

<논 문>

회전하는 순환대칭 구조물의 유한요소 진동해석 기법

A Method for Finite Element Vibration Analysis of Rotating Structures with Cyclic Symmetry

김 창 부* · 심 수 섭**

Chang-Boo Kim and Su-Sub Shim

(1998년 9월 7일 접수 ; 1998년 11월 23일 심사완료)

Key Words : Rotating Structure(회전하는 구조물), Cyclic Symmetry(순환대칭), Vibration Analysis(진동해석), Finite Deformation(유한변형), Centrifugal Force(원심력), Coriolis Force(코리올리스력), Operating Load(운전부하), Substructure(부분구조), Discrete Fourier Transform(이산푸리에 변환), Number of Nodal Diameter(절직경수)

ABSTRACT

In this paper, we present an efficient method for finite element vibration analysis of constantly rotating structures with cyclic symmetry, which are deformed to some considerable extent by centrifugal force, Coriolis force and operating load, and vibrate due to several types of exciting forces. A structure with cyclic symmetry is composed of circumferentially repeated substructures with the same geometry. Being only one substructure modeled, the dynamic characteristics of the structure can be analyzed systematically, rapidly and exactly using discrete Fourier transform by means of a computer with small memory.

1. 서 론

고속으로 회전하는 터빈, 압축기, 펌프등 회전기계의 익차에서는 원심력 및 운전부하로 인하여 무시 못할 정도의 변형과 응력이 생기면서 여러 유형의 여기력이 작용하여 진동이 발생하게 된다. 이와 같은 동적 특성의 파악은 익차설계에서 매우 중요하므로 그 특성을 해석하는 방법에 관하여 지금까지 많은 연구가 되어왔다. 익차는 복잡한 형상의 익이 원주방향으로 주기적으로 배열되어 있는 순환대칭 구

구조물이므로 이와 같은 구조물의 순환대칭성을 이용하여서 복잡한 기하학적 형상을 용이하게 모델링할 수 있는 유한요소법을 사용하여 순환대칭 구조물의 동적특성을 해석하는 대표적인 연구로서는 참고문헌(1~6)과 같다.

본 연구에서는 일정한 속도로 회전하는 익차와 같은 순환대칭 구조물에서 원심력과 코리올리스력 및 운전부하가 진동에 미치는 영향을 고려할 수 있도록 유한변형이론 및 유한요소법을 사용하여 운동방정식을 정립하고, 동적 특성을 이산푸리에 변환을 사용하여 체계적으로 해석하는 효율적인 방법을 제시하고자 한다.

동일한 기하학적 형상의 부분구조가 원주방향으로 주기적으로 배열되어 있는 순환대칭 구조물을 전체

* 정회원, 인하대학교 공과대학 기계항공자동화공학과

** 생산기술연구원 기술교육센터

적인 유한요소로 모델링하는 경우에는 자유도수가 매우 많이 되어 해석이 거의 불가능하게 되므로 구조물의 순환대칭성을 이용하여 이산푸리에 변환을 사용하므로써 한 개의 부분구조만을 모델링하여 구조물의 동적 특성을 작은 컴퓨터 용량으로도 체계적으로 신속하고 정확하게 해석할 수 있다.

2. 회전하는 구조물

2.1 운동방정식

고정좌표계 $\{O, X, Y, Z\}$ 의 X 축 방향으로 회전하고 있는 구조물의 변형과 작용력은 Fig. 1 에서와 같다. 회전좌표계 $\{O, x, y, z\}$ 는 구조물에 고착되어 구조물과 함께 x 축 방향과 일치된 X 축 방향으로 고정좌표계에 대하여 회전각 $\phi(t)$ 만큼 회전하고 있다. $\vec{u}(\vec{r}_0, t)$ 는 구조물을 구성하는 질점 P 의 변위이다. $\Gamma_S(t)$ 는 구조물에 작용하는 반력 토크이며, $\vec{b}(\vec{r}_0, t)$ 는 질점 P 에 작용하는 단위 질량당의 체적력이고, $\vec{t}(\vec{r}_0, t)$ 는 구조물 표면에 작용하는 단위 면적당의 표면력이다.

질점 P 의 변형전 위치 \vec{r}_0 와 변위 \vec{u} 를 회전좌표계 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\vec{r}_0 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1)$$

