

從動力을 받는 외팔보의 安定性에 관한 이론적 연구

Theoretical Study on The Stability of the Cantilever
Beam Subjected to a Follower Force

윤한익* · 손종동** · 김현수*

H.I. Yoon · J.D. Son · H.S. Kim

(1997년 5월 15일 접수, 1998년 2월 27일 채택)

ABSTRACT

On the stability of the cantilever beam subjected to a follower force at the free end, the influences of the translational spring and the moment of inertia of a tip mass at the free end have been studied by numerical methods. The centroid of a tip mass is offset from the free end of a Beam and is located along its extended axis to vary the value of moment of inertia of a tip mass. It is proved that as the constants of a spring supporting the free end are augmented, the critical flutter loads of the above system decrease, whereas they increase without a tip mass.

1. 서론

비보존력을 받는 탄성계의 안정성문제에 관한 연구는 기계공업의 발달과 함께 많은 연구가 진행되어 왔다. 탄성안정의 이론적기초는 Euler에 의하여 연구되었다¹⁾. Euler는 탄성계에 작용하는 외력을 모두 보존력으로 생각하여 계의 안정성을 연구하였다. 이 이론은 정적해석에 의한 것으로 20세기 중반에 이르기까지 아무런 논란

없이 탄성안정의 해석에 광범위하게 적용되어 왔다. 그러나 1928년 Nikolai²⁾는 비틀림을 받는 봉의 탄성안정성을 검토하면서 Euler의 정적방법으로는 만족할 만한 좌굴비틀림하중을 구할 수 없어 미소진동법을 사용하여 해를 구하였다. 그 후 Euler의 방법은 탄성계의 안정성을 검토함에 있어서 모든 경우에 적합하지 않음이 Ziegler에 의하여 지적될 때까지는 수십년이 걸렸다.

* 동의대학교 기계설계학과

** 동명전문대학교 산업안전과

Ziegler³⁾는 Euler의 정적방법이 적용되지 않음을 비보존력작용 때문이라고 주장하였다. 그는 비보존력을 받는 탄성계는 동적안정 또는 동적불안정 상태에 놓이게 되므로 그 안정성은 동적 방법으로 해석되어야 함을 증명하였다.

Ziegler는 동력학적 관점에서 안정이론을 정립하였고 탄성계에 작용하는 비보존력을 다음과 같이 분류하였다.

- 1) 시간에 따라 크기가 변하는 힘(Instationary Force)
- 2) 속도에 따라 크기가 변하는 점성감쇠력(Dissipative Force)
- 3) 시간과 속도에 관계없이 작용방향이 바뀌지는 일정한 크기의 힘(Circulatory Force)

시간과 속도에 관계없이 작용방향이 바뀌지는 일정한 크기의 힘 중에 대표적인 것이 종동력이며, 종동력은 계의 변위에 따라서 그 작용방향이 바뀌는 일정한 크기의 힘이다.

Beck⁴⁾는 자유단에 압축종동력을 받는 균일단면의 외팔보 기둥(이하 Beck 기둥이라 한다)의 임계 플러터하중을 동적안정기준(kinetic stability criterion)에 의하여 계산하였고, Pflüger⁵⁾는 자유단의 말단질량의 관성력이 Beck 기둥의 자유단과 보의 중앙에 집중질량이 있을 때, 그들이 보의 안전성에 미치는 영향을 연구하였다. Deineko와 Leonov⁶⁾는 Beck 기둥의 자유단과 보의 중앙에 집중질량이 있을 때, 그들이 보의 안전성에 미치는 영향을 연구하였다. Bolotin⁷⁾, Leipholz⁸⁾는 탄성안정의 비보존적 문제를 그의 저서에서 광범위하게 설명하였다. Walter, Levinson⁹⁾, Anderson¹⁰⁾들은 집중말단질량의 회전관성(rotatory inertia)의 영향을 고려한 Beck 기둥을 연구하였다. 또 Anderson, Vasilakis, Wu¹¹⁾들은 말단질량의 무게중심이 보의 자유단에 있지 않은 경우, 그 말단질량의 증가가 보의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다. 윤, 김¹²⁾은 말단질량의 형상에 의한 그 관성모우멘트의 변화가 보의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다.

본 논문에서는 말단질량이 부착된 Beck기둥의 자유단이 병진스프링으로 탄성 지지되는 계의 운동방정식과 그 경계조건의 식을 Hamilton 원리로 유도하여 그 안정성을 연구하였다.

2. 이론 해석

Fig. 1은 탄성지지된 자유단으로 부터 그 무게중심이 c 만큼 떨어져 있는 말단질량을 가진 탄성봉이 압축종동력 P를 받고 있는 비보존적 탄성계이다. 이 탄성계의 평형위치에서 충분히 작은 횡변위가 주어진 교란된 운동이 일어나서 탄성봉이 횡진동할 때 그 운동 방정식과 경계조건의 식을 유도하기 위하여 Hamilton 원리를 적용하였다. 비보존적 선형계에 대한 Hamilton 원리는 다음과 같이 쓸 수 있다^{12,13)}.

$$\int_{t_1}^{t_2} L dx + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_N dt = 0 \dots\dots\dots (1)$$

여기서 L은 Lagrangian 함수로서

$$L = T - V + W_C \dots\dots\dots (2)$$

이고, T: 계의 전운동에너지

V: 계의 전변형에너지

W_C: 변형이 일어나는 동안에 보존적 외력에 의하여 이루어진 일량

W_N: 변형이 일어나는 동안에 비보존적 외력에 의하여 이루어진 일량이다.

