한 2차원 평면에 있어서 편미분방정식은¹⁰⁾

$$k_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q=0 \dots\dots\dots(1)$$

이다. 물체 표면의 경계조건식은 다음 식으로 주어진다¹¹⁾.

$$T=T(x, y) \quad \text{on } c_1 \dots\dots\dots(2)$$

$$k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} l_x + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} l_y = q \quad \text{on } c_2 \dots\dots(3)$$

$$k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} l_x + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} l_y + h(T - T_a) \quad \text{on } c_3 \dots\dots\dots(4)$$

k_{xx}, k_{yy} : Thermal conductivities in the x, y (W/m²°C)

T: Temperature(unknown)(°C)

Q: Heat generated within body(W/m³)

l_x, l_y : Direction cosine of the outward to the boundary

q: Heat flux(W/m)

h: Convection coefficient(W/m²°C)

T_a: Ambient temperature(°C)

c₁: Region of specified temperature

c₂: Region of specified heat condition

c₃: Region of convection heat transfer

유한요소법은 무한자유도를 갖는 연속체로 가정된 유한개의 미지량을 가진 부분 영역 집합체에 따라 그 근사해를 구하는 해법으로서 요소내의 미지량은 연속체로 변환한다고 가정하여 potential energy를 구하고 전 요소에 대해서 총화하여 연속체가 평행 상태일 때 에너지가 최소치를 갖는다는 변분원리에 기초를 두고 있다. 식(1)의 미분방정식을 경계 조건(2), (3), (4)에서 해를 구하는 것은 식(5)를 凡函數 ϕ 의 극치를 구하는 것과 같다¹²⁾.

$$\phi = \int_A \frac{1}{2} \left[k_{xx} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_{yy} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - 2QT \right] dA + \int_{c_2} qTds + \int_{c_3} \frac{1}{2} h(T - T_a)^2 ds \dots\dots\dots(5)$$

따라서 2차원영역상에서 i 로 부터 반시계방향으로 번호를 붙이고 임의의 요소(e)에 대해서 온도 $T^{(e)}$ 를 표시하면

$$T^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \dots\dots\dots(6)$$

요소 내의 임의의 점 i, j, k 에서

$$x=x_i, y=y_i \text{에서 } T=T_i$$

$$x=x_j, y=y_j \text{에서 } T=T_j$$

$$x=x_k, y=y_k \text{에서 } T=T_k$$

이다.

그리고 식(7)을 식(6)에 대입하여 정리하면 형상함수 T 는

$$\begin{aligned} T^{(e)} &= N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k \\ &= [N_i \quad N_j \quad N_k] \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix} \\ &= [N^{(e)}] \{T^{(e)}\} \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

이다. 식(5)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi &= \int_A \frac{1}{2} \{g\}^T [D] \{g\} - 2TQ \} dA + \int_{c_2} qTds \\ &+ \int_{c_3} \frac{h}{2} [T^2 - 2TT_a + T_a^2] ds \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

장재은

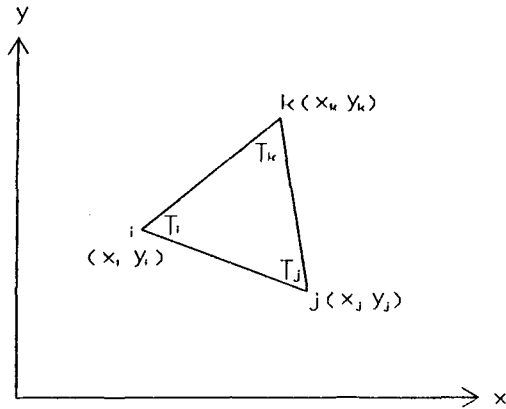


Fig. 1 Three-node triangular element for two dimensional heat conduction

$$\{g\}^T = \left[\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right]$$

$$[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix}$$

이다. 식(11)식은

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_{e=1}^E \int_{A^{(e)}} \frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} dA \\ & - \int_{A^{(e)}} T^{(e)} Q^{(e)} dA + \int_{c_2^{(e)}} T^{(e)} q^{(e)} ds \\ & + \int_{c_3^{(e)}} \frac{h}{2} [T^{(e)} T^{(e)} - 2T^{(e)} T_a + T_a^2] ds \end{aligned} \quad (10)$$