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \quad (2)$$

변위 성분을 유한요소법의 질점변위벡터 v 및 x ,

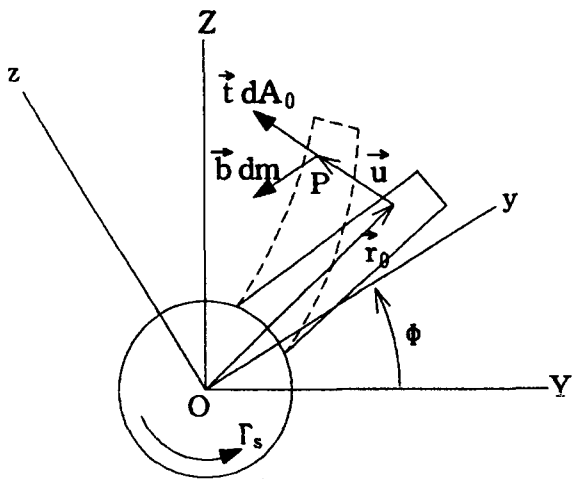


Fig. 1 Deformation and forces of rotating structure

y, z 방향 변위에 대한 형상함수 N_x, N_y, N_z 를 사용하여 다음과 같이 근사시키고

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} \{v\} \quad (3)$$

유한변형을 고려하면 가상일의 원리로부터 변위 v 에 대하여 비선형인 다음과 같은 운동 방정식이 얻어진다.

$$M_0 \ddot{v} + 2\dot{\phi} M_G \dot{v} + K_S(v)v + \ddot{\phi}(b_G + M_G v) - \dot{\phi}^2(a_C + M_C v) = f_E(t) \quad (4)$$

여기서

$$M_0 = \int_{D_0} [N_x^T N_x + N_y^T N_y + N_z^T N_z] dm$$

$$M_G = \int_{D_0} [N_z^T N_y - N_y^T N_z] dm$$

$$M_C = \int_{D_0} [N_y^T N_y + N_z^T N_z] dm$$

$$a_C = \int_{D_0} \{N_y^T y + N_z^T z\} dm$$

$$b_G = \int_{D_0} \{N_z^T y - N_y^T z\} dm$$

$$f_E = \int_{D_0} \{N_x^T b_x + N_y^T b_y + N_z^T b_z\} dm + \int_{\partial D_0} \{N_x^T t_x + N_y^T t_y + N_z^T t_z\} dA_0$$

$$K_S(v) = K_0 + \frac{1}{2} K_1(v) + \frac{1}{4} K_2(v) + \frac{1}{2} K_\sigma(\sigma)$$

$$K_0 = \int_{D_0} [B^T D B] dV_0$$

$$K_1 = \int_{D_0} [(AG)^T D B + B^T D (AG)] dV_0$$

$$K_2 = \int_{D_0} [(AG)^T D (AG)] dV_0$$

$$K_\sigma = \int_{D_0} [G^T S G] dV_0$$

상기 식에서 M_0 는 질량행렬, M_G 는 자이로감쇠 효과행렬, K_S 는 할선강성행렬, M_C 는 기하학적 질량행렬, a_C 는 원심력효과벡터, b_G 는 접선력효과벡터, f_E 는 외력벡터이며, K_0 는 선형강성행렬, K_1 는 변위에 1차 종속인 강성행렬, K_2 는 변위에 2차 종속인 강성행렬, K_σ 는 응력에 1차 종속인 강성행렬이다. 또한 D 는 탄성행렬, B 는 선형변형도행렬,

G 는 변위구배행렬, A 는 변위에 1차 종속인 변환행렬, AG 는 비선형변형도행렬, S 는 응력행렬이며, 응력벡터 σ 와 변위벡터 v 의 관계는 다음과 같다.

$$\sigma = D[B + \frac{1}{2}A(v)G]v \quad (5)$$

2.2 일정 회전시의 진동 방정식

구조물이 일정한 각속도 Ω 로 회전하고 있는 경우 ($\dot{\phi} = \Omega$)의 운동방정식은 식 (4)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$M_0 \ddot{v} + 2\Omega M_G \dot{v} + [K_S(v) - \Omega^2 M_C]v = \Omega^2 a_C + f_E(t) \quad (6)$$

일정한 외력이 작용하는 정적 평형상태 (${}^s\dot{v} = {}^s\ddot{v} = 0$)에서의 평형방정식은 식 (6)으로부터 다음과 같이 표현되며

$$[K_S({}^s v) - \Omega^2 M_C]{}^s v = \Omega^2 a_C + {}^s f_E \quad (7)$$

응력은 식 (5)로부터 다음과 같이 표현된다.

$${}^s \sigma = D[B + \frac{1}{2}A({}^s v)G]{}^s v \quad (8)$$

평형방정식 (7)은 정적변위 ${}^s v$ 에 대하여 비선형 방정식이다.

정적 평형상태에서의 동적 변위 ${}^d v = v - {}^s v$ 를 미소하다고 가정하여 식 (6)을 정적 평형상태에서 선형화하면 동적 변위 ${}^d v$ 에 대하여 선형인 다음과 같은 진동방정식이 얻어진다.

$$M_0 {}^d \ddot{v} + 2\Omega M_G {}^d \dot{v} + [K_T({}^s v) - \Omega^2 M_C]{}^d v = {}^d f_E(t) \quad (9)$$

여기서

$$K_T({}^s v) = K_0 + K_1({}^s v) + K_2({}^s v) + K_\sigma({}^s \sigma)$$

$${}^d f_E(t) = f_E(t) - {}^s f_E$$

상기식에서 K_T 는 접선강성행렬, ${}^d f_E(t)$ 는 여기력벡터이다.