Fig.1에서

$$T = 2 \int_0^l \rho A w^2 dx + \frac{1}{2} M w^2(l, t) + (J + M c^2) \dot{\varphi}^2(l, t) \dots\dots\dots (3)$$

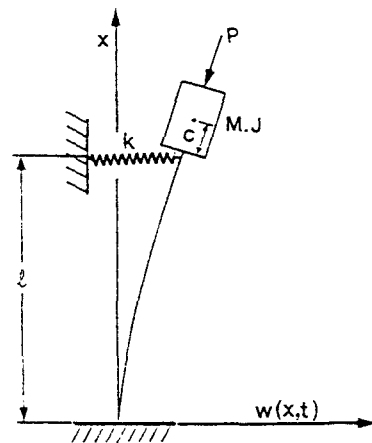


Fig. 1 Clamped-free elastic rod with a tip mass and spring at the free end subjected to a compressive follower force

$$V = 2 \int_0^l EI \varphi'{}^2 dx + \frac{1}{2} k w^2(l, t) \dots\dots\dots (4)$$

$$W_C = 2 \int_0^l P w'{}^2 dx \dots\dots\dots (5)$$

$$W_N = -P y(l, t) y'(l, t) \dots\dots\dots (6)$$

이고, $t_1 \sim t_2$ 에서 식(3)~식(6)의 변분식은

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l \rho A \ddot{w} \delta w dx + M \ddot{w}(l) \delta w(l) + (J + M c^2) \ddot{\varphi}(l) \delta \varphi(l) \right] dt \dots\dots\dots (7)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[EI \varphi' \delta \varphi \Big|_0^l - EI \varphi'' \delta \varphi \Big|_0^l + \int_0^l EI \varphi'' \delta y dx \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} k w(l) \delta w(l) dt \dots\dots\dots (8)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W_C dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[P w'(l) \delta w(l) - \int_0^l P w'' \delta w dx \right] dt \dots\dots\dots (9)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W_N dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[-P w'(l) \delta w(l) \right] dt \dots\dots\dots (10)$$

이다. 식(7)~식(10)을 식(1)에 대입하면

$$\int_0^l (EI w_N + P w'' + \rho A w''') \delta w dx + [EI w''(l) + (J + M c^2) \ddot{w}(l)] \delta \varphi(l) - [EI \ddot{w}(l) - M \ddot{w}(l) - k w(l)] \delta w(l) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

으로 정리된다.

고정단의 횡변위와 변형각이 0인 점과 식(11)로부터 계의 운동방정식과 경계조건의 식은 다음과 같다.

운동방정식

$$EI w_N(x, t) + P w''(x, t) + \rho A w'''(x, t) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

경계조건의 식

$$w(0, t) = w'(0, t) = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$EI w''(l, t) + (J + M c^2) \ddot{w}(l, t) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$EI \ddot{w}(l, t) - M \ddot{w}(l, t) - k w(l, t) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

여기서 $w(x, t)$ 는 탄성봉의 횡변위이고, EI 는 탄성봉의 굽힘 강성계수, P 는 압축종동력, ρ 는 탄성봉의 밀도, A 는 탄성봉의 단면적, i 은 탄성

봉의 길이, M 은 말단질량, J 는 말단질량의 c 점에 대한 관성모멘트, t 는 시간이고 ($'$, $'$)는 각각 x 와 t 에 대한 미분을 나타낸다. 식(14)와 (15)에서 $c=0$ 이면 자유단에 집중질량을 갖는 탄성봉의 경계조건 식이 되고, 또 $c=0$, $J=0$ 이면 Pflüger⁵⁾의 문제로 된다.

식(12)의 해는 다음과 같은 형태로 된다

$$w(x, t) = v(x) e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1} \dots\dots\dots (16)$$

여기서 ω 는 탄성봉의 고유원진동 수이다. 식(16)과 무차원 독립변수 $\xi = x/l$ ($0 < \xi < 1$)을 식(12)~(15)에 대입하면 다음과 같이 무차원화된 고유치 문제가 된다.

운동방정식

$$\frac{\partial^4 v(\xi)}{\partial \xi^4} + PL \frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial \xi^2} - \Omega^2 v(\xi) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

경계조건의 식

$$v(0) = \frac{\partial v(0)}{\partial \xi} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial^2 v(1)}{\partial \xi^2} - \Omega^2 (\gamma + \mu \alpha^2) \frac{\partial v(1)}{\partial \xi} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{\partial^3 v(1)}{\partial \xi^3} + \Omega^2 \mu v(1) - \kappa v(1) = 0 \dots\dots\dots (20)$$

여기서

$$PL = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho Al^4 \omega^2}{EI}, \quad \gamma = \frac{J}{\rho Al^3}$$

$$\mu = \frac{M}{\rho Al}, \quad \alpha = \frac{c}{l}, \quad \kappa = \frac{kl^3}{EI} \dots\dots\dots (21)$$

인 무차원 매개변수이다.