E: Total number of element

이다. 식(10)은

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}] \{T\} \quad (11)$$

이다. 그러므로 식(10)의 요소 적분은 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi^{(e)} = & \int_{A^{(e)}} \frac{1}{2} \{T\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dA \\ & - \int_{A^{(e)}} Q [N^{(e)}] \{T\} dA + \int_{c_2^{(e)}} q [N^{(e)}] \{T\} ds \\ & + \int_{c_3^{(e)}} \frac{h}{2} \{T\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{T\} ds \\ & + \int_{c_3^{(e)}} h T_a [N^{(e)}] \{T\} ds + \int_{c_3^{(e)}} \frac{h}{2} T_a^2 ds \end{aligned} \quad (12)$$

이며, 여기서 각항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi = & \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \phi^{(4)} + \phi^{(5)} + \phi^{(6)} \dots + \phi^{(E)} \\ = & \sum_{e=1}^E \phi^{(e)} \quad (13) \end{aligned}$$

ϕ 를 최소화시키기 위하여

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \{T\}} = & \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^E \phi^{(e)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial \{T\}} \\ = & 0 \quad (14) \end{aligned}$$

이다. 각항을 matrix 미분하여 적분을 하고, 전체를 적분하기 위해

$$\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial \{T\}} = [k^{(e)}] \{T\} + \{f^{(e)}\} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \{T\}} = \sum_{e=1}^E ([k^{(e)}] \{T\} + \{f^{(e)}\}) = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} [k^{(e)}] = & \int_{A^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dA \\ & + \int_{c_3^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} = & - \int_{A^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dA + \int_{c_2^{(e)}} q [N^{(e)}]^T ds \\ & - \int_{c_3^{(e)}} h T_a [N^{(e)}]^T ds \end{aligned}$$

이다. 그리고 식(16)을 적분하면

$$\left[\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \{T\}} \right] = \int_{A^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D] [B^{(e)}] dA \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \{T\}} \right] \text{는 면적 좌표를 사용하면}^{(13)}$$

$$L_1 = N_i, \quad L_2 = N_j, \quad L_3 = N_k \quad (18)$$

이므로

$$\left[\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \{T\}} \right] = \int_{A^{(e)}} Q [N^{(e)}]^T dA \quad (19)$$

이다. 식(17), (18)에서 c_1 영역에서의 온도 분포를 알 수 있다.

c_2 상에서 열유속은 무시하고 대류현상만 고려하면 임의 요소(e)에서 jk 변에서 $[(\partial \phi^{(3)}) / (\partial \{T\})]$ 는 q 가 무시되었으므로 0으로 되고, c_3 상에서 $[(\partial \phi^{(4)}) / (\partial \{T\})]$ 에 jk 사이의 변에서만 대류 현상이 일어나므로 $N_i = L_i = 0$ 가 된다. 그리고

$$\int_{c_3} h [N]^T [N] ds = h \int_{c_3} \begin{pmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{pmatrix} (N_i \ N_j \ N_k) ds \quad (20)$$

이다. $[(\partial \phi^{(5)})/(\partial \{T\})]$ 에서도 면적 좌표를 사용하면¹³⁾

$$\left[\frac{\partial \phi^{(5)}}{\partial \{T\}} \right] = \int_{c_s} h T_a [N^{(e)}]^T ds \dots\dots\dots (21)$$

이다. 전 영역에서 열전도의 미분방정식을 식 (21)에 대입하면

$$\frac{\partial \phi}{\partial \{T\}} = \sum_{e=1}^E ([k^{(e)}] \{f^{(e)}\}) = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$[k^{(e)}] = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \{T\}} + \frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial \{T\}}$$

$$[f^{(e)}] = \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \{T\}} + \frac{\partial \phi^{(5)}}{\partial \{T\}}$$

그러므로 식(22)으로부터 2차원 고체 내부 4

각열원 주위의 온도 분포를 구할 수 있다.