3. 회전하는 순환대칭 구조물

3.1 운동방정식

Fig. 2 와 같이 원주방향으로 주기적으로 배열된 n 개의 부분구조로 구성된 순환대칭 구조물이 일정

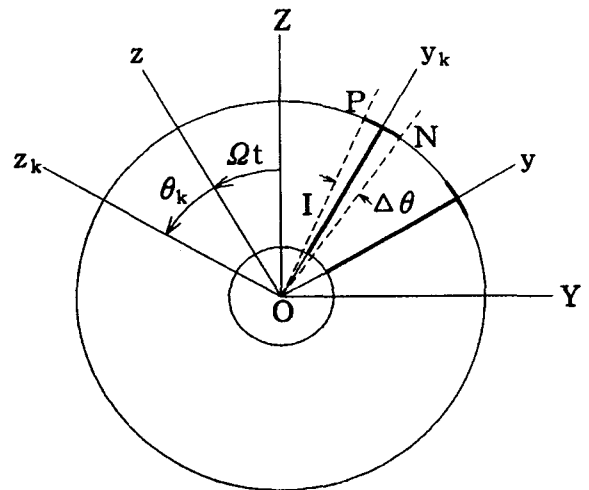


Fig. 2 Rotating structure with cyclic symmetry

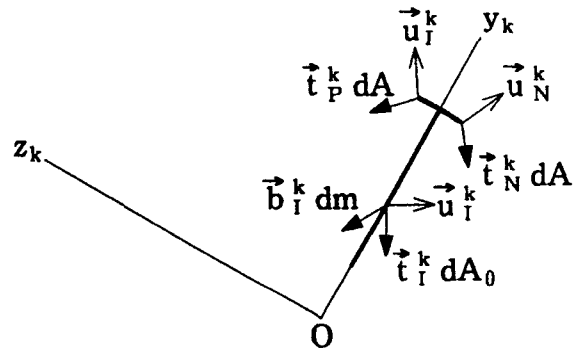


Fig. 3 Displacement and forces of k-th substructure

한 각속도 Ω 로 회전할 때, 회전좌표계 $\{0\} = \{O, x, y, z\}$ 로부터 x 축 방향으로 일정 각 $\theta_k = k\Delta\theta$ (여기서 분할각 $\Delta\theta = 2\pi/n$) 만큼 회전된 좌표계 $\{k\} = \{O, x_k, y_k, z_k\}$ 와 함께 회전하는 k 번째 부분구조의 변위를 Fig. 3 에서와 같이 내부 질점변위 \vec{u}_I^k , 양의 연결경계 질점변위 \vec{u}_P^k , 음의 연결경계 질점변위 \vec{u}_N^k 로 구분하고, 부분구조에 작용하는 외력을 내부 질점에 작용하는 체적력 $\vec{b}_I^k dm$ 및 표면력 $\vec{t}_I^k dA_0$, 양의 연결경계 질점에 작용하는 반력 $\vec{t}_P^k dA$, 음의 연결경계 질점에 작용하는 반력 $\vec{t}_N^k dA$ 로 구분한다.

연결경계에서의 변위조건과 반력조건은 연결경계에서의 변위의 연속성을 고려하면 다음과 같다.

$$\vec{u}_P^k = \vec{u}_N^{k+1} \quad (10)$$

$$\vec{t}_P^k = -\vec{t}_N^{k+1} \quad (11)$$

좌표계 $\{k+1\}$ 은 좌표계 $\{k\}$ 로부터 x 축 방향으로 $\Delta\theta$ 만큼 회전되어 있으므로 변위 및 힘등의 물리적 벡터의 좌표계 $\{k+1\}$ 에 대한 성분벡터는 다음과 같은 회전행렬 R 을 이용하여 좌표계 $\{k\}$ 에 대한 성분벡터로 좌표 변환 될 수 있다.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\theta & -\sin \Delta\theta \\ 0 & \sin \Delta\theta & \cos \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

따라서 연결경계에서는 절점의 변위조건 (10)과 반력조건 (11)은 다음과 같이 표현된다.

$$u_P^k = R u_N^{k+1} \quad (13)$$

$$t_P^k = -R t_N^{k+1} \quad (14)$$

연결경계에서의 경계조건 (13)과 (14)는 완전하므로 구조물의 순환대칭성을 고려하면 식 (6)으로부터 다음과 같은 n 개의 부분구조에 관한 운동방정식이 얻어진다.