식(17)의 해는 $v(\xi) = \bar{c} e^{\lambda \xi}$ 의 꼴이고, $e^{\pm \lambda_1} = \cosh \lambda_1 \pm \sinh \lambda_1$, $e^{\pm i \lambda_2} = \cos \lambda_2 \pm i \sin \lambda_2$ 의 관계로부터 그 일반해는

$$v(\xi) = A_1 \cosh \lambda_1 \xi + A_2 \sinh \lambda_1 \xi + A_3 \cos \lambda_2 \xi + A_4 \sin \lambda_2 \xi \dots\dots\dots (22)$$

가 되고, 여기서

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{2}} [(PL^2 + 4\Omega^2)^{1/2} + (-1)^n PL]^{1/2}, \quad n=1, 2 \dots\dots\dots (23)$$

이다. 식(12)를 경계조건의 식(18)~(20)에 대입하여 정리하면 다음 4개의 선형 제차 대수 방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} A_k = 0, \quad j=1, 2, 3, 4 \dots \dots \dots (24)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= 1, & a_{14} &= 0, \\ a_{21} &= 1, & a_{22} &= \lambda_1, & a_{23} &= 1, & a_{24} &= \lambda_2, \\ a_{31} &= \lambda_1^2 \cosh \lambda_1 - \Omega^2 (\gamma + \mu \alpha^2) \lambda_1 \sinh \lambda_1 \\ a_{32} &= \lambda_1^2 \sinh \lambda_1 - \Omega^2 (\gamma + \mu \alpha^2) \lambda_1 \cosh \lambda_1 \\ a_{33} &= -\lambda_2^2 \cos \lambda_2 + \Omega^2 (\gamma + \mu \alpha^2) \lambda_2 \sin \lambda_2 \\ a_{34} &= -\lambda_2^2 \sin \lambda_2 - \Omega^2 (\gamma + \mu \alpha^2) \lambda_2 \cos \lambda_2 \\ a_{41} &= \lambda_1^3 \sinh \lambda_1 + (\Omega^2 \mu - \kappa) \cosh \lambda_1 \\ a_{42} &= \lambda_1^3 \cosh \lambda_1 + (\Omega^2 \mu - \kappa) \sinh \lambda_1 \\ a_{43} &= \lambda_2^3 \sin \lambda_2 + (\Omega^2 \mu - \kappa) \cos \lambda_2 \\ a_{44} &= -\lambda_2^3 \cos \lambda_2 + (\Omega^2 \mu - \kappa) \sin \lambda_2 \end{aligned}$$

대수 방정식 계(24)가 유의미한 해(non-trivial solution)를 갖기 위해서는 그 계수 행렬식이 영이어야 한다.

이를 간단히 표현하면

$$\det(a_{jk}) = 0 \quad j, k=1, 2, 3, 4 \dots \dots \dots (26)$$

이 되고, 이 고유치 방정식 (26)은

$$f(\Omega^2, P_L) = 0 \dots \dots \dots (27)$$

의 함수이고, 식(27)이 $P_L = P_{Lcr}$ 일 때, 하나의 2중근 Ω^2 를 갖는다는 조건으로 부터 임계플러터 하중 (critical flutter load) P_{Lcr} 을 구한다.

3. 수치해석결과 및 고찰

충분히 작은 종동력 P_L 을 선택하여 식(26)를 만족시키는 Ω^2 를 구하면 횡진동의 제 1, 2차 또는 3, 4차 모드(mode)에 해당되는 진동수를 얻게 된다.

P_L 을 점차 증가시키면 1, 2차 진동수는 차츰 가까워져서 겹쳐지게 되는데, 그 때의 P_L 이 임계플러터하중 P_{Lcr} 이 되고, 또 겹쳐지는 그 진동수가 임계플러터 진동수 Ω_{cr}^2 이 된다. P_L 이 이 값 이상으로 증가하면 진동수 방정식의 실근은 없으며, 탄성봉의 횡진동진폭은 지수적으로 증가하여 안정을 잃게 된다.

계의 안정성에 영향을 미치는 무차원 매개변

수 $\kappa, \alpha, \eta, P_L$ 들의 값을 변화시키면서 수치 해석하여 임계플러터하중 P_{Lcr} 를 구하여 계의 안정성을 규명하였다.

3.1 말단질량과 그 관성모우먼트가 동시에 변할 때

탄성봉과 말단질량의 횡단면은 원형단면으로 하고, 그 지름의 비는 1:2로 하였다.

탄성봉의 횡단면 반경을 b , 말단질량의 단면 반경을 a 라고 하면

$$I = \frac{\pi b^4}{4}, \quad u = \frac{I}{\sqrt{A}} = \frac{b}{2}, \quad m = \rho \pi b^2$$

$$M = 2\rho \pi ca^2, \quad J = \frac{\pi}{6} \rho_i ca^2 (3a^2 + 4c^2) \dots \dots \dots (28)$$

가 되고, 여기서 ρ 는 탄성봉재료의 밀도, ρ_i 는 말단질량의 밀도이고 u 는 탄성봉 단면의 회전 반경이다.

$a=2b, \rho = \rho_t$ 를 취하면 식(25)의 μ 와 $(\gamma + \mu \alpha^2)$ 은

$$\mu = \left(\frac{\rho_t}{\rho}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{2c}{l}\right) = 8p\alpha \dots \dots \dots (29)$$

$$\begin{aligned} \gamma + \mu \alpha^2 &= \frac{\mu}{12} \left\{ \left(\frac{2c}{l}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 12\left(\frac{c}{l}\right)^2 \right\} \\ &= 32p\alpha \left(\frac{\alpha^2}{3} + \frac{1}{s^2}\right) \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

가 되고, 여기서 s 는 탄성봉의 세장비이고, $s=100$ 으로 한다.