3. 계산에

3.1 해석 모형의 기하학적 형상

유한요소법을 적용시키기 위해서 해석 모형을 Table 1에 나타내었다.

Table 1 Main dimension of model

Model	1	2	3	4	5	6
a×a(cm)	16×16	16×16	16×16	8×8	8×8	8×8
L(cm)	12	8	4	24	16	4

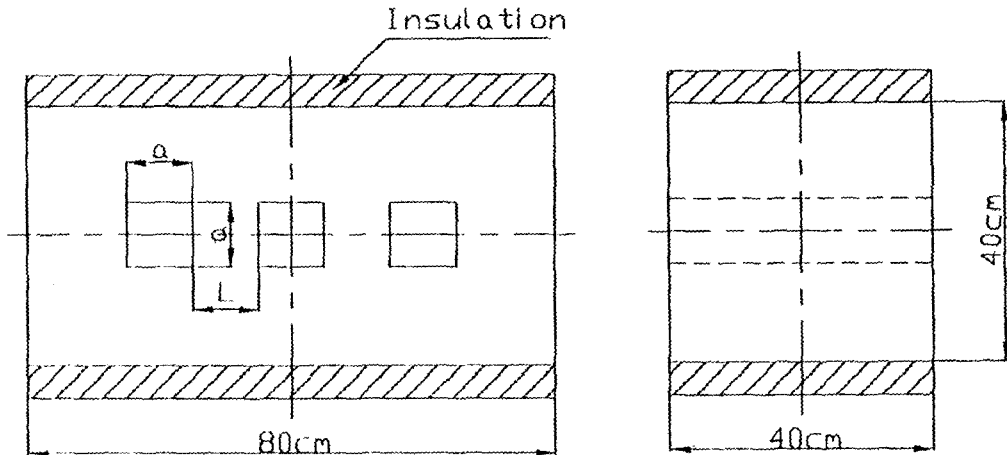


Fig. 2 Basic model

구조의 대칭성을 고려하여 1/4만을 택하여 해석하였고, 모형의 양표면층은 단열 되었다고 가정하였으며 또 다른 양면 층은 대기와 접한다. 그리고 axa는 정4각형 열원의 가로×세로 치수이고, L은 열원 사이의 간격이며 열원의 크기는 16×16, 8×8cm 2가지로 하였다. 그리고 유한요소법에 의한 계산의 입력 자료는 model 2의 경우 3각형 요소는 76개, 절점은 56으로 하였으며 외기 및 열원의 온도는 26℃, 70℃로 하였다. 이에 관한 요소분할은 Fig. 3에 나타내었다.

3.2 수치계산

Fig. 3에 표시한 절점의 각 node좌표치를 입력

자료로 사용하였으며, 여기서 계산을 간단히 하기 위해 각요소에 대해 온도 강성 matrix[k]와 내부 열량 및 경계에서의 전열에 관한 matrix {f}를 각각 구한 후 그들을 전체에 대해서 계산하였다. 입력 데이터는 model 1-6까지 k=0.5 W/m·℃, h=10 W/m²·℃, T_a=70℃, T_c=26℃로 하였으며, model 2에 대해서 T_a, T_c, h는 고정시키고, k만 0.3, 0.5, 5, 7 W/m·℃로 변화 시켰고, 또 k, T_a, h는 고정시키고, T_c를 80℃로 하여 계산하였다. 그리고 수치해석 및 실험에서 구한 온도를 대기온도로 무차원화한 온도(DT)로 비교하였다¹⁴⁾.