For $k=1, \dots, n$

$$M_0^k \ddot{v}^k + 2\Omega M_C^k \dot{v}^k + [K_S^k - \Omega^2 M_C^k] v^k = \Omega^2 a_C^k + f_E^k(t) \quad (15)$$

여기서

$$M_0^k = M_0^n$$

$$M_C^k = M_C^n$$

$$M_C^k = M_C^n$$

$$a_C^k = a_C^n$$

$$K_S^k = K_0^n + \frac{1}{2} K_1^n(v^k) + \frac{1}{4} K_2^n(v^k) + \frac{1}{2} K_\sigma^n(v^k)$$

상기식에서 v^k 는 좌표계 $\{k\}$ 에 대한 k 번째 부분구조의 절점변위벡터로서 v_J^k, v_N^k, v_P^k 로 구성되며, f_E^k 는 좌표계 $\{k\}$ 에 대한 k 번째 부분구조에 작용하는 \vec{t}_J^k 및 \vec{b}_J^k 에 의한 절점외력벡터이다.

그런데 운동방정식 (15)에서 $v^k(k=1, \dots, n)$ 는 식 (13)부터 얻어지는 다음과 같은 연결경계에서의 절점변위에 관한 구속식을 만족해야 한다.

For $k=1, \dots, n$

$$v_P^k = A v_N^{k+1} \quad (16)$$

여기서 A 는 연결경계 절점변위벡터의 좌표계 $\{k+1\}$ 에 대한 성분벡터를 좌표계 $\{k\}$ 에 대한 성분벡터로

변환시키는 좌표변환행렬이다.

3.2 진동방정식

모든 부분구조에 동일하면서 일정한 외력이 작용하는 정적평형상태 (${}^s f_E^k = {}^s f_E^n, k=1, \dots, n$)에서의 평형방정식과 구속식은 순환대칭성을 고려하면 식 (15) 및 (16)으로부터 다음과 같이 얻어진다.

For $k=1, \dots, n$

$${}^s v^k = {}^s v^n$$

$$[K_S^n ({}^s v^n) - \Omega^2 M_C^n] {}^s v^n = \Omega^2 a_C^n + {}^s f_E^n \quad (17)$$

$${}^s v_P^n = A {}^s v_N^n \quad (18)$$

정적평형상태에서의 동적변위 ${}^d v^k = v^k - {}^s v^n$ ($k=1, \dots, n$)를 미소하다고 가정하여 식 (15)를 정적평형상태에서 선형화하면 동적변위 ${}^d v^k$ ($k=1, \dots, n$)에 대하여 선형인 다음과 같은 진동방정식이 얻어진다.

For $k=1, \dots, n$

$$M_0^n {}^d \ddot{v}^k + 2\Omega M_C^n {}^d \dot{v}^k + [K_T^n - \Omega^2 M_C^n] {}^d v^k = {}^d f_E^k(t) \quad (19)$$

여기서

$$K_T^n = K_0^n + K_1^n ({}^s v^n) + K_2^n ({}^s v^n) + K_\sigma^n ({}^s v^n)$$

$${}^d f_E^k(t) = f_E^k(t) - {}^s f_E^n$$

또한 식 (19)의 ${}^d v^k$ 는 다음과 같은 구속식을 만족하여야 한다.

For $k=1, \dots, n$

$${}^d v_P^n = A {}^d v_N^{k+1} \quad (20)$$

3.3 이산푸리에 변환

동적변위벡터와 여기력벡터를 구조물의 순환대칭성을 고려하여 이산푸리에 변환을 사용하여 표현하면 다음과 같다⁽⁶⁾.

For $k=1, \dots, n$

$${}^d v^k = v_0^R + \sum_{m=1}^{n-1} (v_m^R \cos m\theta_k - v_m^I \sin m\theta_k) \quad (21)$$

$${}^d f^k = f_0^R + \sum_{m=1}^{n-1} (f_m^R \cos m\theta_k - f_m^I \sin m\theta_k) \quad (22)$$

여기서

$$\begin{cases} v_m^R = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ({}^d v^k \cos m\theta_k) \\ v_m^I = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ({}^d v^k \sin m\theta_k) \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} f_m^R = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ({}^d f_E^k \cos m\theta_k) \\ f_m^I = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ({}^d f_E^k \sin m\theta_k) \end{cases} \quad (24)$$

그런데 $(n-m)\theta_k = 2\pi k - m\theta_k$ 이므로 식 (21) 및 식 (22)의 동적변위벡터와 여기력벡터는 다음과 같이 표현된다.

For $k=1, \dots, n$

$$\begin{aligned} {}^d v^k &= v_0^R + \sum_{m=1}^P 2(v_m^R \cos m\theta_k - v_m^I \sin m\theta_k) \\ &+ (\text{if } n \text{ is even}) v_{n/2}^R \cos \frac{n}{2} \theta_k \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} {}^d f^k &= f_0^R + \sum_{m=1}^P 2(f_m^R \cos m\theta_k - f_m^I \sin m\theta_k) \\ &+ (\text{if } n \text{ is even}) f_{n/2}^R \cos \frac{n}{2} \theta_k \end{aligned} \quad (26)$$

여기서

$$P = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{n}{2} - 1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \quad (27)$$

n 개의 선형진동방정식 (19)와 n 개의 선형구속식 (20)에 식 (25) 및 식 (26)를 대입하여 절직경수 (혹은 이산푸리에 지수) m 에 따라서 정리하면 다음과 같은 n 개의 변환된 진동방정식 및 대응되는 변환된 구속식이 얻어진다.