식(26)에 식(29)와 식(30)을 대입하면 식(26)은 말단질량의 길이의 매개변수 α 의 함수가 된다. Fig. 2는 $\kappa=10, \alpha=0.1$ 인 계의 고유치 곡선이다. P_L 이 증가함에 따라서 1, 2차 모드의 고유치 Ω^2 의 값은 점차 가까워져서 변곡점에서 만나게 된다.

변곡점의 좌표는 (40.2, 14.03)이다. 즉 임계플러터하중 $P_{Lcr}=14.03$ 이고, 임계플러터 진동수 $\Omega^2=40.2$ 이다. 이 계의 안정영역은 그림에서와 같이 $P_L=14.03$ 이하의 전영역이다.

Fig. 3에서 Fig. 12까지에 κ 의 각 값에 대하여 α 에 따른 임계플러터 하중 P_{Lcr} 과 임계플러터 진동수 Ω_{cr}^2 의 변화를 세종류의 p 값에 대하여 도시하였다.

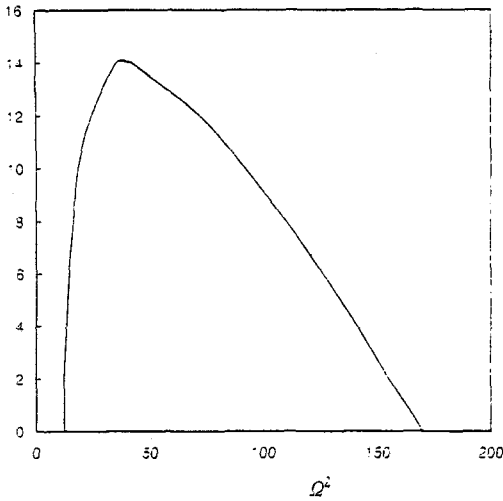


Fig. 2 Eigenvalue curve ($\kappa=10, \alpha=0.1$)

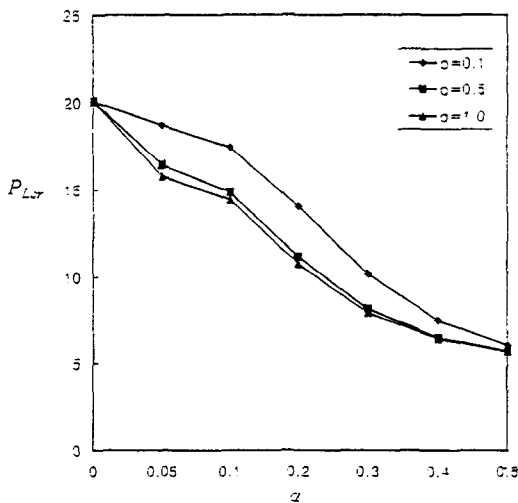


Fig. 3 Variation of $P_{L\alpha}$ versus α ($\kappa=0, s=100$)

Fig. 3에서 $\alpha=0, \kappa=0$ 일때, $P_{L\alpha}=20.05$ 이다. 이는 Beck 기둥의 임계플러터하중이다⁴⁾. α 가 증가함에 따라 $P_{L\alpha}$ 가 단조로우면서도 크게 감소되는데 이것은 곧 α 가 증가됨에 따라 말단질량의 관성모우멘트가 계의 안정성에 미치는 영향이 점점 커지는 것을 의미한다. 밀도가 낮은 $p=0.1$ 의 곡선이 밀도가 큰 $p=1.0$ 의 곡선보다 비교적 원활한 것은 말단질량 그 자체의 영향이

작기 때문이다. 말단질량의 관성모우멘트와 자유단의 스프링 상수를 무시한다면, $\alpha=0.125$ 즉 식(29)에서 탄성봉의 질량과 말단질량의 크기가 같은 $\mu=1$ 에서 말단질량의 영향이 가장 크게 나타나서 계의 임계플러터 하중이 제일 작아진다⁴⁾.

그러므로 α 의 작은 값에서는 곡선의 경사가 급하지만 α 가 증가할 수록 곡선의 경사가 완만해져 말단질량의 관성모우멘트의 영향을 감소시킨다.

Fig. 4에서 α 가 증가됨에 따라 Ω_{α}^2 가 급격히 감소되면서 그 곡선이 대단히 원활하다. 또 밀도비가 클 수록 곡선의 경사는 더 급하다. 이 현상은 말단질량과 그 관성모우멘트가 모두 임계플러터 진동수를 감소시키기 때문이다. 반면, 말단질량이 상당히 크지면 진동수는 대단히 낮아져서 α 에 따른 변화가 둔해지고 있다.

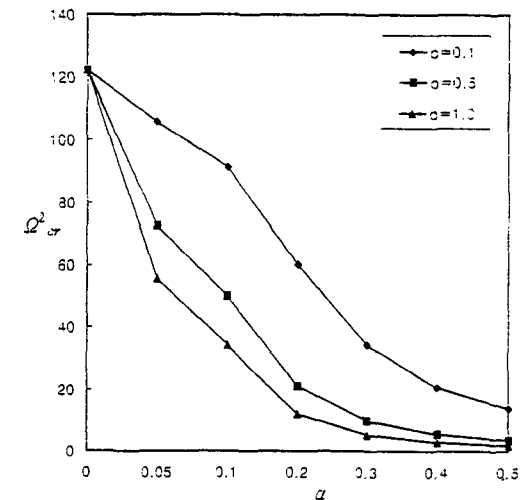


Fig. 4 Variation of Ω_{α}^2 versus α ($\kappa=0, s=100$)

$\kappa=1$ 인 Fig. 5와 Fig. 6 그리고 $\kappa=5$ 인 Fig. 7과 Fig. 8에서는 κ 의 값이 작으므로 이들 곡선의 특성은 Fig. 3과 Fig. 4에 매우 유사하다.