DT : Dimensionless temperature (T-Ta)/(Tc-Ta)

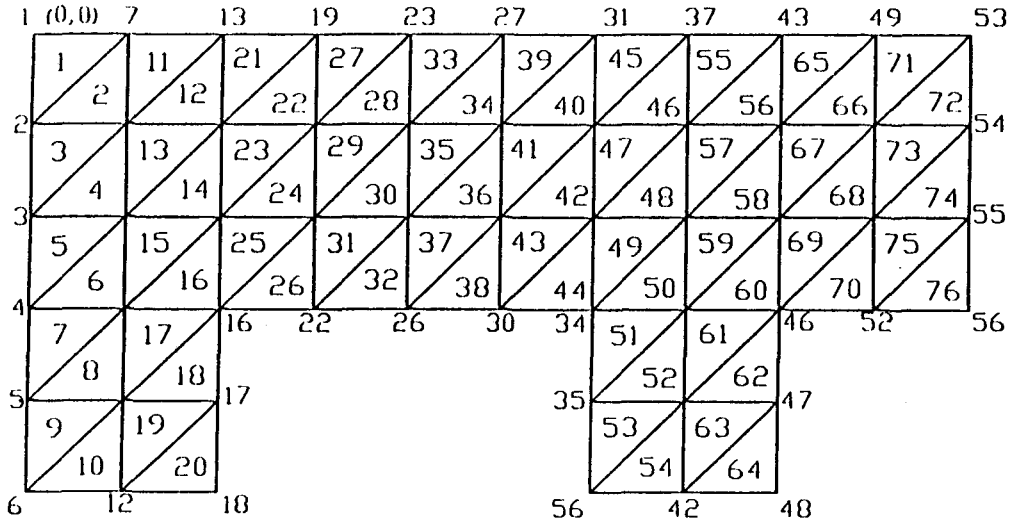


Fig. 3 Subdivision of triangular finite element equal size (Model 2)

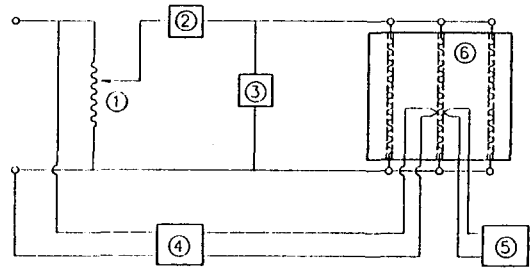
4. 실험 장치 및 실험 방법

실험 장치는 Fig. 4와 같고, 열전도 매질은 gypsum ($k=0.5 \text{ W/m}\cdot\text{C}$)을 사용하였다. 내부 열원은 한 변이 16 cm인 정사각형 3개를 평행하게 연속으로 높이 1/2되는 곳에 고정시켰다.

그리고 열원의 성형시는 아크릴 판을 사용하였으며 양대류를 받는 부분은 공기와 접하고 이를 제외한 부분에서는 그라스울을 넣고, 그 위에 다시 베니어판을 부착하여 단열시켰다.

열발생장치는 지름이 3 cm인 개방형 석고 봉을 사용하여 500 W 니크롬선을 등간격으로 감았다. 그리고 양벽은 냉각을 막기 위해 석고보드로 밀봉시켰다. 측정에 사용된 열전대는 0.1 mm C-A를 사용하였으며, 그 접점은 각요소절점의 2차원 평면 길이 방향으로 약 2 cm 지점에 일정하게 매입하였다. 그리고 등온 정상 상태를 유지하기 위해 온도조절기를 사용하였으며 열원의 조정은 슬라이더 닥트를 사용하였다. 열원의 저항을 조정하기 위해 전압계와 전류계를 사용하였다. 실험은 열원이 충분히 안정후 하였으며 열원의 온도는 70°C로 하였다.

수치 해석에 의해서 구한 온도 분포와 실험에서 구한 온도 분포를 비교하기 위해 실험은 model 2에 대해서 행하고, 각요소 절점의 온도는 potentiometer로 측정하였다.