For $m=0, \dots, n/2$

$$\begin{cases} M_0^n v_m^R + 2\Omega M_G^n v_m^R + [K_T^n - \Omega^2 M_C^n] v_m^R = f_m^R(t) \\ M_0^n v_m^I + 2\Omega M_G^n v_m^I + [K_T^n - \Omega^2 M_C^n] v_m^I = f_m^I(t) \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} v_{Pm}^R = A(v_{Nm}^R \cos \theta_m - v_{Nm}^I \sin \theta_m) \\ v_{Pm}^I = A(v_{Nm}^R \sin \theta_m + v_{Nm}^I \cos \theta_m) \end{cases} \quad (29)$$

상기식에서 $m=0$ 혹은 $n/2$ (if n is even)에 대해서는 v_m^I 과 f_m^I 은 고려되지 않는다.

3.4 여기력

순환대칭 구조물에 작용하는 여기력을 유형별로 구분하면 다음과 같다.

(1) 순환대칭 여기력

정상상태에서는 구조물의 원주방향 주기성을 고려하면 외력벡터 $f_E^k(t)$ 는 다음과 같은 관계를 갖게 된다.

For $k=1, \dots, n$

$$f_E^{k+1}(t - \frac{2\pi}{n\Omega}) = f_E^k(t) \quad (30)$$

또한 외력벡터는 $T=2\pi/\Omega$ 의 주기를 가지므로 외력벡터를 Fourier 급수로 표현하면 다음과 같다.

$$f_E^k(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{i r(\Omega t + \theta_k)} \quad (31)$$

여기서

$$c_r = \frac{1}{T} \int_0^T f_E^k(t) e^{-i r \Omega t} dt = c_r^R + i c_r^I \quad (32)$$

따라서 정적외력벡터와 여기력벡터는 다음과 같다.

For $k=1, \dots, n$

$$\begin{cases} {}^s f_E^k = c_0 \\ {}^d f_E^k = \sum_{r=1}^{\infty} 2(c_r^R \cos r(\Omega t + \theta_k) - c_r^I \sin r(\Omega t + \theta_k)) \end{cases} \quad (33)$$

여기력벡터를 이산푸리에 변환하면 다음과 같이 표현된다.

For $m=0, \dots, n-1$

$$\begin{cases} f_m^R = \sum_{r \in J_m^+} (c_r^R \cos r\Omega t - c_r^I \sin r\Omega t) + \sum_{r \in J_m^-} (c_r^R \cos r\Omega t - c_r^I \sin r\Omega t) \\ f_m^I = \sum_{r \in J_m^+} (c_r^R \sin r\Omega t + c_r^I \cos r\Omega t) - \sum_{r \in J_m^-} (c_r^R \sin r\Omega t + c_r^I \cos r\Omega t) \end{cases} \quad (34)$$

여기서

$$J_m^+ = \{r \mid r = m + jn > 0 \text{ for all integer } j\}$$

$$J_m^- = \{r \mid r = -m + jn > 0 \text{ for all integer } j\}$$

그런데 $J_m^+ \cap J_{l \neq m}^+$, $J_m^- \cap J_{l \neq m}^-$ 은 공집합이다.

(2) 특정한 부분구조 여기력

n 번째 부분구조에만 여기력이 작용하는 경우, 즉 ${}^d f_E^k(t) = g(t)$, ${}^d f_E^k(t) = 0$ ($k=1, \dots, n-1$)의 경우에는 이산푸리에 변환된 여기력벡터는 다음과 같다.

For $m=0, \dots, n-1$

$$\begin{cases} f_m^R = \frac{1}{n} g(t) \\ f_m^I = 0 \end{cases} \quad (35)$$

(3) 동일한 부분구조 여기력

모든 부분구조에 동일한 여기력이 작용하는 경우,

즉 ${}^d f_k^R(t) = g(t)$ ($k=1, \dots, n$)의 경우에는 이산푸리에 변환된 여기력벡터는 다음과 같다.

$$\begin{cases} f_0^R = g(t) \\ f_m^R = f_m^I = 0 \quad (m=1, \dots, n-1) \end{cases} \quad (36)$$

4. 수치해석

4.1 해석모델

해석에 사용된 순환대칭 구조물의 모델은 Fig. 4에서와 같은 덮개가 달린 익차로서 길이 400 mm, 두께 4 mm, 폭 40 mm인 평판이 길이방향으로 90° 비틀어진 $n=40$ 개의 익이 등간격으로 반경 100 mm의 회전축에 고정되어 있고, 두께 6 mm, 폭 40 mm인 원통판의 덮개로 연결되어 있다. Fig. 5는 익과 덮개로 구성된 부분구조의 유한요소 모델을 보이고 있다. 익과 덮개는 각각 2×20 및 3×4 개