Fig. 9~Fig. 12는 α 를 증가시키면서 κ 의 각 값에 대한 임계플러터하중과 임계플러터 진동수를 도시한 것이다. 밀도비 p 의 곡선을 관찰하면 Fig. 9에서는 $\alpha=0.035$ Fig. 11에서는 $\alpha=0.3$ 근방에서 부터 $P_{L\alpha}$ 을 증가시키는 특성을 나타낸다.

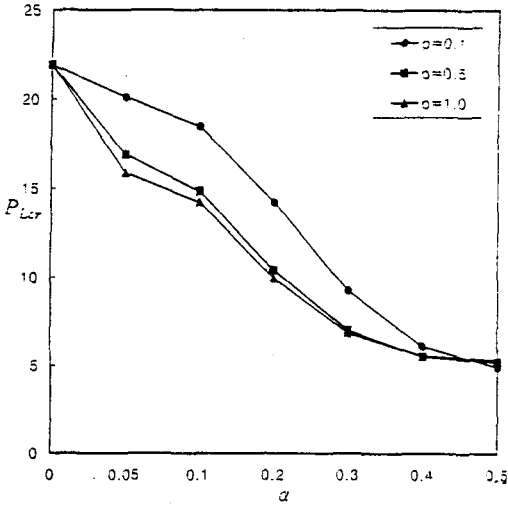


Fig. 5 Variation of $P_{L\sigma}$ versus α ($\kappa=1, s=100$)

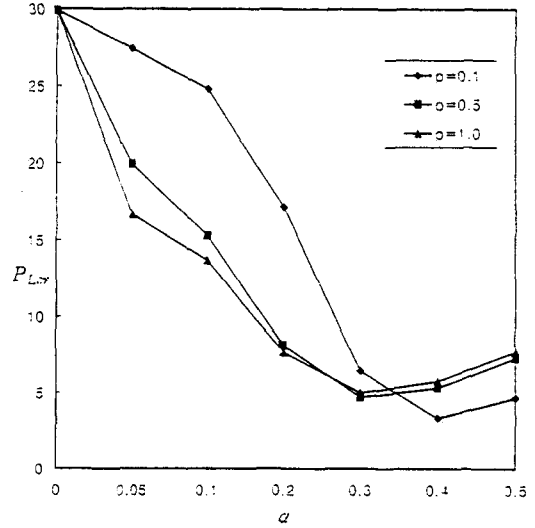


Fig. 7 Variation of $P_{L\sigma}$ versus α ($\kappa=5, s=100$)

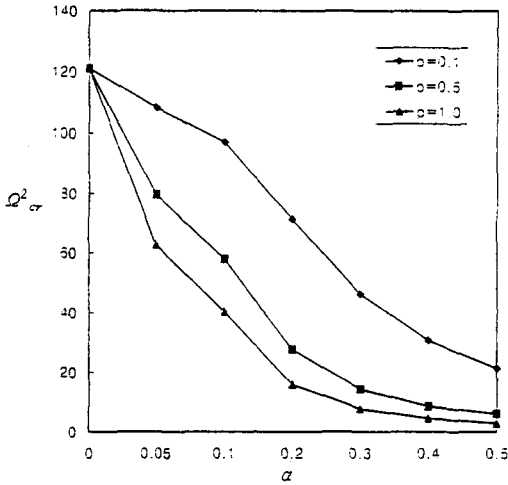


Fig. 6 Variation of Ω^2_{σ} versus α ($\kappa=1, s=100$)

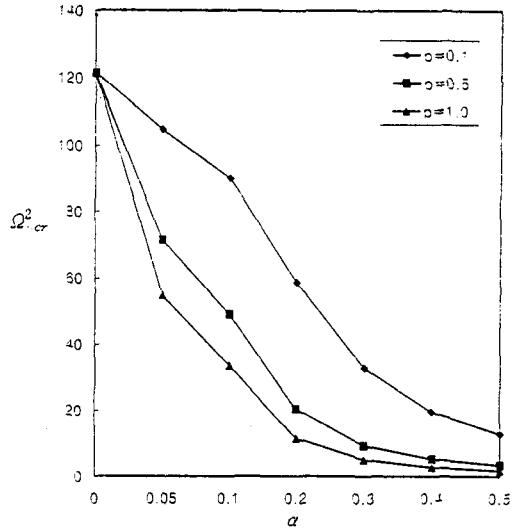


Fig. 8 Variation of Ω^2_{σ} versus α ($\kappa=5, s=100$)

즉 κ 의 값이 10이상 커지면 α 의 큰 값에서 말단질량과 같은 영향을 미친다고 볼 수 있다. 그러나 α 의 큰 값에서도 Ω^2_{σ} 의 곡선이 계속 감소됨은 κ 의 큰 값에 대해서도 말단질량과 그 관성모우멘트가 모두 Ω^2_{σ} 를 감소시키기 때문이다. 또 α 의 큰 값에서 Ω^2_{σ} 의 값은 κ 의 영향을 매우 적게 받고 있다.