1. Slide-duct 2. Ammeter 3. Voltmeter
4. Thermo-controller 5. Potentiometer 6. Test cell

Fig. 4 Schematic diagram of experimental apparatus

5. 유한요소법의 수치해석 및 실험치의 비교

Model 2에서 유한요소법에 의해서 구한 온도와 실험에서 구한 온도를 무차원화하여 도사하였다. 각 그림의 원점은 Fig. 3에서 좌측면의 최상단을 원점으로 하였다. Fig. 5(a)은 좌측면에서 수평방향으로 4 cm, 28 cm 떨어진 곳의 수직방향의 온도분포를 나타낸 그림이다. 유한요소법에서 구한 온도분포보다도 실험에서 구한 온도분포가 대체로 낮게 나타났다. 이것은 유한요소법에서는 완전한 단열상태로 가정하였으나 실제의 실험 상태는 완전한 단열이 되지 못하였기 때문이라 생각된다. 그림에서 열원이 가까운 곳에서

는 그 차가 적었으나 열원에서 멀어질수록 그 차는 컸다. 이것은 외부의 외기의 영향이 커졌기 때문이라 생각된다. Fig. 5(b)는 model 2의 수평방향의 무차원온도 분포를 나타낸 그림이다. 그림에서 보는바와 같이 Fig. 5(a)과 유사한 현상이나 그 변화의 폭은 작았다. 상면하 8cm인 곳의 온도 분포는 실험치와 계산치는 거의 같았다.

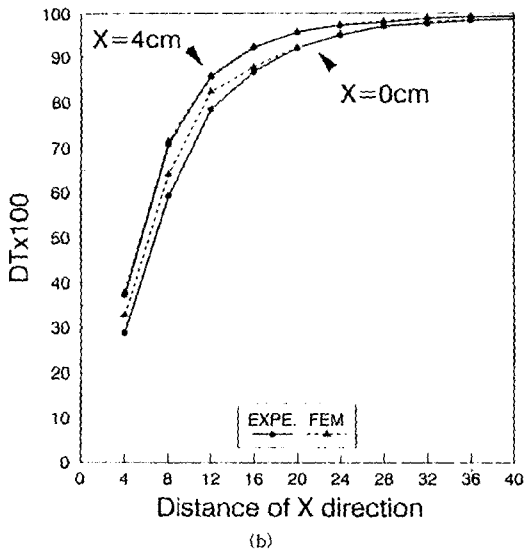
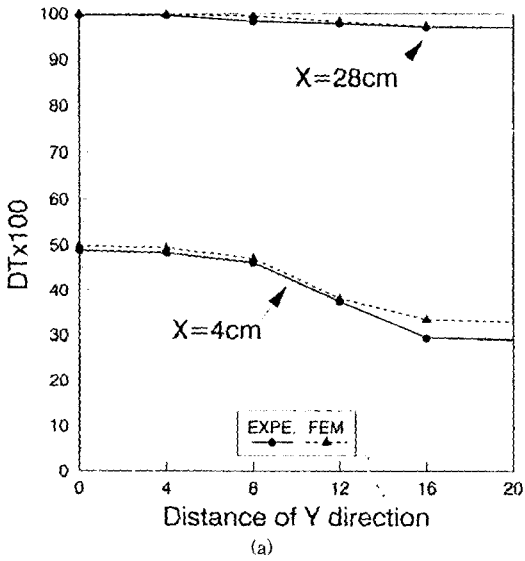


Fig. 5 Comparison the FEM value and experimental value in model 2

Fig. 6은 열원의 중심방향 이동에 따른 열전도에 미치는 영향을 도시하였다. 그림은 상면하 8cm인 곳의 좌측면에서 수평방향 온도분포이다. 그림에서 보는 바와 같이 열원사이의 거리(L)가 가까울수록 좌측면과의 거리가 멀어지므로 외기의 영향을 많이 받으므로 온도의 분포가 낮게 나타났다. 그러나 중심방향으로 나아갈수록 열원의 영향을 많이 받게 되므로 거의 일치하였다.