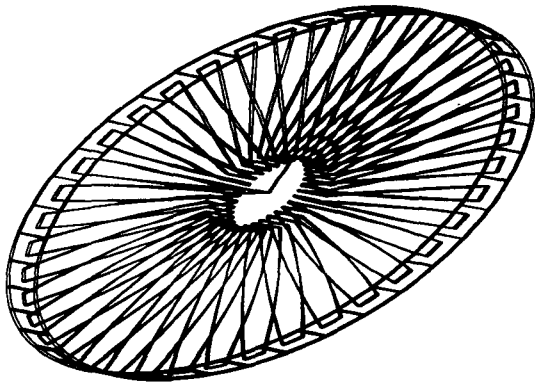


Fig. 4 Shrouded blade disk

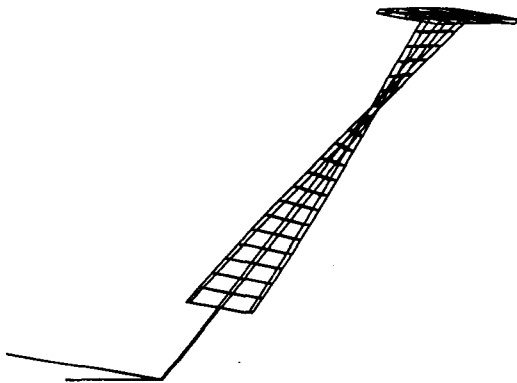


Fig. 5 Shrouded blade F.E. model

의 20절점 3차원 유한요소로 모델링되고, 적분은 $3 \times 3 \times 3$ 가우스적분점을 사용한다. 탄성계수는 2.05×10^{11} N/m², 프아송비는 0.3, 밀도는 7800 kg/m³이다.

4.2 고유진동해석

구속식 (29)를 고려하여 v_m^R, v_m^I 에 대한 진동방정식 (28)을 독립변수 v_m^* 에 대하여 표현하고 비례감쇠 및 모달감쇠를 고려할 수 있도록 감쇠행렬을 추가하여 정리하면 다음과 같은 진동방정식이 얻어진다.

For $m=0, \dots, n/2$

$$M_m^* \ddot{v}_m^* + [G_m^* + B_m^*] \dot{v}_m^* + K_m^* v_m^* = f_m^*(t) \quad (37)$$

해석과정에서 컴퓨터 메모리용량 및 계산시간을 줄이기 위해서 M_m^* 과 K_m^* 으로부터 계산된 저차의 비감쇠 고유진동모드만을 고려하여 식 (37)을 모달 변환하면 다음과 같이 표현된다.

$$M_m \ddot{q}_m + [G_m + B_m] \dot{q}_m + K_m q_m = f_m(t) \quad (38)$$

따라서 고유진동수와 고유모드는 다음과 같은 고유진동식으로부터 계산된다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_m \\ q_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_m^{-1} K_m & -M_m^{-1} G_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_m \\ \dot{q}_m \end{Bmatrix} \quad (39)$$

작성된 유한요소 프로그램 BKISKF의 정확성을 검증하기 위해서 참고문헌 (7)에 제시된 정사각형 단면을 갖는 회전하는 외팔보의 회전속도에 따라서 변하는 고유진동수를 NISA 상용패키지를 이용하여 계산된 결과와 함께 Table 1에 정리하였다. 계산에

Table 1 Natural frequencies of rotating beam

Ω (rad/s)	Natural frequencies (rad/s)	
	BDISKF	NISA
0	3.51651	3.51651
	3.51651	3.51651
	22.0564	22.0564
	22.0564	22.0564
10	5.06846	5.06846
	11.2087	11.2087
	32.1512	32.1512
	33.6687	33.6687
20	6.88333	6.88333
	21.1430	21.1430
	51.4655	51.4655
	55.1992	55.1992

Table 2 Natural frequencies at $\Omega = 0$

m	i	ω_{mi} (rad/s)		
		BDISKF	I-DEAS	NASTRAN
0	1	164.651	164.652	164.651
	2	577.137	577.137	577.137
	3	1911.77	1911.77	1911.77
	4	2813.48	2813.48	2813.48
1	1	572.043	572.043	572.043
	2	572.043	572.043	572.043
	3	1861.45	1861.45	1861.45
	4	1861.45	1861.45	1861.45
2	1	662.685	662.685	662.685
	2	662.685	662.685	662.685
	3	1792.33	1792.33	1792.33
	4	1792.33	1792.33	1792.33
20	1	1743.41	1743.42	1743.42
	2	2055.24	2055.24	2055.24