Fig. 13은 κ 의 각 값에 대한 밀도비 $p=1$ 의 곡선을 비교하였다.

$\alpha=0.3$ 에서부터 α 값이 증가함에 따라 곡선

의 간격이 좁혀짐은 스프링상수의 영향이 상대적으로 줄어들고, 말단질량의 영향이 커짐을 알 수 있다. 또 $\alpha=0\sim 0.05$ 사이에서 곡선의 경사가 급하여 임계플러터하중의 급격한 감소는 말단질량과 그 관성모우멘트가 계의 안정성에 큰 영향을 미치기 때문이다. 즉, $\alpha=0.125$ 까지는 상술한 바와 같이 말단질량과 그 관성모우멘트와 함께 계의 임계플러터 하중을 감소시키기

때문이다.

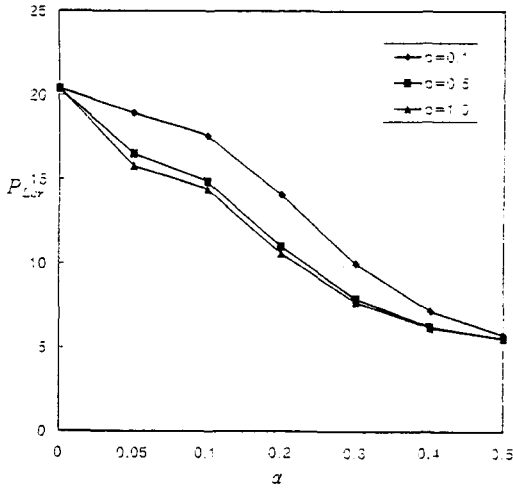


Fig. 9 Variation of $P_{L\sigma}$ versus α ($\kappa=10, s=100$)

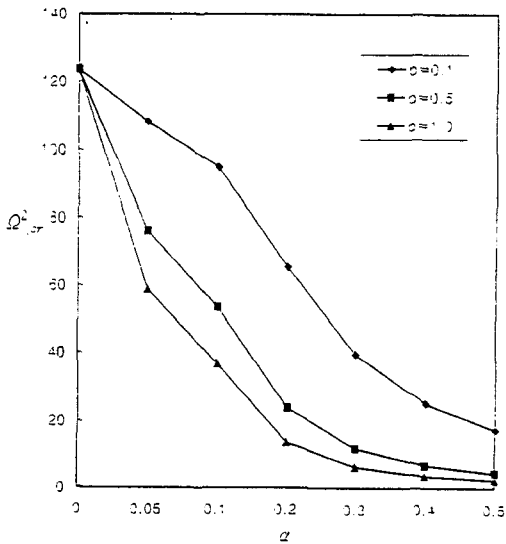


Fig. 10 Variation of Ω^2_{σ} versus α ($\kappa=10, s=100$)

α 가 증가함에 따라서 계의 임계플러터하중이 계속 감소됨은 말단질량의 관성모우멘트와 자유단을 지지하는 병진스프링 때문이다¹⁵⁾.

그러나 $\alpha=0.125$ 이상에서 곡선이 완만해짐은 말단질량의 크기가 임계플러터하중을 오히려 증가시키기 때문이다¹⁴⁾. 특히 $0.1 < \alpha < 0.3$ 에서 $\alpha=0$ 일 때와는 반대로 스프링상수가 클수록 계

의 임계플러터하중이 더 작아진 점은 말단질량의 관성모우멘트와 관계되는 것으로 생각되며, 매우 주목할 사항이다.

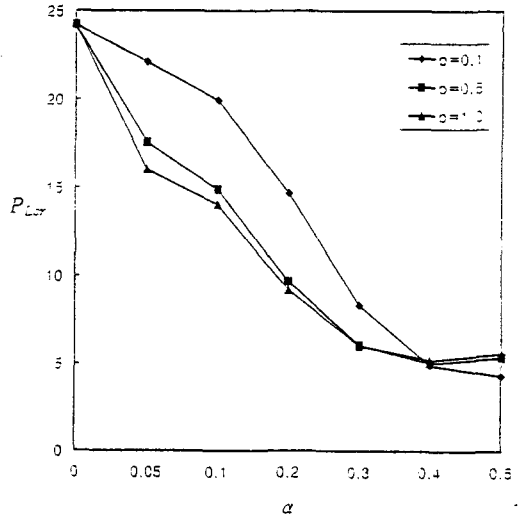


Fig. 11 Variation of $P_{L\sigma}$ versus α ($\kappa=20, s=100$)

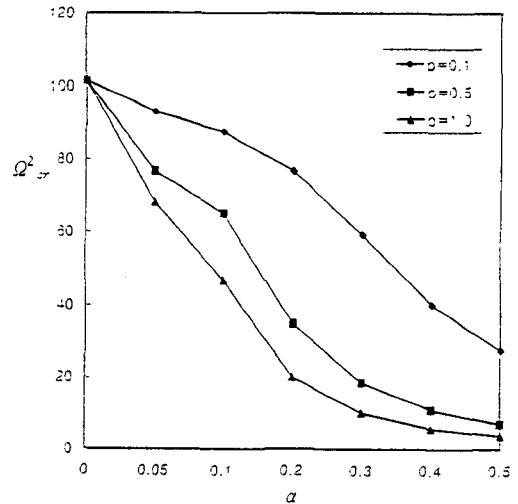


Fig. 12 Variation of Ω^2_{σ} versus α ($\kappa=20, s=100$)

3.2 말단질량은 일정하고 그 관성모우멘트만 변할 때

μ 는 일정한 값을 갖게 하고, γ 를 증감시키기 위하여 다음과 같이 매개변수 η 를 유도한다.