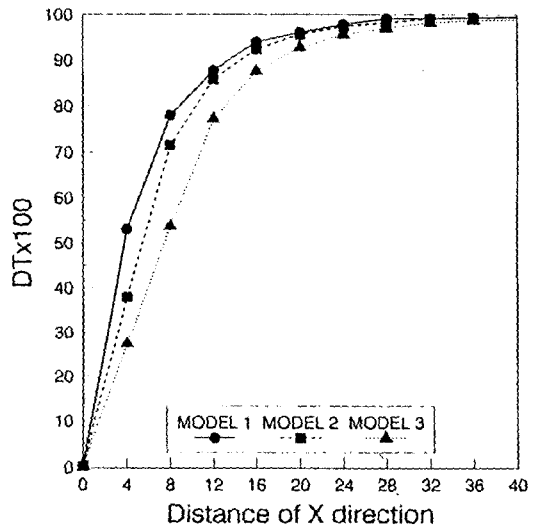


Fig. 6 Temperature distribution according to L(between heat source length)

계산에 적용된 열원은 model(1-3)은 16×16 cm와 model(4-6)은 8×8 cm이다. Fig. 8은 2가지 열원이 온도 분포에 미치는 영향을 나타낸 그림이다. 그림에서 ●▲는 각 model의 상면하의 4cm, ○△는 상면하 8cm인 곳의 온도분포이다. model 2가 높은 온도를 보이거나 model 5와의 경향은 같았다.

Fig. 8는 model 2에서 열전달계수 h 를 10 W/m²·°C로 하고 열전도계수 k 를 0.3 W/m·°C, 0.5 W/m·°C, 5 W/m·°C, 7 W/m·°C로 하였을 때 온도 분포를 도시하였다. k 의 값이 커짐에 따라 온도는 상승하였다. 그리고 온도의 편차도 커졌다. 이 영향은 좌측면에서 4cm떨어진 곳이 28cm 떨어진 곳보다 영향이 컸다. 이것은 외기의 영향을 많이 받기 때문이라 생각된다. 그러나 28

cm에서는 거의 일치하였다. 이 영향은 수직방향 이 수평방향보다 컸다.

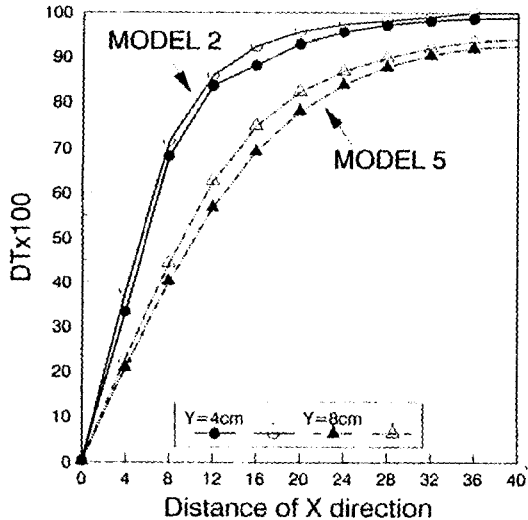


Fig. 7 Temperature distribution according to heat source size change

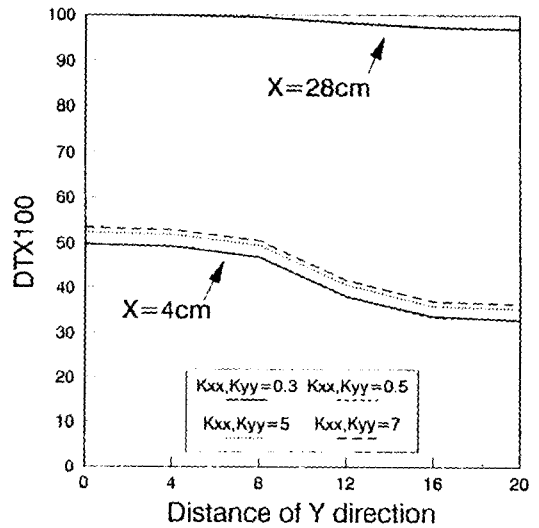
6. 결론

고체내부 4각열원 주위의 온도 분포에 대한 특성을 연구하기 위해서 유한요소법에 의한 계산치와 실험치를 비교 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