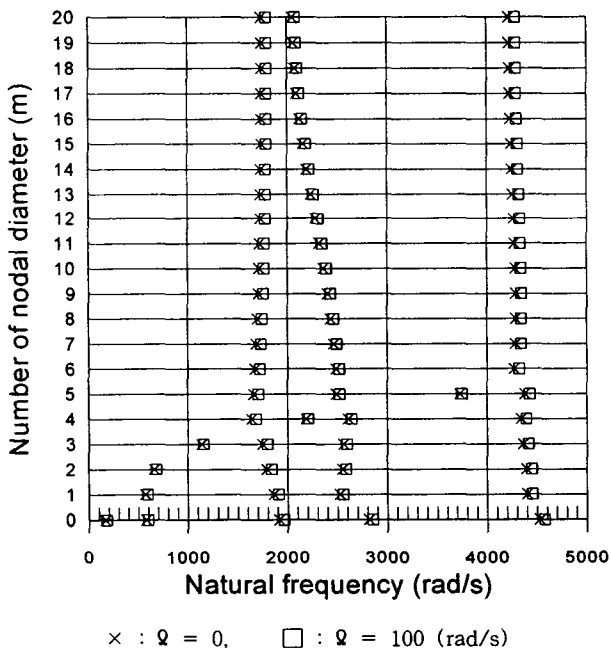


Fig. 6 Natural frequencies at $\Omega = 0$

서는 코리올리스력에 의한 차이로 감소효과를 무시하였다. 또한, 뒷게가 달린 익차 해석모델에 관하여 회전 속도 $\Omega=0$ 인 경우의 저차 고유진동수 ω_{mi} (m 은 절직경수, i 는 차수)를 I-DEAS 및 MSC/NASTRAN 상용패키지를 이용하여 제시된 방법에 따라서 계산된 결과와 함께 Table 2에 정리하였다. 고유진동수

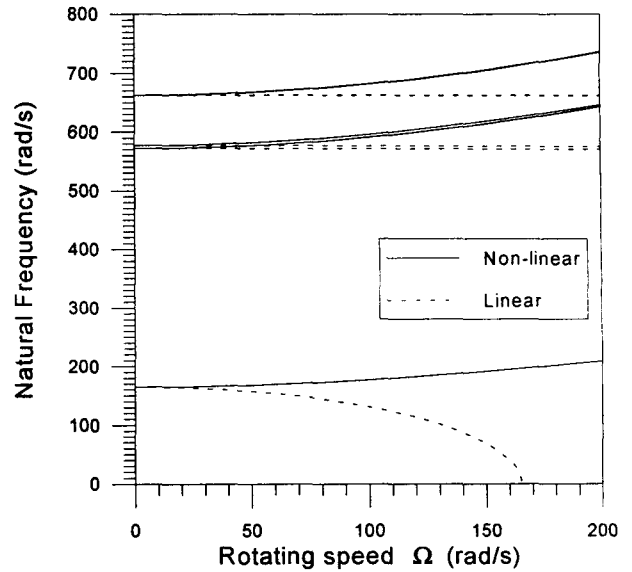


Fig. 7 Natural frequency curves along rotating speed

는 유효숫자 6자리까지 거의 일치하고 있다.

회전속도 $\Omega=0$ 인 경우에 해석모델의 저차 고유진동수는 Fig. 6에서와 같고 $m=1, \dots, 19$ 에서는 항상 동일한 두 개의 고유진동수가 존재한다.

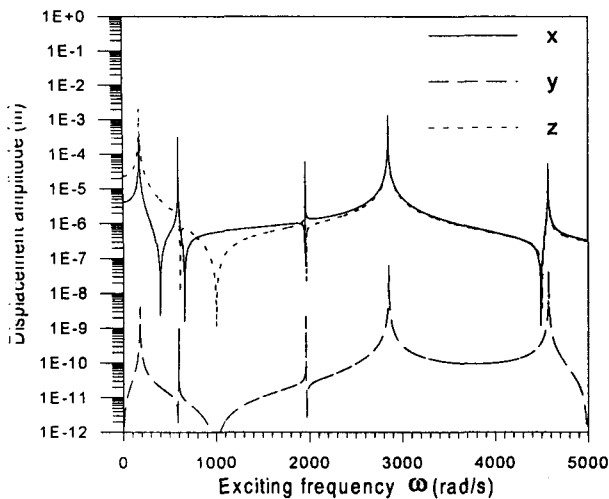
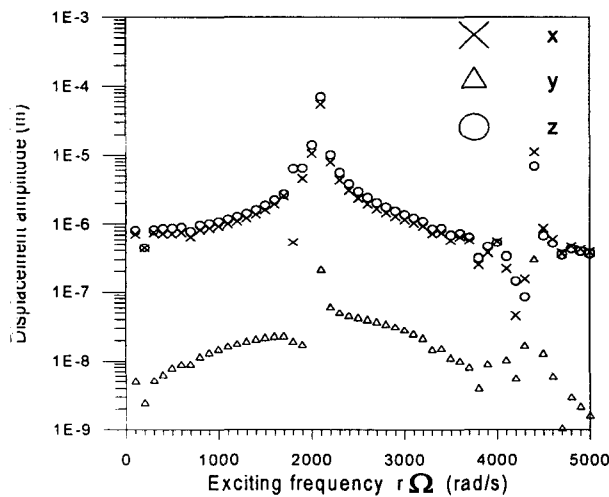
회전속도 $\Omega=100$ rad/s 인 경우에 해석모델의 저차 고유진동수는 Fig. 6에서와 같고 $m=1, \dots, 19$ 에서는 전향과 후향의 고유진동수가 거의 일치하므로 코리올리스력에 의한 영향은 거의 없다.