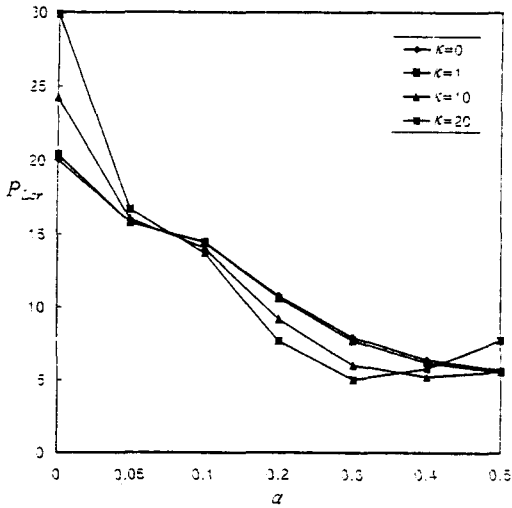


Fig. 13 Variation of P_{Lcr} versus α for values of κ ($\rho=1$)

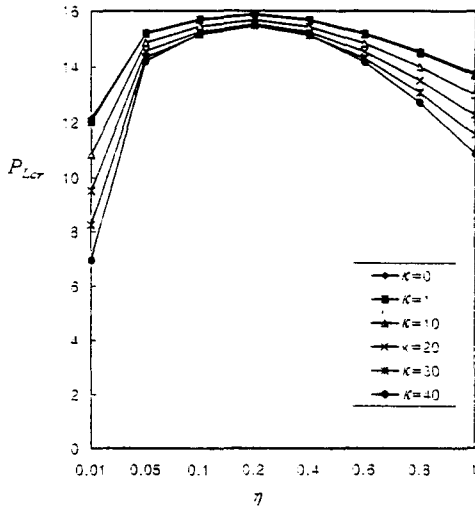


Fig. 14 Variation of P_{Lcr} versus η for values of κ ($\rho=1$)

$$M = 2\rho_t \pi a^2 c = 2\rho_t \pi (a/\sqrt{\eta})^2 \eta c$$

$$= 2\rho_t \pi a_1^2 c_1 = \text{const.} \dots\dots\dots (31)$$

매개변수 η 는 기둥의 자유단으로부터, 말단 질량의 무게중심거리의 변화율이 된다.

말단질량의 크기를 탄성봉의 전질량과 동일하게 하면

$$\mu = \left(\frac{\rho_t}{\rho}\right) \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{2c}{l}\right) = 1$$

여기서 $\rho = \rho_t$, $a=2b$ 이므로 $c=l/8$ 이 된다.

식(29)과 식(30)에 c 는 ηc 로, a 는 $a/\sqrt{\eta}$ 로 치환하고 $c=l/8$ 을 대입하여 정리하면

$$\mu = 1 \dots\dots\dots (32)$$

$$\gamma + \mu \alpha^2 = \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{\eta}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{\eta}\right) \left(\frac{4}{s}\right)^2 + 12 \left(\frac{\eta}{8}\right)^2 \right\} \dots\dots\dots (33)$$

가 되어 식(26)을 η 의 함수로 계산할 수 있다. 여기서 s 는 탄성봉의 세장비이다.

Table 1은 식(33)에 의하여 계산한 말단질량의 관성모멘트 값이다. η 의 값에 따른 그 크기를 비교하였다. 여기서 $\eta \rightarrow 0$ 이면 $(\gamma + \mu \alpha^2) \rightarrow \infty$ 이지만 $\eta = 0$ 이면 식(33)은 불능이 된다. 그러나 엄밀히 말하면 $\eta = 0$ 에서는 질량이 0이 아닌 말단질량을 정의할 수 없으므로 $\eta = 0$ 은 본 논문의 범위가 아니다.

Fig. 14에는 κ 의 각 값에 대하여 말단질량의 관성모멘트가 계의 안정성에 미치는 영향을 도시하였다. 3.1절에서 관찰된 것과 같이 말단질량이 없을 때와는 반대로 스프링상수가 클 수록 계의 임계플러트하중이 작아졌다. 이는 곧 $0.1 < \alpha < 0.3$ 에서 말단질량의 관성모멘트의 영향이 특히 크게 나타남을 의미한다. 말단질량의 관성모멘트가 가장 큰 $\eta = 0.01$ 에서 P_{Lcr} 은 가장 작은 값을 갖는다. 또 $\eta = 0.01$ 과 1에서 관찰되는 바와같이 κ 값이 클 수록 관성모멘트의 영향도 크게 나타나 설계상 중요한 자료가 된다.

Table 1 Values of moment of inertia of a tip mass for magnitude of η . $D=1/12$

s = 100					
η	$(\gamma + \mu \alpha^2)/D$	η	$(\gamma + \mu \alpha^2)/D$	η	$(\gamma + \mu \alpha^2)/D$
0.01	0.4800	0.3	0.0385	0.7	0.1294
0.05	0.0966	0.4	0.0520	0.8	0.1660
0.1	0.0505	0.5	0.0721	0.9	0.2078
0.2	0.0340	0.6	0.0980	1.0	0.2548
0.25	0.0348				

4. 결론

자유단에 말단질량이 부착되고 압축중동력이 작용하는 일단고정 타단자유인 탄성봉의 자유단

이 병진스프링으로 탄성지지되는 계의 안정성을 연구하였다. 자유단의 스프링상수와 말단질량에 계의 안정성에 미치는 영향은 다음과 같다.