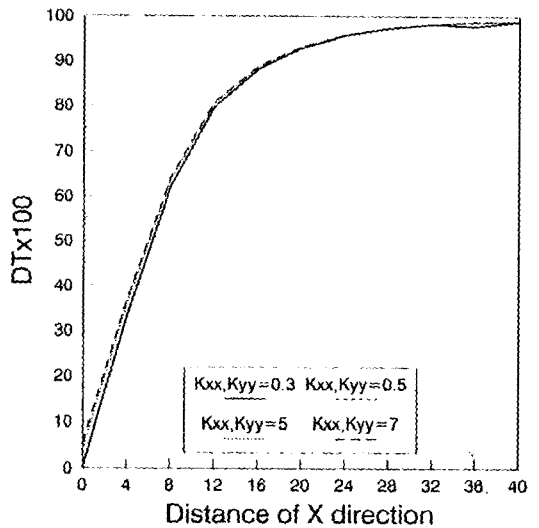
- 1) 유한요소법의 변분법에 의한 계산결과는 실험결과와 거의 일치하였다.
- 2) 4각열원 사이의 거리가 가까울수록 주위의 온도분포 특성은 저온 분포를 나타내고 있고 멀 수록 고온분포를 나타내고 있다.
- 3) 열전도계수 k 를 변화시킨 결과 수직방향의 온도변화에 큰 영향을 주었다.

참 고 문 헌

- 1) 川下研介, 熱傳導論, オム社, pp. 3~11, 1966.
- 2) M.E. Cunningham and K.L. Peddicord, "Heat conduction in sphere packed in an Infinite regular cubical array", Int. Heat Mass Transfer Vol. 24, No. 7, 1981.
- 3) 서정운, 임장순, 엄기찬, 전열학, 청문각, pp.



(a)



(b)

Fig. 8 Temperature distribution according to heat conductivities(k) change

42~53, 1989.

- 4) J.P. Holman, Heat Transfer, Tower Press, pp. 8~62, 1976.
- 5) 尹義博, "熱傳導解析에 관한 有限要素法의 一例", 科學技術 第8輯, pp. 47~52, 1980.
- 6) 윤정인, 김시범, 차상원, 허만영, 열전달, 시그마프레스, pp. 15~29, 1997.

- 7) 임상전, 곽병만, 이주성, 유한요소법 입문, 동명사, pp. 1~10, 1997.
 - 8) Wilsion Edward L. and Robert E. Nickell, "Application of the Finite Element Method to the Heat Conduction Analysis", Nuclear Engineering and Design, Vol. 4, pp. 276~286, 1966.
 - 9) 川井忠彦, 有限要素法(1), 日本造船學會誌, 제172권, pp. 473~481, 1968.
 - 10) O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method Engineering Science, McGraw Hill, pp. 4~5, 1971.
 - 11) Kenneth H.Huebner, The Finite Element for Engineers, John Wiley and Son Inc., pp. 246~253, 1975.
 - 12) Bruce A. Finlayon, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, pp. 221~225, 1972.
 - 13) 失川元基, 流れ熱傳導の有限要素法 入門, 培風館, pp. 112~114.
 - 14) Olusoji Ofi and H.J. Hetherington, "Application of Finite Element Method to Natural Convection Heat Transfer from the Open Vertical Channel", Int. J. Transfer, Vol. 20, pp. 1195~1204, 1977.
-