Fig. 7에서는 회전속도에 따라서 변하는 저차 고유진동수의 곡선을 보여주고 있다. ω_{01} 일 때는 원주방향 굽힘모드, ω_{02} 일 때는 축방향굽힘모드이고, 거의 동일한 고유진동수인 ω_{11} 과 ω_{12} 또는 ω_{21} 과 ω_{22} 일 때는 절직경수가 1 또는 2인 서로 직교하는 모드이다. 원심력에 의한 정적변형을 고려하지 않은 선형의 경우에는 기하학적 질량에 의한 회전연화(spin softening) 때문에 회전속도가 증가함에 따라서 고유진동수는 감소하고 있고, 원심력에 의한 정적변형을 고려한 비선형의 경우에는 기하학적 강성에 의한 응력경화(stress stiffening) 효과가 회전연화 효과보다 크게되어 회전속도가 증가함에 따라서 고유진동수는 증가하고 있다.

4.3 강제진동해석

식 (38)에서 f_m 과 q_m 을 다음과 같이 가정하면

$$\begin{aligned}
 f_m(t) &= \text{Re}\{F_{mw} e^{i\omega t}\} \\
 q_m(t) &= \text{Re}\{Q_{mw} e^{i\omega t}\}
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Fig. 8 Frequency response curves at $\Omega = 100$ rad/sFig. 9 Displacement amplitude spectrum at steady state $\Omega = 100$ rad/s

다음과 같은 주파수 응답식이 얻어진다.

$$[[K_m - \omega^2 M_m] + i\omega[G_m + B_m]]Q_{m\omega} = F_{m\omega} \quad (41)$$

회전속도가 100 rad/s 이고, 모달감쇠계수가 0.2 %인 경우에 모든 익의 중심에서 면에 수직인 방향으로 크기 1 N, 주파수 ω 인 동일한 부분구조 여기력이 작용할 때, 익 중심에서의 축방향(x), 반경방향(y) 원주방향(z) 변위 진폭의 여기주파수에 대한 응답은 Fig. 8과 같다.

회전속도가 100 rad/s, 모달감쇠계수가 0.2 %인 경우에 익의 중심에서 면에 수직방향으로 크기 1 N, 주파수 $r\Omega$ 인 순환대칭 여기력이 작용할 때, 익 중심에서의 x, y, z 방향 변위 진폭에 관한 주파수

응답은 Fig. 9와 같다.

5. 결 론

순환대칭 구조물의 순환대칭성을 이용하여 이산푸리에 변환을 사용함으로써 한 개의 부분구조만을 유한요소로 모델링하여 일정속도로 회전하는 순환대칭 구조물에 작용하는 원심력, 코리올리스력, 운전부하 및 여러 유형의 여기력에 의한 구조물의 동적 특성을 작은 컴퓨터 용량으로도 체계적으로 신속하고 정확하게 해석할 수 있는 효율적인 방법을 제시하였다.

후 기

본 연구는 1997년도 인하대학교 연구비 지원에 의하여 수행되었음.

참 고 문 헌

- (1) Thomas, D.L., 1979, "Dynamics of Rotationally Periodic Structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, pp. 81~102.
- (2) 道村精一, 長松昭男, 萩原憲明, 菊地勝昭, 1984, "羽根車の振動(第6,7報, 羽根車と共に運動する座標系における振動解析)", 日本機械學會論文集(C編), 50卷449號, pp. 72~89.
- (3) Dubigeon, S., and Michon, J.C., 1986, "Mode for Deformable Periodic Cyclic Symmetric Systems Driven in Uniform Rotation by a Flexible Shaft", Journal of Sound and Vibration, Vol.106, No.1, pp. 53~70.
- (4) Kohnke, P.C., 1986, ANSYS Engineering Analysis System Theoretical Manual, Swanson Analysis System INC.
- (5) Lahey, R.S., Miller, M.P., and Reymond, M., 1994, MSC/NASTRAN Reference Manual, The MacNeal-Schwendler Corporation.
- (6) 김창부, 김정락, 1995, "이산푸리에 변환을 이용한 순환대칭 구조물의 유한요소 진동해석", 한국소음진동공학회 1995년도 추계학술대회논문집, pp. 221~226.
- (7) Kothawala, K.S. and Kothawala, P.K., 1992, NISA II Verification Problems Manual, Engineering Mechanics Research Corporation.