- 1) 말단질량과 그 관성모우멘트가 동시에 증가할 때 스프링상수가 클 수록 말단질량과 그 관성모우멘트의 영향이 많이 작용하여 계의 임계플러터하중은 급격히 감소되고, 특히 $0.1 < \alpha < 0.3$ 의 구간에서는 스프링상수가 커질 수록 계의 임계플러터하중은 더욱 감소된다.
- 2) 탄성봉의 질량과 같도록 말단질량을 일정하게 할 때 스프링상수가 커질 수록 말단질량의 관성모우멘트가 계의 안정성에 영향을 크게 미치며, 이때 임계플러터 하중을 더욱 감소시킨다.
- 3) 말단질량이 일정하고 관성모우멘트가 변화하는 경우에 임계플러터 하중과 임계진동수는 관성모우멘트에 영향을 받으며 반비례 한다.

기 호 설 명

- A : 기둥의 단면적
 a : 말단질량의 반경
 c : 기둥 자유단으로 부터 말단질량의도심거리
 E : 기둥재료의 영계수
 I : 기둥단면의 관성모우멘트
 J : 말단질량의 관성모우멘트
 u : 기둥단면의 회전반경
 i : 기둥의 길이
 m : 단위길이당의 보의질량
 M : 말단질량
 P : 압축 종동력
 $P = \rho t / \rho$: 기둥질량에 대한 말단질량의 비
 $P_L = P l^2 / EI$: 무차원 압축 종동력
 $s = l / u$: 기둥의 세장비
 t : 시간
 $v(x)$: 기둥의 횡진폭
 $v(\xi)$: 기둥의 무차원 횡진폭
 x : 기둥을 따라 측정되는 거리
 $\xi = x / l$: 기둥길이에 대한 x 의 비
 $w(x, t)$: 기둥의 횡변위
 $\alpha = c / l$: 기둥길이에 대한 c 의 비
 $r = J / \rho A l^3$: 말단질량의 무차원 관성모우멘트

- η : c 의 크기 변화율
 $\mu = M / \rho A l$: 무차원 말단질량
 ρ : 기둥질량의 밀도
 ρt : 말단질량의 밀도
 ω : 기둥의 원진동수
 $\Omega^2 = \rho A w^2 l^4 / EI$: 기둥의 무차원 원진동수

본 연구는 동명전문대학 학술연구 조성비로 연구되었음.

참 고 문 헌

- 1) L. Euler, Method of Finding Curves Possessing the properties either of a Maximum or of a Minimum, or the Solution of the Isoperimetric Problem in its Widest Sense, Gostekizdat, p. 491, 1934.
- 2) E.L. Nikolai, On the Stability of the Rectilinear Form of Equilibrium of a Bar in Compression and Torsion, Izv, Leningr. politekn in-ta Vol. 31, 1928.
- 3) H. Ziegler, Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ingenieur-Archiv, Vol. 20, pp. 49~56, 1952.
- 4) M. Beck, Die Knicklast des Einseitig Eingepannten, Tangential Gedrückten Stabes, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Vol. 3, pp. 225~229, 1952.
- 5) A. Pflüger, Zur Stabilität des Tangential Gedrückten States, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Vol. 35, p. 191, 1955.
- 6) K.S. Deineko and M.Iu. Leonov, The Dynamic Method Investigating the Stability of a Bar in Compression, PM., Vol. 19, pp. 738~744, 1955.
- 7) V.V. Bolotin, Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, Oxford, 1963.
- 8) H. Leipholz, Stability of elastic systems, sijthoff & Noordhoff, 1980.
- 9) W.W. Walter and M. Levinson, Destabilization of Elastic Systems, McGraw-Hill, 1963.

- bilization of a Nonconservatively Loaded Elastic System due to Rotary Inertia, Canadian Aeronautics and Space Institute Transactions Vol. 1, pp. 91~93, 1968.
- 10) G.L. Anderson, the Influence of Rotatory Inertia, Tip Mass, and Damping on the Stability of a Cantilever beam on an Elastic Foundation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 43, pp. 540~552, 1975.
 - 11) G.L. Anderson, J.D. Vasilakis and J.J. Wu, The Influence of Tip Mass offset on the Stability of Beck's Column, Journal of Sound and Vibration, Vol. 62, pp. 475~480, 1979.
 - 12) 윤한익, 김광식, 비보존 압축력을 받은 장주의 진동과 안전성에 미치는 말단질량의 관성모우멘트의 영향, 한양대학교 산업과학논문집, No. 16, pp. 87~93, 1983.
 - 13) M. Levinson, Application of the Galerkin and Ritz Methods of Nonconservative problems of Elastic stability, ZAMP. Vol. 17, pp. 431~442, 1966.
 - 14) 윤한익, 김광식, 고정단의 스프링상수가 말단질량을 가진 Beck's column의 안정성에 미치는 영향, 대한기계학회논문집, 제9권, 제5호, pp. 606~612, 1985.
 - 15) 윤한익, 김광식, 말단질량의 관성모우멘트가 Beck's column의 안전성에 미치는 영향, 대한기계학회논문집, 제8권, 제2호, pp. 119~126, 1984.
-